УДК 539.3

К РАСЧЕТУ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ПЛАСТИНКИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА НЕМ

Г. П. Коваленко

(*Сумы*)

Во многих задачах, решаемых в рамках модели линейной теории упругости изотропных сред, необходимо учитывать зависимость свойств среды от координат, в частности от координаты z — глубины полупространства. Такие задачи возникают в геофизике, сейсмологии, строительной механике. Поскольку уравнения движения упругой среды являются связанными, эффективное аналитическое решение краевых задач при любой неоднородности получить весьма трудно. Однако, как показано в [1], векторное уравнение движения Ламэ допускает разделение на независимые уравнения для бесконечного множества неоднородных сред. Предположение о слабой неоднородности последних практически не снижает общности результатов и в то же время позволяет эффективно решать краевые задачи приближенными методами. Реальные среды можно аппроксимировать с достаточной точностью результатов средами, входящими в упомянутое множество [2]. В данной работе получено решение задачи о колебаниях бесконечной классической пластинки на неоднородном полупространстве, когда по ней движется осциллирующий груз с постоянной скоростью. Более подробно рассмотрены частные случаи задачи, полученные из предыдущего решения предельным переходом по некоторым параметрам. Когда среда становится однородной, найденные зависимости переходят в известные результаты для однородных сред.

1. Рассматривается изотропное упругое полупространство в декартовой системе координат с положительным направлением оси OZ вниз. Уравнения движения среды берем в виде [1]

$$\left(\nabla^2 + H_n(z) - \frac{\partial^2}{v_n^2(z)\,\partial t^2}\right)\Psi_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

$$H_n(z) = -\frac{1}{2}\left(p_3' + \frac{1}{2}p_3^2\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma^{2(2-n)}(z)}\left(p_n g_n(z) + g_n'(z)(\gamma^2(z) - 1)\right) \quad (n = 1, 2),$$

$$H_3(z) = -\frac{1}{2}\left(p_1' + \frac{1}{2}p_1^2\right), \quad p_1 = \mu'\mu^{-1}, \; p_2 = \lambda'\mu^{-1}, \; p_3 = \rho'\rho^{-1},$$

$$g_n(z) = (-1)^n\left(2p_1 - p_3\gamma^{2(2-n)}(z)\right)(\gamma^2(z) - 1)^{-1},$$

$$v_n^2(z) = \frac{\mu}{\rho}\gamma^{2(2-n)}(z) \quad (n = 1, 2),$$

$$\gamma^2(z) = (\lambda + 2\mu)(\mu)^{-1},$$

где λ, μ, ρ — параметры Ламэ и плотность среды соответственно; штрих обозначает дифференцирование по z; ∇^2 — оператор Лапласа; $v_n(z)$ — скорости упругих волн деформаций. Векторное смещение $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ связано с потенциалами Ψ_n зависимостями

$$f_1\mathbf{u}_1 = \nabla\left(f_1\sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}}\Psi_1\right), \quad f_2\mathbf{u}_2 = \nabla\times\nabla\times\left(\mathbf{i}_z f_2\sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}}\Psi_2\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \nabla\times\left(\mathbf{i}_z\sqrt{\frac{\mu(0)}{\mu(z)}}\Psi_3\right),$$

где ∇ — оператор Гамильтона; $\mathbf{i}_z$ — единичный вектор; f_n — весовые функции, логарифмические производные которых обозначены выше через $g_n(z)$. Для возможности представления уравнений движения среды в виде (1.1) достаточно потребовать, чтобы ее параметры λ, μ, ρ удовлетворяли системе двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$(\mu g_1)' - \mu g_1^2 = ((\lambda + 2\mu)g_2)' - (\lambda + 2\mu)g_2^2 = E\rho, \tag{1.2}$$

где E — некоторая постоянная. При интегрировании (1.2) одну функцию следует считать известной, а для двух других задаем их значения и значения их производных на поверхности полупространства $z = 0$. Пятую постоянную определяем из дополнительного условия. Если принять ее равной нулю и в качестве основных параметров среды считать коэффициент Пуассона ν, модуль сдвига μ и квадрат скорости сдвиговых волн w, то систему (1.2) удается проинтегрировать полностью, в результате чего получим [2]

$$\mu(z) = \mu(0)(1 + Az)^{-1} \exp\left(B \int_0^z (1 + B(z - J(z)))^{-1}\, dz \right), \tag{1.3}$$

$$w(z) = w(0)(1 + Az(1 + B(z - J(z))), \quad J(z) = \int_0^z \frac{1 - 2\nu(z)}{1 - \nu(z)}\, dz,$$

$$B = (a + b)(1 - \nu(0)), \quad A = B - b, \quad a = w'(0)w^{-1}(0), \quad b = \mu'(0)\mu^{-1}(0).$$

Функции μ, w будут ограниченными и положительными, если a, b удовлетворяют условиям $a + b \geqslant 0$, $b \leqslant a(1 - \nu(0))\nu^{-1}(0)$. В случае постоянного коэффициента Пуассона система уравнений (1.2) сводится к одному нелинейному уравнению второго порядка, зависящему от двух произвольных постоянных. Частные решения этого уравнения не охватываются зависимостями (1.3). Примеры этих решений приведены в таблице.

