

Относительно влияния вязкости можно отметить, что она приводит лишь к слабому затуханию волн. В опытах по распространению волн в покоящейся жидкости было найдено, что их амплитуда уменьшалась примерно в e раз на расстоянии $s/l = 100$, где s — пройденный путь, l — длина основания прямоугольника, имеющего высоту a и площадь, равную площади волны. При этом имело место многократное отражение от торцевых стенок лотка.

Авторы благодарят Л. В. Овсянникова за инициативу постановки данных опытов и всестороннюю помощь в работе.

Поступила 23 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Keulegan G. H. Characteristics of internal solitary waves.— J. Res. of the Nat. Bur. of Stand., 1953, vol. 51, N 3.
2. Peters A. S., Stoker J. J. Solitary waves in liquids having nonconstant density.— Comm. Pure Appl. Math., 1960, vol. 13, N 1.
3. Kakutani T., Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid.— J. Phys. Soc. of Japan, 1978, vol. 45, N 2.
4. Walker L. R. Interfacial solitary waves in two-fluid medium.— Phys. Fluids, 1973, vol. 16, N 11.
5. Koop C. G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system.— J. Fluid Mech., 1981, vol. 112, p. 225.
6. Davis R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water.— J. Fluid Mech., 1967, vol. 29, pt. 3.
7. Kao T. W., Pao H.-P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves.— J. Fluid Mech., 1980, vol. 97, pt. 1.
8. Овсянников Л. В. Второе приближение в теории мелкой воды.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 2.
9. Thorpe S. A. Experiments on the instability of stratified shear flows immiscible fluids.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt. 1.

УДК 535.5 : 621.22

РАСЧЕТ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС КОЛЬЦЕВОЙ РЕШЕТКИ ЛОПАСТЕЙ

Л. А. Ткачева

(Новосибирск)

Для решения ряда задач аэроупругости турбомашин, например для расчета собственных частот и форм колебаний лопастей гидротурбин, необходимо знать коэффициенты присоединенных масс. Эти коэффициенты известны лишь для плоской решетки пластин [1—3]. Поэтому представляет интерес оценить влияние пространственности течения на их величину.

В данной работе рассматриваются присоединенные массы пространственной кольцевой решетки тонких лопастей, совершающих малые гармонические колебания с постоянным сдвигом фазы в несжимаемой жидкости.

Рассмотрим в цилиндрической системе координат r, θ, z кольцевую решетку N лопастей, колеблющихся в жидкости между двумя бесконечными цилиндрами C_1 и C_2 с радиусами r_1 и r_2 (фиг. 1). Предположим, что 1) жидкость идеальная, несжимаемая, покоятся на бесконечности, а течение потенциальное; 2) лопасти бесконечно тонкие и представляют собой части винтовых поверхностей, которые задаются уравнениями

$$z = h(\theta - 2\pi n/N), \quad -\theta_0 < \theta - 2\pi n/N < \theta_0, \quad r_1 < r < r_2, \\ n = 0, 1, \dots, N - 1,$$

где h — шаг винтовой поверхности, $2\theta_0$ — угол раствора лопасти; 3) все лопасти совершают малые колебания по одному гармоническому закону с некоторым сдвигом фазы $\mu = 2\pi n/N$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Перейдем к безразмерным координатам r' , θ' , z' , отнесенными к характерной длине $L = r_2 - r_1$:

$$r' = r/L, z' = z/L, \theta' = \theta, h' = h/L.$$

В дальнейшем штрихи будем опускать. В силу третьего предположения закон колебаний лопастей можно представить в виде

$$w^{(k)}(r, \theta, t) = Lf(r, \theta) \exp[i(k\mu + \omega t)],$$

где $w^{(k)}$ — перемещения точек k -й лопасти по нормали; ω — круговая частота колебаний; $f(r, \theta)$ — безразмерная комплексная функция, определяющая форму колебаний. Представим потенциал скорости φ в виде

$$\varphi = iL^2\omega\Phi(r, \theta, z) \exp(i\omega t).$$

Здесь $\Phi(r, \theta, z)$ — безразмерная комплексная функция, которая удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1) \quad \Delta\Phi = 0$$

и следующим граничным условиям:

$$(2) \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} |\nabla\Phi| = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{S_k} = f(r, \theta) e^{ik\mu}, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1;$$

$$(4) \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} \Big|_{C_j} = 0, \quad j = 1, 2;$$

$$(5) \quad \Gamma = 0,$$

где n — нормаль к соответствующей поверхности; S_k — поверхность k -й лопасти; Γ — циркуляция скорости вокруг лопасти. В силу (3) функция Φ обладает свойством обобщенной периодичности

$$(6) \quad \Phi(r, \theta + 2\pi n/N, z) = e^{in\mu}\Phi(r, \theta, z), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Лопасти будем моделировать вихревыми поверхностями интенсивности γ , а цилиндры C_j — потенциалами простого слоя с интенсивностями κ_j , $j = 1, 2$. Вектор γ имеет компоненты γ_r и γ_τ , где τ — касательная к винтовой линии, и связан с разрывом скорости соотношением

$$\gamma = \mathbf{n} \times (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-),$$

