

(фиг. 3). Менее удовлетворительные результаты получаются при сопоставлении формулы (8) с опытами работы [3] при вдуве воздуха (фиг. 4), причем расхождение с аналитическим решением тем больше, чем больше вдув газа. Возможно, в этом случае необходимо учитывать влияние вдува газа на распределение скоростей в вихре. Проведенный анализ показывает, что методы теории пограничного слоя можно достаточно эффективно использовать и при расчетах теплообмена в вихревой области.

Поступила 14 X 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. К р у ж и л и н Г. Н. Теплоотдача круглого цилиндра в поперечном потоке воздуха. Ж. техн. физ., 1938, т. 8, № 2.
2. Ш л и х т и н г Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
3. Д ж о н с о н Б. В., Г а р т н е т т Дж. П. Теплоотдача на цилиндре со вдувом, обтекаемым в поперечном направлении. Теплопередача, 1963, № 2.
4. Т ь ю ф и к О. Э., Э к к е р т Э. Р. Дж., Ю р е в и ч Л. С. Влияние термодиффузии на теплоотдачу при поперечном обтекании цилиндра. Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1, № 7.
5. Сб. «Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое» (под ред. С. С. Кутателадзе), Изд-во СО АН СССР, 1964.
6. Э к к е р т Э. Р. Дж., Х е й д е й А. А., Л и н к о в и ч В. К. Теплообмен, температура восстановления и поверхностное трение на плоской пластине с подачей водорода в ламинарный пограничный слой. Сб. «Тепло- и массоперенос», т. 3. (под ред. Лыкова А. В., Смольского Б. М.), Госэнергоиздат, 1963.
6. Л и н ь Ц з я - Ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит., 1958.

#### О ТЕРМОБУРЕНИИ

*Г. П. Черепанов (Москва)*

Одним из перспективных способов проходки скважин, особенно при бурении прочных пород, является способ воздействия высокотемпературной струи газа на породу. В местах интенсивного нагрева происходит разрушение породы под действием температурных напряжений. При этом наиболее эффективным режимом термобурения, очевидно, будет такой режим, при котором происходит хрупкое разрушение (раздробление) породы на мелкие куски и порода не оплавляется.

Ниже предлагаются постановка и решение задачи термобурения в предположении, что порода — упругая и оплавление отсутствует. Выражения для скорости стационарного бурения и размера частиц разрушенного материала получены в простом замкнутом виде.

§ 1. *Постановка задачи.* Представим себе неограниченное однородное и изотропное упругое тело с осесимметричной полостью в виде полубесконечного цилиндра с закругленным основанием (фигура). На дно полости направлена высокотемпературная струя газа, исходящая из некоторого резервуара с соплом  $A$ . Под действием разогрева в теле возникают термоупругие напряжения, подчиняющиеся закону Дюгамеля — Неймана [1]. Внешние нагрузки считаем пренебрежимо малыми сравнительно с характерными температурными напряжениями. При достаточно больших внутренних напряжениях происходит разрушение приповерхностной области тела и частицы разрушенного материала уносятся потоком струи газа. Разрушение тела считается хрупким, а оплавление отсутствующим. Эти условия налагают некоторые ограничения на температурный режим чисто хрупкого разрушения.

Примем следующее основное предположение:

$$\kappa/vd \ll 1 \quad (\kappa = k/\rho c) \quad (1.1)$$

Здесь  $\kappa$  — температуропроводность,  $k$  — теплопроводность,  $\rho$  — плотность,  $c$  — теплоемкость,  $d$  — характерный линейный размер тела (например, радиус кривизны закругления или же радиус цилиндра),  $v$  — нормальная скорость бурения, т. е. скорость перемещения граничной поверхности тела (в результате удаления разрушенного материала) по нормали к поверхности.

Предположение (1.1) означает, что поле внешней температуры в каждой точке границы тела проникает на глубину, малую сравнительно с характерным линейным размером участка границы, подвергающегося интенсивному нагреву. Выполнимость условия (1.1) обеспечивается весьма малыми значениями температуропроводности для большинства прочных скальных пород. Приняв, например,  $d \sim 10$  см и учитывая реальные значения  $\kappa$  для горных пород  $\kappa = 10^{-3} \div 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/сек, из условия (1.1) получаем следующее ограничение скорости бурения:  $v \gg 10^{-4} \div 10^{-3}$  см/сек. Имея в виду средние скорости проходки скважин, это условие следует считать не слишком обременительным (тем более для больших скоростей).