Поскольку ν меняется от нуля до 0,5, его можно считать без потери общности медленно меняющейся функцией. Таковыми будут и остальные параметры среды, если a и b, определенные в (1.3), считать малыми величинами. В таком случае функции $H_n(z)$, определенные в (1.1), пропорциональны квадратам малых параметров и, поскольку $H_n(z)$ выражаются через логарифмические производные функций μ, ρ, с возрастанием z убывают, стремясь к постоянной, в частности к нулю. В силу этого обстоятельства слагаемыми $H_n(z)$ будем пренебрегать.

Пусть на полупространстве со свойствами, описанными выше, расположена пластинка, прогиб которой W описывается уравнением

$$D\Delta\Delta W + \rho_1 h \partial^2 W/\partial t^2 = q - p,$$

где h, ρ_1 — толщина и плотность пластинки; D — цилиндрическая жесткость; q — интенсивность внешней нагрузки; p — реакция полупространства. Пусть на пластинку действует осциллирующая нагрузка $qe^{i\omega t}$, приложенная к телу массы m, занимающему прямоугольную область со сторонами l_1, l_2 и движущемуся со скоростью c в положительном направлении оси OX. На границе контакта пластинки и полупространства предполагается отсутствие касательных напряжений, а также выполнение условий

$$W(x, y, t) = u_z(x, y, 0, t), \quad p(x, y, t) = \sigma_z(x, y, 0, t), \tag{1.4}$$

где u_z, σ_z — нормальное смещение и напряжение соответственно. Требуется найти прогиб пластинки и напряженное состояние полупространства. Задача решается в подвижной системе координат $\xi = x - ct$, $y = y$. После преобразования Фурье уравнений (1.1) по ξ и y получим обыкновенные дифференциальные уравнения с медленно меняющимися коэффициентами. Если $v_n^2(z)$ растут на бесконечности медленнее многочлена вто-

№ п/п	1		2
ν	$\nu \neq 0{,}25$	$\nu = 0{,}25$	$\nu \neq 0$
$h_n(z)$	$h_1 = 1 + \frac{az}{4\nu - 1}$	$h_2 = 1 + \frac{bz}{2}$	$h_3 = 1 + az$
$\frac{\mu(z)}{\mu(0)}$	$h_1^{3-4\nu}$	h_2^2	$h_3^{(1-\nu)/\nu}$
$\frac{\rho(z)}{\rho(0)}$	$h_1^{4(1-2\nu)}$	h_2^2	$h_3^{(1-2\nu)/\nu}$

рой степени, то решения этих уравнений можно представить абсолютно сходящимся рядом в любой конечной точке полуоси $z \geqslant 0$. Если же порядок роста $v_n^2(z)$ будет равен или больше двух, то решение представляется асимптотическим рядом [3]. В обоих случаях будем пользоваться первым слагаемым этих рядов или, иначе говоря, решением ВКБ [4]. С учетом этого решение системы (1.1) представим в виде

$$\Psi_n(\xi, y, z, t) = e^{i\omega t} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} G_n(\alpha, \beta) L_n(z) e^{i(\alpha\xi+\beta y)} d\alpha d\beta, \tag{1.5}$$

$$L_n(z) = \eta_n^{1/2}(\alpha, \beta, 0)\, \eta_n^{-1/2}(\alpha, \beta, z) \exp\left(-\int\limits_0^z \eta_n(\alpha, \beta, z)\, dz\right),$$

$$\eta_n(\alpha, \beta, z) = \left(\alpha^2 + \beta^2 - v_n^{-2}(z)(\omega - \alpha c)^2\right)^{1/2} \quad (n = 1, 2),$$

где α, β — параметры преобразования Фурье; G_n находятся из граничных условий; ω — частота колебаний. Заметим, что при $a = b = 0$ и постоянном ν уравнения (1.1) переходят в уравнения движения однородной среды, а (1.5) — в их точные решения. Прогиб пластинки также представим в виде двойного интеграла Фурье:

$$W(\xi, y, t) = e^{i\omega t} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha\xi+\beta y)} d\alpha d\beta. \tag{1.6}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.4) с учетом отсутствия касательных напряжений, получим

$$\psi(\alpha, \beta) = \frac{q(\alpha, \beta)(1 + m\omega^2 V)}{\pi^2 D\Omega(\alpha, \beta)}; \tag{1.7}$$

$$G_n = \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\varkappa(\alpha, \beta)} \psi_{21}^{n-1}(\alpha, \beta)\, \psi_{22}^{2-n}(\alpha, \beta) \quad (n = 1,2),\ G_3 = 0, \tag{1.8}$$