где индексы $+$ и $-$ обозначают предельные значения функции при подходе сверху и снизу соответственно. При этом компоненты вектора γ удовлетворяют соотношению [4]

$$(7) \quad \partial(\gamma_r \sqrt{r^2 + h^2}) / \partial r + \partial\gamma_\tau / \partial\theta = 0.$$

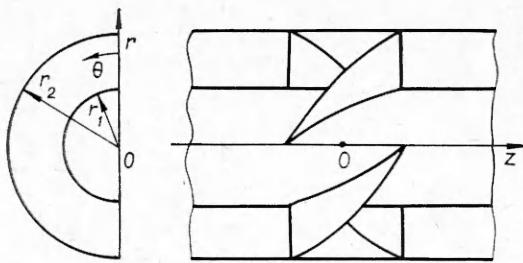
Будем предполагать, что на кромках лопастей радиальная компонента скорости не терпит разрыва, а касательная составляющая имеет интегрируемую особенность порядка 1/2. Тогда функции γ_r и γ_τ можно представить в виде

$$(8) \quad \gamma_r(r, \theta) = \gamma_1(r, 0) / \sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}, \quad \gamma_\tau(r, \theta) = \gamma_2(r, 0) \sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}.$$

Из условий непротекания на цилиндрах следует

$$(9) \quad \gamma_\tau(r_j, \theta) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Из условий непротекания на лопастях и цилиндрах получим следую-



Фиг. 1

щую систему трех интегральных уравнений, из которых первое сингулярное, а два других — со слабой особенностью:

$$(10) \quad i\omega L f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{in\mu}}{4\pi \sqrt{r^2 + h^2}} \int_{S_0} \int \left\{ \gamma_r \frac{\sqrt{r^2 + h^2} [h^2(\psi - \theta) \cos \alpha_n + r^2 \sin \alpha_n]}{[\rho^2 - 2\rho r \cos \alpha_n + r^2 + h^2(\psi - \theta)^2]^{3/2}} - \right.$$

$$- \gamma_\tau \frac{(\rho r + h^2 \cos \alpha_n)(\rho - r \cos \alpha_n) - h^2 r \sin^2 \alpha_n + h^2 \rho (\psi - \theta) \sin \alpha_n}{[\rho^2 - 2\rho r \cos \alpha_n + r^2 + h^2(\psi - \theta)^2]^{3/2}} \right\} d\rho d\psi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2}} \sum_{j=1}^2 \int_{C_j} \int \frac{\kappa_j [r(\zeta - h\theta) - hr_j \sin(\psi - \theta)] r_j d\zeta d\psi}{[r_j^2 - 2r_j r \cos(\psi - \theta) + r^2 + (\zeta - h\theta)^2]^{3/2}};$$

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{in\mu}}{4\pi} \int_{S_0} \int \frac{\gamma_r \sqrt{r^2 + h^2} (h\psi - z) \sin \alpha_n + \gamma_\tau \rho [(h\psi - z) \cos \alpha_n - h \sin \alpha_n]}{[\rho^2 - 2\rho r_k \cos \alpha_n + r_k^2 + (h\psi - z)^2]^{3/2}} d\rho d\psi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{C_j} \int \frac{\kappa_j [r_j \cos(\psi - \theta) - r_k] r_j d\psi d\zeta}{[r_j^2 - 2r_j r_k \cos(\psi - \theta) + r_k^2 + (\zeta - z)^2]^{3/2}} + \frac{1}{2} (-1) \kappa_k(\theta, z) = 0,$$

$$k = 1, 2.$$

Здесь $\alpha_n = \psi - \theta + 2\pi n/N$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Исследуем асимптотику интегралов в уравнении (11) при больших z . Разлагая подынтегральные функции в ряд по отрицательным степеням z и учитывая, что при $\mu = 2m\pi/N$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{in\mu} \cos^m \alpha_n = 0 \text{ и } \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\mu} \sin \alpha_n \cos^{m-1} \alpha_n = 0,$$

получим, что первый интеграл в уравнении (11) I_1 имеет порядок $I_1 = O(z^{-v})$ при $|z| \rightarrow \infty$, где

$$(12) \quad v = \begin{cases} 2N, & \mu = 0, \\ \mu N/\pi, & 0 < \mu \leq \pi, \\ N(2 - \mu/\pi), & \pi < \mu < 2\pi. \end{cases}$$

Тогда можно видеть, что и κ_j имеет тот же порядок на бесконечности:

$$(13) \quad \kappa_j = O(z^{-v}) \text{ при } |z| \rightarrow \infty, j = 1, 2.$$

Отсюда следует выполнение условия затухания скоростей на бесконечности.