На основании предположения (1.1) нормальная скорость бурения в рассматриваемой точке поверхности тела будет полностью определяться локальными характеристиками потока и самого тела в окрестности этой точки. Выберем декартову систему координат  $x, y, z$  с центром в некоторой точке  $O$  поверхности тела; ось  $z$  направим по нормали к поверхности в глубину тела. Тогда поле напряжений, деформаций и температур в точке  $O$  будет медленно изменяющейся функцией  $x$  и  $y$ , но быстро изменяющейся функцией  $z$ . Рассматриваемые поля образуют своеобразный пристеночный слой. Для вектора упругих смещений  $u, v, w$  и температуры  $T$  в окрестности точки  $O$ , очевидно, вследствие (1.1) в обычном приближении будем иметь:

$$u = v = 0, \quad w = w(z, t), \quad T = T(z, t) \quad (1.2)$$

Уравнение Ляме в пренебрежении силами инерции примет следующий вид [1]:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $\lambda$  и  $\mu$  — постоянные Ляме. Упругие и термические постоянные тела для простоты считаем не зависящими от температуры. Температура ненагретого тела всюду в статье принимается нулевой.

Из условий на бесконечности

$$\partial w / \partial z = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

и уравнения Ляме (1.3) находим

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha T \quad (1.5)$$

На основании закона Гука и (1.5) для главных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\sigma_z$  получаем

$$\sigma_x = \sigma_y = - \frac{\alpha E T}{1 - \nu}, \quad \sigma_z = 0 \quad (1.6)$$

Таким образом, приповерхностные области тела находятся в условиях плоского напряженного состояния с всесторонним сжатием, причем сжимающее напряжение максимально на поверхности тела и быстро убывает с ростом глубины  $z$ . Температура тела удовлетворяет уравнению теплопроводности (в неподвижных координатах

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (z \geq 0) \quad (t - \text{время}) \quad (1.7)$$

и граничному условию теплообмена при  $z = 0$

$$-k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T_0 - T) \quad (1.8)$$

Здесь  $T_0$  — температура потока газа в точке  $O$ ,  $h$  — коэффициент теплообмена.

Следует отметить, что если уравнения (1.2) — (1.8) справедливы для стационарного разрушения, то они, очевидно, тем более будут выполняться для соответствующего нестационарного режима.

§ 2. Стационарный режим бурения. 2.1°. Определим вначале нормальную скорость стационарного бурения. Пусть граница полупространства перемещается с постоянной скоростью  $v$  по нормали к плоскости границы, а температура газа  $T_0$  и коэффициент  $h$  постоянны на границе. Для отыскания температуры тела имеем следующую краевую задачу:

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (z - vt > 0), \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T_0 - T) \quad (z = vt) \quad (2.1)$$

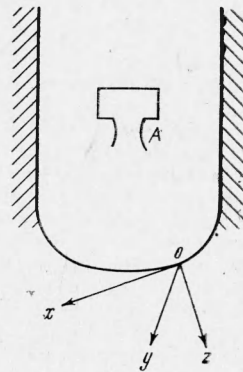
$$T = 0 \quad \partial T / \partial z = 0 \quad \text{при } z - vt \rightarrow \infty$$

Стационарное решение краевой задачи (2.1) имеет вид

$$T = \frac{h\kappa T_0}{kv + h\kappa} \exp \left[ - \frac{v(z - vt)}{\kappa} \right] \quad (2.2)$$

Перемещение границы происходит вследствие непрерывного разрушения тела и удаления частиц тела потоком газа. Напряженное состояние тела описывается формулами (1.6). Примем на свободной границе полупространства следующее дополнительное граничное условие разрушения ( $\sigma_s$  — прочность тела на сжатие)

$$\sigma_x = \sigma_y = -\sigma_s \quad (z = vt) \quad (2.3)$$



Фиг. 1

При помощи формул (1.6) и (2.2) из граничного условия (2.3) получаем выражение для нормальной скорости бурения

$$v = \frac{h\kappa}{k} \left[ \frac{\alpha ET_0}{(1-\nu)\sigma_s} - 1 \right] \quad (2.4)$$

Используя решение задачи (2.2) и (2.4), нетрудно найти условие отсутствия оплавления материала

$$\frac{(1-\nu)\sigma_s}{\alpha ET_n} < 1 \quad (2.5)$$

Здесь  $T_n$  — температура плавления тела.