где $$\Omega(\alpha, \beta) = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \frac{\rho_1 h}{D}(\omega - c\alpha)^2 + \frac{\mu(0) F(\alpha, \beta)}{D\varkappa(\alpha, \beta)};$$

$$V = I(1 + \omega^2 m I)^{-1};\ I = \frac{1}{\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} q(\alpha, \beta)\, \Omega^{-1}(a, \beta)\, d\alpha d\beta;$$

$$\varkappa(\alpha, \beta) = k_2^2 \eta_1(\alpha, \beta) + ((\alpha^2 + \beta^2) g_2 - \eta_1(\alpha, \beta)\, \eta_2(\alpha, \beta)\, g_1) -$$

$$-\left(\alpha^2 + \beta^2 - 0{,}5\, k_2^2\right)(g_1 - g_2);\ F(\alpha, \beta) = \psi_{11}(\alpha, \beta)\, \psi_{22}(\alpha, \beta) -$$

$$-\psi_{21}(\alpha, \beta)\, \psi_{12}(\alpha, \beta);\ k_2 = \omega v_2^{-1}(0);$$

$$\psi_{nn}(\alpha, \beta) = 2(\alpha^2 + \beta^2) - k_2^2 + \gamma^{2(2-n)} g_n \eta_n(\alpha, \beta);$$

$$\psi_{12}(\alpha, \beta) = -(\alpha^2 + \beta^2)(2\eta_2(\alpha, \beta) + \gamma^2 g_2 + g_1 - g_2);$$

$$\psi_{21}(\alpha, \beta) = -(2\eta_1(\alpha, \beta) + g_2);\ \gamma = \gamma(0);$$

$$g_1 = g_1(0) = 2[b\nu(0) - a(1 - \nu(0))];\ g_2 = g_2(0) = (1 - 2\nu(0))(a + b).$$

Через $q(\alpha, \beta)$ обозначено преобразование Фурье интенсивности давления $q(\xi, y)$. Если давление распределено равномерно в пределах прямоугольника, то

$$g(\alpha, \beta) = 4 \sin(\alpha l_1/2) \sin(\beta l_2/2)(\alpha\beta)^{-1}.$$

Выражение (1.7) получено с учетом силы инерции колеблющегося тела, но без учета его силы тяжести. В выражениях $\psi_{nm}(\alpha, \beta)$ отброшены члены второго порядка малости по параметрам a и b. Имея $\psi(\alpha, \beta)$, по (1.6) находим прогиб пластинки, а по (1.5) — потенциалы Ψ_n, с помощью которых можно найти смещения и напряжения в полупространстве. Так, для смещений получим

$$u_n(\xi, y, z, t) = \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (i\alpha)^{2-n} (i\beta)^{n-1} \times \tag{1.9}$$

$$\times [\psi_{22}(\alpha, \beta) L_1(z) - \psi_{21}(\alpha, \beta)(\eta_2(\alpha, \beta, z) + \varepsilon(z)) L_2(z)] \times$$

$$\times \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\varkappa(\alpha, \beta)} e^{i(\alpha\xi + \beta y - \omega t)} d\alpha d\beta,$$

$$u_z(\xi, y, z, t) = \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\psi_{22}(\alpha, \beta)(\eta_1(\alpha, \beta, z) -$$

$$- \varepsilon(z)) L_1(z) - \psi_{21}(\alpha, \beta) L_2(z)] \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\varkappa(\alpha, \beta)} e^{i(\alpha\xi + \beta y - \omega t)} d\alpha d\beta,$$

$$u_1 = u_x, u_2 = u_y, \varepsilon(z) = \frac{1}{2}(g_1(z) - g_2(z)).$$

2. Рассмотрим некоторые частные случаи полученных выше выражений. Пусть к полупространству приложена осциллирующая нагрузка, распределенная в полосе $|x| < l$ с интенсивностью $q = q(x)$. Смещения в полупространстве получим из (1.9), приняв $D = m = c = \beta = h = 0$ и оставив один интеграл по α:

$$u_n(x, z, t) = \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}} e^{i\omega t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (i\alpha)^{n-1} K_n(\alpha, z) \frac{q(\alpha)}{F(\alpha)} e^{i\alpha x} d\alpha, \tag{2.1}$$

$$K_n(\alpha, z) = (-1)^n \psi_{22}(\alpha) Q_n^{2-n}(z) L_1(z) + (-1)^{3-n} \alpha^{2(2-n)} \psi_{21}(\alpha) Q_n^{n-1}(z) L_2(z),$$

$$Q_n(z) = \eta_n(\alpha, z) + (-1)^n \varepsilon(z), u_1 = u_z, u_2 = u_x;$$

$$F(\alpha) = F_0(\alpha) - k_2^2 (\gamma^2 g_2 \eta_1(\alpha) + g_1 \eta_2(\alpha)) - 2\varepsilon(0) \alpha^2 (\eta_1(\alpha) - \tag{2.2}$$

$$- \eta_2(\alpha)) - \alpha^2 (\gamma^2 g_1 - (\gamma^2 - 1) \varepsilon(0)) g_2 + \gamma^2 \eta_1(\alpha) \eta_2(\alpha) g_1 g_2,$$

$$F_0(\alpha) = (2\alpha^2 - k_2^2)^2 - 4\alpha^2 \eta_1(\alpha) \eta_2(\alpha), \eta_n(\alpha) = \eta_n(\alpha, 0).$$

Здесь для сходных величин приняты прежние обозначения. Например, $q(\alpha)$ — преобразование Фурье интенсивности $q(x)$, а $\psi_{nm}(\alpha)$, $\eta_n(\alpha, z)$, $L_n(z)$ находим из (1.5), если там принять указанные параметры равными нулю. Функция Рэлея $F(\alpha)$ состоит из соответствующей функции однородной среды $F_0(\alpha)$ и слагаемых, вызванных неоднородностью среды по z. Если выполнено условие $4\mu'(z)\rho(z)(1 - 2\nu(z)) = \mu(z)\rho'(z)(3 - 4\nu(z))$, то $\varepsilon(0) = 0$ и (2.2) упрощается. В частности, это имеет место для среды, описанной в первой колонке таблицы (среда 1), а ее уравнение Рэлея обсуждалось в [5, 6]. Корень уравнения Рэлея $F(\alpha) = 0$, обеспечивающий существование поверхностных волн, можно найти методом последовательных приближений, приняв в качестве нулевого приближения корень уравнения $F_0(\alpha) = 0$. При этом удобно записать $\alpha = k_2\zeta$ и сократить уравнение $F(\alpha) = 0$ на общий множитель k_2^4. Тогда корень полученного уравнения ζ_R, обеспечивающий существование поверхностных волн, будет однозначной и непрерывной функцией безразмерных параметров ak_2^{-1} и bk_2^{-1} в окрестности рэлеевского корня уравнения $F_0(\alpha) = 0$. Это вытекает из теоремы о существовании неявной функции [7], выполнение которой легко проверить. Так, для среды 1 при $\nu = 0{,}25$; $ak_2^{-1} = 0{,}2$ $\zeta_R = 1{,}0365217$. Соответствующее значение корня для однородной среды равно 1,08885. Поскольку жесткость среды с возрастанием a увеличивается, следует ожидать возрастания скорости волны Рэлея v_R, что и наблюдается, ибо $v_R = v_2(0)\zeta_R^{-1}$. Укажем еще на один эффект, вызванный неоднородностью среды. Действительные корни функции (2.2), один из которых отвечает поверхностным волнам, существуют при $\zeta \leqslant 1$. Приняв $\zeta = 1$, получим из (2.2) такое значение частоты ω, ниже которого волны Рэлея в среде без поглощения энергии не возбуждаются:

$$\omega \geqslant v_2(0)\left[\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}(\gamma^2 g_2+2\varepsilon(0))+\right. \tag{2.3}$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}(\gamma^2 g_2+2\varepsilon(0))^2+4(\gamma^2 g_1-(\gamma^2-1)\varepsilon(0))g_2\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

В частности, для среды 1 $g_1 = g_2 = 2a(1-2\nu)$, $\varepsilon(0) = 0$ и (2.3) совпадает с результатом, полученным в [5] для $\nu = 0{,}25$.

Вычисление интегралов типа (2.1) с помощью контурного интегрирования в комплексной α-плоскости подробно рассмотрено в [8]. Здесь только укажем, что $F(\alpha)$ имеет различный вид в зависимости от интервала, в котором находится α. В частности, на интервалах $(0, k_1)$, (k_1, k_2) имеем

$$F_m(\alpha) = A_m(\alpha) + iB_m(\alpha);$$

$$\text{при } m=1 \quad \alpha \in (0, k_1),\ \eta_n(\alpha) = i\sqrt{k_n^2-\alpha^2},\ k_n = \omega/v_n(0);$$

$$\text{при } m=2 \quad \alpha \in (k_1, k_2),\ \eta_1(\alpha) = \sqrt{\alpha^2-k_1^2},\ \eta_2(\alpha) = i\sqrt{\alpha^2-k_2^2},$$

где i — мнимая единица; A_m, B_m — соответственно действительная и мнимая части $F(\alpha)$ в указанных интервалах, которые находятся из (2.2).