2.2°. Оценим размер частиц разрушенного материала. Для этого следует несколько подробнее остановиться на механизме разрушения в приповерхностном слое. Возможны два механизма разрушения при сжатии: один из них связан с распространением трещин сдвига и отрыва [2], другой — с потерей устойчивости и локальными неоднородностями материала [2]. В рассматриваемой задаче на начальной стадии развития трещин, по-видимому, осуществляется первый механизм, а на заключительной стадии — механизм потери устойчивости, так как температурные напряжения сосредоточены в узком слое вблизи поверхности, причем тонкая пластинка материала, вырезанная из этого слоя, находится под действием двух одинаковых главных сжимающих напряжений. Поэтому частицы разрушенного материала будут представлять собой тонкие пластины толщины  $\delta$ , значительно меньшей характерного линейного размера сечения пластины в плане  $b$ .

Для оценки размера частицы  $\delta$  предположим, что вся упругая энергия частицы, имеющаяся до разрушения, в результате разрушения переходит в эффективную поверхностную энергию этой же частицы

$$\delta S U = \gamma (2S + p\delta) \quad (2.6)$$

Здесь  $U$  — упругая энергия, приходящаяся на единицу объема,  $\gamma$  — эффективная поверхностная энергия образования единицы площади,  $S$  и  $p$  — площадь и периметр частицы в плане соответственно.

Согласно условию разрушения (2.3)

$$U = \frac{1-\nu}{E} \sigma_s^2 \quad (2.7)$$

в предположении, что  $p\delta \ll 2S$ , из формулы (2.6) получаем

$$\delta = \frac{2\gamma E}{(1-\nu)\sigma_s^2} \quad (2.8)$$

Величина  $b$ , по-видимому, зависит от отношения прочности тела на сжатие  $\sigma_s$  к прочности на растяжение  $\sigma_p$ , так как в момент выкалывания пластинки из тела на плоскости пластины со стороны тела действуют нормальные растягивающие напряжения

$$b = \delta f(\sigma_s/\sigma_p) \quad (2.9)$$

где  $f$  — некоторая функция.

Из физических соображений при  $b \gg \delta$  должно быть  $\sigma_s \gg \sigma_p$ , и наоборот: при  $\sigma_s \sim \sigma_p$  должно быть  $b \sim \delta$ , т. е. механизм потери устойчивости перестанет играть роль. В последнем случае можно показать, что для оценки  $\delta$  по известной удельной поверхностной энергии  $\gamma$  можно по-прежнему пользоваться формулой (2.8).

Приведем численный пример. Для силикатного стекла  $\sqrt{\pi E \gamma} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^{3/2}$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $\sigma_s = 10^4 \text{ кг/см}^2$ . Отсюда по формуле (2.8) находим  $\delta \approx 0.2 \text{ см}$ . Следует отметить, что для горных пород величина  $\gamma$  плохо изучена.

§ 3. Нестационарная задача. 3.1°. Перейдем к исходной осесимметричной задаче бурения (фигура). Рассмотрим режим стационарного бурения, когда температура тела и форма полости зависят лишь от переменных  $\zeta = z_1 - v_* t$  и  $\rho$ , где  $z_1$ ,  $\rho$  — цилиндрические координаты ( $\rho = 0$  — ось симметрии задачи),  $v_*$  — скорость бурения. В данном случае температура и скорость потока газа, а следовательно, и коэффициент теплообмена в каждой точке поверхности каверны различны, так что нормальная скорость бурения в каждой точке  $v$  будет связана с неизвестной формой полости  $\zeta = \zeta(\rho)$  зависимостью

$$v = v_* / \sqrt{1 + [\zeta'(\rho)]^2} \quad (3.1)$$

В точке торможения потока газа, расположенной на оси симметрии и поверхности тела ( $\zeta = 0$ ,  $\rho = 0$ ), нормальная скорость бурения  $v$  равна скорости бурения полости  $v_*$ . Используя формулу (2.4) для нормальной скорости бурения, получаем представляющую основной интерес в рассматриваемой задаче зависимость для скорости бурения  $v_*$

$$v_* = \frac{h_*}{\rho c} \left[ \frac{\alpha ET_*}{(1-\nu)\sigma_s} - 1 \right] \quad (3.2)$$