При разработке методов виброизоляции машин в некоторых геофизических экспериментах и других случаях важно знать такие энергетические характеристики упругого полупространства: суммарную мощность упругих волн, вызванных поверхностным источником колебаний, мощность, затраченную на возбуждение отдельно взятых продольной, поперечной и рэлеевской волн, диаграмму направленности излучения энергии. Перейдем к выводу зависимостей, содержащих информацию по перечисленным вопросам, и обобщим аналогичные результаты для однородных сред [8]. Средняя за период мощность N, передаваемая полупространству при нагружении нормальной гармонической силой с амплитудой $2\mu(0)q(x)$ на отрезке $|x| < l$, вычисляется по формуле

$$N = -\mu(0)\,\omega\int_{-l}^{l} q(x)\,\mathrm{Im}\,u_z(x,0)\,dx,$$

где символ Im указывает на взятие мнимой части нормального смещения u_z. Последнее находим из (2.1), где нужно положить $n = 1$, $z = 0$. При этом для $K_1(\alpha, 0)$ получим

$$K_1(\alpha,0) = k_2^2\eta_1(\alpha) + (\alpha^2 g_2 - \eta_1(\alpha)\,\eta_2(\alpha)\,g_1) - (2\alpha^2-k_2^2)\,\varepsilon(0), \tag{2.4}$$

$K_1(\alpha, 0)$ также меняет вид в зависимости от интервала интегрирования. Для $\alpha \in (0, k_1)$ и $\alpha \in (k_1, k_2)$ радикалы $\eta_n(\alpha)$ записываются аналогично предыдущему. Поэтому в указанных интервалах имеем

$$K_{1m}(\alpha, 0) = C_m(\alpha) + iD_m(\alpha),$$

где C_m и D_m — действительные и мнимые части $K_1(\alpha, 0)$ в соответствующих интервалах, которые находятся из (2.4). С учетом вышеизложенного искомую мощность N представим в виде

$$N = \frac{\omega}{16\mu\pi}(4\mu(0)\,l)^2\left\{-2\pi\left(q^2(\alpha)\frac{K_1(\alpha)}{\dfrac{\partial F(\alpha)}{\partial\alpha}}\right)_{\alpha=\alpha_R}+\right. \tag{2.5}$$

$$+2\int_0^{k_1} q^2(\alpha)\frac{C_1(\alpha)A_1(\alpha)+D_1(\alpha)B_1(\alpha)}{A_1^2(\alpha)+B_1^2(\alpha)}\,d\alpha+$$

$$\left.+2\int_{k_1}^{k_2} q^2(\alpha)\frac{C_2(\alpha)B_2(\alpha)+D_2(\alpha)A_2(\alpha)}{A_2^2(\alpha)+B_2^2(\alpha)}\,d\alpha\right\},$$

где α_R — корень уравнения Рэлея (2.2). В предельном случае, когда $q(x) = q_0, 4\mu(0)q_0 l \to P$, $l \to 0$, формула (2.5) дает среднюю мощность, с которой нормальная к поверхности сосредоточенная сила $Pe^{i\omega t}$ производит работу по возбуждению волн в полупространстве, и обобщает известный результат Лэмба [9]. Как видно из (2.5), мощность, затраченная на возбуждение поверхностных волн, отделена от мощности N_1, затраченной на возбуждение продольных и поперечных волн. В некоторых случаях мощность N_1 также нужно разделить на составляющие, что не удается сделать предыдущим методом. Вычислим N_1 другим путем — как поток мощности через цилиндрическую поверхность большого радиуса. Усредненная за период мощность N_1, проходящая через полуцилиндрическую поверхность произвольного радиуса R, определяется по формуле

$$N_1 = -\frac{i\omega}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sigma_R \bar{u}_R - \bar{\sigma}_R u_R + \sigma_{R\theta}\bar{u}_\theta - \bar{\sigma}_{R\theta}u_\theta\right) R d\theta,$$

где σ_R, $\sigma_{R\theta}$, u_R, u_θ — напряжения и смещения, записанные в сферической системе координат, а черта сверху указывает на переход к комплексно-сопряженным величинам. При R большом можно воспользоваться асимптотическим представлением для смещений и напряжений. Вычислив интегралы (2.1) методом стационарной фазы [10], по формулам

$$u_R = u_z \cos\theta + u_x \sin\theta, \quad u_\theta = u_x \cos\theta - u_z \sin\theta$$

перейдем к смещениям в сферической системе координат, а асимптотику напряжений найдем согласно зависимостям

$$\sigma_R = i\mu(z)k_1 u_R + O(R^{-3/2}), \quad \sigma_{R\theta} = \mu(z)k_2 u_\theta + O(R^{-3/2}),$$

где символ O обозначает порядок малости следующих слагаемых, которыми далее будем пренебрегать. Для оценки интегралов (2.1) необходимо найти стационарную точку фазовой функции

$$\int_0^z \eta_n(\alpha, z)\, dz - i\alpha x, \tag{2.6}$$

что трудно сделать из-за наличия интеграла. Полагая параметры a и b малыми, оценим указанный интеграл методом замораживания, фиксируя переменную z на уровне верхнего предела интегрирования. Легко видеть, что для сколь угодно малого числа ε_1 можно найти такие значения параметров a и b, что неравенство

$$\left|\exp\left(-\int_0^z \eta_n(\alpha, z)\, dz\right) - \exp\left(-z\eta_n(\alpha, z)\right)\right| < \varepsilon_1$$

будет выполняться на всей полуоси $z \geqslant 0$. Выполнив приближенное интегрирование в (2.6) и перейдя к переменным $R = \sqrt{x^2 + z^2}$, $\theta = \operatorname{arctg}(x/z)$, получим значения для стационарных точек α_{0n}:

$$\alpha_{0n} = k_2\zeta_n, \quad \zeta_n = r_n\gamma^{n-2} \quad (n = 1, 2),$$
$$r_n = \varphi_n \sin\theta, \quad \varphi_n = v_n(0)\, v_n^{-1}(R\cos\theta),$$

где v_n — скорости продольных и поперечных волн. После выполнения указанных выше операций получим асимптотические представления для смещений в сферической системе координат:

$$u_n = u_n^{(1)} + O\left(\frac{\varepsilon(R\cos\theta)}{\sqrt{R}}\right) + O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right), \tag{2.7}$$

$$u_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi R}}\, k_n^{1,3,5} \frac{q(k_n r_n)}{F(k_n r_n)} \begin{pmatrix}\psi_{22}(k_1 r_1)\\ \psi_{21}(k_2 r_2)\end{pmatrix} \left[\varphi_n \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin 2\theta\end{pmatrix} - \varepsilon(R\cos\theta)(-1)^n\right] \times$$
$$\times \exp\left(iRk_n\varphi_n - \frac{i(2n+1)}{4}\pi\right), \quad u_1^{(1)} = u_R, \quad u_2^{(1)} = u_\theta,$$

где при $n = 1$ следует брать верхнюю функцию в круглых скобках, а при $n = 2$ — нижнюю, символом $O(\varepsilon/\sqrt{R})$ обозначены слагаемые, пропорциональные $\varepsilon(R\cos\theta)$ и убывающие как $1/\sqrt{R}$, но представляющие собой альтернативную волну по сравнению с первым слагаемым. Следовательно, в случае неоднородной среды радиальное смещение образуется не только продольной, но и поперечной волной, что справедливо и в отношении образования окружного смещения. Если $\varepsilon(R\cos\theta)$ имеет порядок $1/R$, то вторыми слагаемыми, как и последующими, можно пренебречь. В этом случае мощность N_1 можно разделить на составляющие. Будем полагать, что имеется именно этот случай, и далее учитываем только первые слагаемые в (2.7). Конкретизируем вид функций $F(k_n r_n)$ в предположении, что φ_n убывают с возрастанием R:

$$F(k_1 r_1) = k_1^4 (A_3 + iB_3),$$

$$A_3 = (2r_1^2 - \gamma^2)^2 + 4r_1^2 э_1 э_2 - k_2^{-2}[r_1^2(\gamma^2 g_1 - (\gamma^2 - 1)\varepsilon(0) g_2 + \gamma^2 э_1 э_2 g_1 g_2,\ B_3 =$$
$$= k_1^{-1}[\gamma^2(\gamma^2 g_2 э_1 + g_1 э_2) + 2\varepsilon(0)(э_1 - э_2)],\ э_1 = (1 - r_1^2)^{1/2},\ э_2 = (\gamma^2 - r_1^2)^{1/2}.$$

При изменении угла θ от нуля до $\pi/2$ радикалы $э_n$ остаются действительными, а потому вид действительной и мнимой частей сохраняется; функция $F(k_2 r_2)$ ведет себя иначе:

$$F_n(k_2 r_2) = k_2^4 (A_{3+n} + iB_{3+n}) \qquad (n = 1, 2),$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 = \arcsin(1/\gamma\varphi_2)(n = 1),\ \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2(n = 2).$$

Здесь A_4, B_4 получаются из A_3, B_3, если в последних заменить r_1 на r_2, $э_1$ на $(1 - r_2^2)^{1/2}$ и $э_2$ на $(\gamma^{-2} - r_2^2)^{1/2}$. Если в только что полученной функции $F_1(k_2 r_2)$ заменить $i(\gamma^{-2} - r_2^2)^{1/2}$ на $(r^2 - \gamma^{-2})^{1/2}$, то ее действительная часть даст A_5, а коэффициент при мнимой части B_5. Используя введенные обозначения, получим

$$N_1 = N_p + N_s, \tag{2.8}$$

$$N_p = \frac{\omega\gamma^2}{8\mu(0)\pi}(4\mu(0)l)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q^2(k_1 r_1 l) J_p(\theta)\, d\theta,$$

$$J_p(\theta) = \frac{[(2r_1^2 - \gamma^2)^2 + k_1^{-2} g_2^2 (\gamma^2 - r_1^2)](\varphi_1^2 \cos^2\theta + k_1^{-2}\varepsilon^2)}{A_3^2 + B_3^2};$$

$$N_s = \frac{\omega}{8\mu(0)\pi}(4\mu(0)l)^2 \left\{\int_0^{\theta_0} q^2(k_2 r_2 l) J_{1s}(\theta)\, d\theta + \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} q^2(k_2 r_2 l) J_{2s}(\theta)\, d\theta\right\}, \tag{2.9}$$

$$J_{1s}(\theta) = \left(\gamma^{-2} - r_2^2 + \frac{g_2^2}{4k_2^2}\right)\left(\varphi_2^2 \sin^2 2\theta + \frac{\varepsilon^2(R\cos\theta)}{k_2^2}\right)(A_4^2 + B_4^2)^{-1},$$

$$J_{2s}(\theta) = \left(\sqrt{r_2^2 - \gamma^{-2}} + \frac{g_2}{2k_2}\right)^2 \left(\varphi_2^2 \sin^2 2\theta + \frac{\varepsilon^2(R\cos\theta)}{k_2^2}\right)(A_5^2 + B_5^2)^{-1}.$$