Таким образом, скорость бурения  $v_*$  полностью определяется следующими параметрами: коэффициентом теплообмена потока газа с твердым телом в точке торможения  $h_*$ , температурой торможения газового потока  $T_*$ , плотностью тела  $\rho$ , теплоемкостью тела  $c$ , модулем Юнга  $E$ , коэффициентом температурного расширения твердого тела  $\alpha$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и прочностью тела на сжатие  $\sigma_s$ .

Форма полости в квазистационарном приближении должна быть определена из решения температурной газодинамической задачи. Дополнительными граничными условиями для температур при этом на неизвестном контуре служат условия (3.1), (2.4). Для определения коэффициента теплообмена  $h$  можно воспользоваться формулой Имаи [3], полученной из рассмотрения уравнений пограничного слоя. Укажем прием, при помощи которого можно получить приближенное решение задачи об определении формы каверны. Температуру  $T_0$  и скорость потока  $U_0$  на поверхности тела (на внешней границе пограничного слоя) аппроксимируем некоторыми функциями

$$T_0 = \varphi(s), \quad U_0 = \psi(s) \quad (s - \text{длина дуги}) \quad (3.3)$$

выбранными из соображений удобства решения уравнений пограничного слоя и заданными с точностью до нескольких постоянных. Из решения уравнений пограничного слоя для граничных условий (3.3) на внешней границе и условия для температуры газа  $T$

$$T = \frac{(1-\nu)\sigma_s}{\alpha E} \quad (3.4)$$

на границе с телом (получаемого на основании (1.6), (2.3)) находим коэффициент теплообмена  $h$

$$h = \omega(s) \quad (3.5)$$

также зависящий от нескольких постоянных.

В квазистационарном приближении, исключая  $v$  в формулах (2.4), (3.1), получаем следующую зависимость, связывающую форму каверны  $\zeta = \zeta(\rho)$  с коэффициентом теплообмена  $h$  и температурой  $T_0$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + [\zeta'(\rho)]^2}} = \frac{h[\alpha E T_0 - (1-\nu)\sigma_s]}{h_*[\alpha E T_* - (1-\nu)\sigma_s]} \quad (3.6)$$

Переходим к параметрической переменной  $s$  (длина дуги) и используем формулы (3.3) и (3.5). Находим

$$\rho = \int_0^s \theta(s) ds, \quad \zeta = \int_0^s \sqrt{1 - \theta^2(s)} ds, \quad \theta(s) = \frac{\omega(s)[\alpha E \varphi(s) - (1-\nu)\sigma_s]}{\omega(0)[\alpha E \varphi(0) - (1-\nu)\sigma_s]} \quad (3.7)$$

Уравнения (3.7) представляют собой искомые уравнения кривой каверны в параметрическом виде.

По найденной (с точностью до нескольких постоянных) форме полости может быть определено течение газа в полости и найдены неопределенные постоянные. Таким образом, все три задачи (течение идеального газа в полости, течение вязкого газа в пограничном слое, разрушение твердого тела под действием температурных напряжений) оказываются тесно связанными. Указанный метод решения комбинированной задачи может быть использован также для получения точного решения (разумеется, при помощи вычислительных машин).