Отметим два эффекта, вызванных неоднородностью среды, полагая для определенности, что $q(x) = q_0$. Тогда $q(\alpha) = 2q_0 \sin(\alpha l)\alpha^{-1}$. Из уравнения $\sin(\alpha_R l) = 0$ находим такие значения l_n, при которых волна Рэлея не возбуждается: $l_n = n\pi(k_2\zeta_R)^{-1}$ $(n = 1, 2, 3\ldots)$. Поскольку ζ_R зависит от приведенных параметров неоднородности среды ak_2^{-1}, bk_2^{-1}, то при той же частоте ω l_n будут различными для однородных и неоднородных сред. Так, если взять среду 1 и использовать вышеприведенные корни Рэлея, то значения l_n будут отличаться на 5%.

Из уравнения $\sin(lk_n r_n) = 0$ находим направления, по которым продольная или поперечная волна не распространяется. Пусть Δ_n обозначает угол поворота этого направления, вызванного неоднородностью среды. Тогда

$$\Delta_n = \arcsin\left(\frac{k\pi l^{-1}}{k_n \varphi_n \sin\theta}\right) - \arcsin\left(\frac{k\pi l^{-1}}{k_n \sin\theta}\right), \ k = 1, 2, 3 \ldots, \ n = 1, 2, \ \theta \neq 0.$$

Формулы (2.5), (2.8), (2.9) обобщают соответствующие результаты для однородных сред и переходят в них, если a и b устремить к нулю.

3. Рассмотрим второй частный случай нагрузки, при этом, чтобы избежать излишней громоздкости, ограничимся средой 1. Пусть к поверхности полупространства приложено нормальное давление постоянной интенсивности по прямой, параллельной оси OX, движущейся со скоростью c. Смещения в полупространстве можно получить из (1.9), приняв соответствующие параметры равными нулю и оставив один интеграл по α. Вычислив его в предположении, что $c < v_2(0)$, $1 - c^2 v_n^{-2}(z) > 0$, получим

$$u_n(\xi, z, t) = \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho(z)}} \sum_{k=1}^{2} \frac{d_{nk}}{F_0(c)} \left\{ m_n M_{nk} + \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \sum_{s=1}^{2} (-1)^s \left(m_n \alpha_s + a_1 \delta_2^{2-n}\right) \times \right.$$

$$\times \left[\mathrm{M}_{nk} - 0{,}5 e^{-\alpha_s \chi_n(z)} \left[(\Gamma(0, \alpha_s \tau_{1n}) + \Gamma(0, \alpha_s \tau_{2n})) \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \times \begin{pmatrix} \cos(\alpha_s \xi) \\ -\sin(\alpha_s \xi) \end{pmatrix} + i\,(\Gamma(0, \alpha_s \tau_{1n}) - \Gamma(0, \alpha_s \tau_{2n})) \begin{pmatrix} \sin(\alpha_s \xi) \\ \cos(\alpha_s \xi) \end{pmatrix} \right]\right]\right\},$$

$$\tau_{1n} = \chi_n(z) + i\xi, \ \tau_{2n} = \chi_n(z) - i\xi, \ \chi_n(z) = \int_0^z \delta_n(c, z)\, dz,$$

$$M_{n1} = \ln\left(\xi^2 - \chi_n^2(z)\right)^{1/2}, \ M_{n2} = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\chi_n(z)}{\xi},$$

$$\alpha_s = \frac{a}{F_0(c)} \left[k_c^2 (\gamma^2 \delta_1 + \delta_2) \pm \left(k_c^4 (\gamma^2 \delta_1 + \delta_2)^2 + 4 F_0(c) (1 - \delta_1 \delta_2) \right)^{1/2} \right],$$

$$F_0(c) = \left(2 - k_c^2\right)^2 - 4\delta_1\delta_2, \ \delta_n(z) = \left(1 - \frac{c^2}{v_n^2(z)}\right)^{1/2},$$

$$d_{n1} = \delta_1^{2-n}(z)\, \delta_n^{1/2}(0)\, \delta_n^{-1/2}(z), \quad d_{n2} = \delta_2^{n-1}(z)\, \delta_n^{1/2}(0)\, \delta_n^{-1/2}(z),$$

$$m_1 = 2 - k_c^2, \quad m_2 = 2\delta_1(0), \quad k_c = c v_2^{-1}(0),$$

$$a_1 = 2a(1 - 2\nu(0)), \ \delta_n = \delta_n(0), \ u_1 = u_z, \ u_2 = u_x,$$

где $\Gamma(0, \tau)$ — неполная гамма-функция. При $n = 1$ следует брать верхнюю тригонометрическую функцию, при $n = 2$ — нижнюю. Слагаемое $\mathrm{M}_{nk} m_n$ в случае однородной среды дает известный результат [11]. Остальные слагаемые вызваны неоднородностью среды. Нормальное смещение u_z имеет, как и в случае однородной среды, логарифмическую особенность, но поверхность разрыва деформируется. Дополнительные слагаемые можно интерпретировать как волны деформаций, вызванные неоднородностью среды и имеющие период $2\pi\alpha_s^{-1}$. При $a \to 0$ амплитуды этих волн стремятся к нулю, а период колебаний — к бесконечности.

Поступила 29 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alverson R. C., Gair F. C., Hook J. F.** Uncoupled equations of motion in nonhomogeneous elastic media.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1963, vol. 53, N 5.
2. **Hook J. F.** Determination of inhomogeneous media for which the vector wave equation of elasticity is separable.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1965, vol. 55, N 6.
3. **Олвер Ф.** Введение в асимптотические методы и специальные функции. М.: Наука, 1978.
4. **Хединг Дж.** Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
5. **Karlsson T. and Hook J. F.** Lamb's problem for an inhomogeneous medium with

constant velocities of propagation.— Bull. Seismol. Soc. Amer., 1963, vol. 53, N 5.
6. **Коваленко Г. П., Филиппов А. П.** О колебаниях упругого полупространства с квадратичной зависимостью параметров Ламэ от глубины.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 6.
7. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
8. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981.
9. **Lamb H.** On the propagation of the tremors over the surface of an elastic solid.— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1904, A203, p. 1.
10. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.
11. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.

УДК 539.31

РЕАЛИЗАЦИЯ НЕОСЕСИММЕТРИЧНОГО БЕЗМОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ВРАЩЕНИЯ

Ю. В. Немировский, Г. И. Старостин

(*Новосибирск*)

В работе [1] сформулирован ряд постановок задач по реализации безмоментного напряженного состояния в упругих армированных оболочках с произвольной формой срединной поверхности. Данная работа посвящена решению трех из выдвинутых в [1] задач для случая, когда срединная поверхность оболочки является поверхностью вращения с ненулевой гауссовой кривизной. Вопрос о возможности реализации безмоментного состояния в произвольных армированных оболочках нулевой кривизны рассмотрен в [2], частный случай осевой симметрии — в [3].

1. Рассмотрим оболочку вращения с квазиоднородным слоистым строением по толщине. Выберем систему координат, связанную с линиями главных кривизн поверхности оболочки. Если оболочка работает в безмоментном напряженном состоянии, то должны выполняться следующие соотношения [1]:

уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\partial(rT_1)/\partial\varphi - T_2R_1\cos\varphi + R_1\partial T_{12}/\partial\theta = -rR_1p_1,\\ R_1\partial T_2/\partial\theta + \partial(rT_{12})/\partial\varphi + T_{12}R_1\cos\varphi = -rR_1p_2,\\ T_1R_2 + T_2R_1 = R_1R_2p_3;\end{gathered}\tag{1.1}$$

соотношения упругости

$$\begin{gathered}T_1 = h(a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_{12}),\ T_2 = h(a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + a_{23}\varepsilon_{12}),\\ T_{12} = T_{21} = h(a_{13}\varepsilon_1 + a_{23}\varepsilon_2 + a_{33}\varepsilon_{12});\end{gathered}\tag{1.2}$$

геометрические уравнения

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{w}{R_1},\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r}u + \frac{w}{R_2},\\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{r}{R_1}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v}{r}\right);\end{gathered}\tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\varkappa_1 = \frac{1}{R_1}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varphi} = 0,\quad \varkappa_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{r}\vartheta_1 = 0,\\ \tau = -\frac{1}{rR_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\partial\theta} - \frac{R_1\cos\varphi}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{rR_1}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{r}{R_1R_2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{v}{r}\right) = 0,\\ \vartheta_1 = -\frac{1}{R_1}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + \frac{u}{R_1},\quad \vartheta_2 = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta} + \frac{v}{R_2};\end{gathered}\tag{1.4}$$

уравнения неразрывности деформаций

$$\begin{gathered}R_1\partial\varepsilon_{12}/\partial\theta - r\partial\varepsilon_2/\partial\varphi - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)R_1\cos\varphi = 0,\\ r\partial\varepsilon_{12}/\partial\varphi + \varepsilon_{12}(R_1 + R_2)\cos\varphi - R_1\partial\varepsilon_1/\partial\theta = 0,\end{gathered}\tag{1.5}$$