3.2°. Следует знать еще ошибку, допускаемую при замене фактически нестационарной (вследствие криволинейности каверны) задачи о разрушении твердого тела квазистационарной задачей. Для этого нужно оценить характерное время выхода  $\tau$  на стационарный режим. Тогда условие квазистационарности может быть записано в виде

$$\tau v \ll d \quad (3.8)$$

Здесь  $v$  — нормальная скорость бурения,  $d$  — характерный линейный размер каверны. Время  $\tau$  на основании (1.7), (1.8) определяется из решения краевой задачи

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad [z - v(t)] t > 0 \quad (3.9)$$

$$T = 0 \text{ при } t = 0; \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} = h(T_0 - T) \text{ при } z = 0, \quad 0 < t < t_1$$

$$T = T_1, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = Q \text{ при } z = v(t)t, \quad ((v(t) > 0), t > t_1)$$

$$\left( T_1 = \frac{(1-\nu)\sigma_s}{\alpha E}, \quad Q = -\frac{h}{k}(T_0 - T_1) \right)$$

Из соображений анализа размерностей

$$\tau = \beta T_1^2 / \kappa Q^2 \text{ при } t_1 \ll \tau \quad (3.10)$$

где  $\beta$  — некоторый постоянный множитель.

Используя формулы (2.4) и (3.10), выражение (3.8) можно привести к виду

$$\beta \kappa / \nu d \ll 1 \quad (3.11)$$

Как видно, условие квазистационарности (3.11) вытекает из основного предположения (1.1)

Поступила 25 IV 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. Изд. «Мир», 1964.
2. Черепанов Г. П. О развитии трещин в сжатых телах. ПММ, 1966. т. 30, вып. 1.
3. J m a i J. On the heat transfer to constant-property laminar boundary layer with power function freestream velocity and wall temperature distributions, Quart. Appl. Math., 1958, vol. 16.

### ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Т. Д. Шермергор (Москва)

Рассматриваются наследственные свойства среды, сдвиговые деформации которой описываются модифицированными моделями Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела, в которых операторы дифференцирования заменены операторами дробного дифференцирования. Обсуждается возможность использования такого описания применительно к различным материалам.

Простейшие реологические модели — Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела — широко используются для качественного описания наследственных свойств различных сред в линейной области. Обладая простотой и наглядностью, эти модели имеют существенный недостаток — они не учитывают размытия релаксационного спектра, которое обычно имеет место для реальных материалов. Учет имеющегося у материала релаксационного спектра может быть проведен в рамках простейших реологических моделей, если несколько модифицировать вязкий элемент, входящий в реологическую схему. Для этого достаточно ньютоновский закон вязкости

$$s_{ik} = 2\mu D e_{ik} \quad \left( D \equiv \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (1)$$

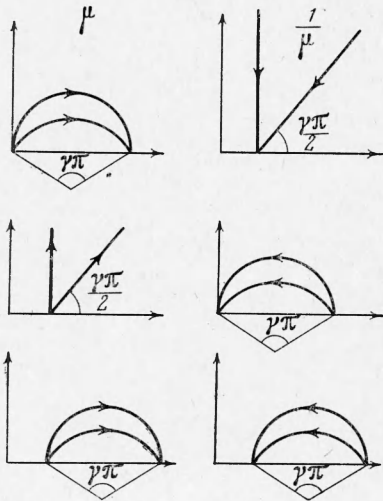
модифицировать, сделав замену  $D \rightarrow D^\gamma$ . Здесь  $s_{ik}$  и  $e_{ik}$  — девиаторы тензоров напряжений и деформаций соответственно,  $\mu$  — модуль сдвига,  $\tau$  — время релаксации.

Ограничиваясь сдвиговыми деформациями, запишем закон Гука для вязко-упругого тела в виде

$$s_{ik} = 2\mu(t) * e_{ik}, \quad S_{ik} = 2M E_{ik} \quad (2)$$

Здесь символ \* означает свертку на отрезке  $(0, t)$ , а через  $S_{ik}$  обозначена трансформанта одностороннего преобразования Лапласа функции  $s_{ik}$  и аналогично для других функций. Замена операторов  $D$  операторами дробного дифференцирования означает переход в пространстве изображений от сомножителей  $p\tau$  к  $(p\tau)^\gamma$ , где  $0 < \gamma \leq 1$ . Имея это в виду, запишем соответственно для модифицированных моделей Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела следующие выражения для модулей упругости  $M(p)$ :

$$M = \mu_0 [1 + (p\tau_\sigma)^\gamma], \quad M = \frac{\mu_\infty}{1 + (p\tau_\epsilon)^{-\gamma}}, \quad M = \mu_0 \frac{1 + (p\tau_\sigma)^\gamma}{1 + (p\tau_\epsilon)^\gamma} \quad (3)$$



Фиг. 1.