Представим $f(r, \theta)$ в виде

$$f(r, \theta) = f_1(r, \theta) + f_2(r, \theta),$$

где функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям

$$(14) \quad f_1(r, -\theta) = \overline{f_1(r, \theta)}, f_2(r, -\theta) = -\overline{f_2(r, \theta)}.$$

Это представление позволяет независимо решать задачи для f_1 и f_2 . Заметим, что функция $i f_2$ удовлетворяет первому из соотношений (14). Поэтому достаточно рассмотреть задачу для $f = f_1$. В этом случае решение удовлетворяет условиям

$$(15) \quad \gamma_r(r, -\theta) = -\overline{\gamma_r(r, \theta)}, \gamma_\tau(r, -\theta) = \overline{\gamma_\tau(r, \theta)}, \kappa_i(-\theta, -z) = -\overline{\kappa_i(\theta, z)}, j = 1, 2.$$

Условия (14), (15) позволяют решать задачу только для $z > 0$, что значительно снижает объем вычислений.

Таким образом, для определения неизвестных функций γ_r , γ_τ , κ_1 и κ_2 имеем систему уравнений (7), (10), (11) и условия (5), (13). Переход давления на лопасти Δp в линейном приближении можно представить с помощью интеграла Коши — Лагранжа в виде

$$(16) \quad \Delta p(r, \theta, t) = -i\rho\omega L e^{i\omega t} \int_{-\theta_0}^{\theta} \gamma_r \sqrt{r^2 + h^2} d\theta,$$

где ρ — плотность жидкости.

В соответствии с условиями (6) — (9) будем искать приближенное решение в виде

$$(17) \quad \gamma_r \sqrt{r^2 + h^2} = i\omega L \sum_{m=1}^{N_1} g_m(r) m \cos m\sigma / \sin \sigma;$$

$$(18) \quad \gamma_\tau = i\omega L \theta_0 \sum_{m=1}^{N_1} g'_m(r) \sin m\sigma;$$

$$(19) \quad \alpha_h = i\omega L \sum_{q=0}^{N_3} h_q^{(h)}(z) e^{i(qN+n)\theta}, \quad k = 1, 2,$$

где $g_m(r)$, $h_q^{(h)}(z)$ — безразмерные комплексные функции; $g'_m(r)$ — производная g_m ; $n = \mu N/2\pi$; N_1 и N_3 — целые числа, а σ — новая переменная, связанная с θ соотношением

$$(20) \quad \theta = \theta_0 \cos \sigma.$$

Функции $g_m(r)$ будем аппроксимировать следующим образом. Интервал $[r_1, r_2]$ разделим на N_2 равных частей и на каждом участке $[r_{k-1}, r_k]$ представим функцию $g_m(r)$ в виде квадратичного полинома с комплексными коэффициентами

$$(21) \quad g_m(r) = \frac{1}{2} a_{km} (r - r_{k-1})^2 + b_{km} (r - r_{k-1}) + c_{km}, \quad r_{k-1} < r < r_k.$$

Требуя гладкости функций $g_m(r)$, $g'_m(r)$ и выполнения условия (9), можно исключить $2N_1N_2$ коэффициентов a_{km} , b_{km} .

Тогда неизвестными остаются N_1N_2 коэффициентов. Функции $h_q^{(h)}(z)$ при $|z| > H$, где H — достаточно большое число, разложим по отрицательным степеням z , а при $|z| < H$ представим линейной комбинацией полиномов Чебышева T_l

$$h_q^{(h)}(z) = \begin{cases} z^{-v} \sum_{l=0}^2 A_{ql}^{(h)} z^{-l}, & z > H, \\ \sum_{l=0}^{N_4} B_{ql}^{(h)} T_l(z/H), & |z| < H, \\ z^{-v} \sum_{l=0}^2 C_{ql}^{(h)} z^{-l}, & z < -H, \end{cases}$$

где v определяется формулой (12); $A_{ql}^{(h)}$, $B_{ql}^{(h)}$, $C_{ql}^{(h)}$ — комплексные коэффициенты.

Требуя гладкости функций $h_q^{(h)}(z)$ вплоть до вторых производных, коэффициенты $A_{ql}^{(h)}$ и $C_{ql}^{(h)}$ можно выразить через $B_{ql}^{(h)}$. В результате получим $2(N_3 + 1)$ ($N_4 + 1$) неизвестных комплексных коэффициентов. Решение вида (17) — (19) удовлетворяет условиям бесциркуляционности течения и затухания на бесконечности. Выполняя условия непротекания в контрольных точках на лопасти

$$r_k^* = (r_{k-1} + r_k)/2, \quad \sigma_j^* = (2j - 1)\pi/2N_1, \\ k = 1, 2, \dots, N_2, \quad j = 1, 2, \dots, [(N_1 + 1)/2]$$

и на цилиндрах

$$\theta_l^* = \frac{\pi(2l + 1)}{N(N_3 + 1)}, \quad z_a^* = H \cos(\pi q/N_4),$$

$$l = 0, 1, \dots, N_3, q = 0, 1, \dots, [N_4/2],$$

получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Предложенный алгоритм был реализован численно на ЭВМ БЭСМ-6. Основную трудность при расчете матрицы системы составляет вычисление двойных сингулярных интегралов. Можно показать, что если точка (r^*, θ^*, z^*) не лежит на границе лопасти, то эти сингулярные интегралы, взятые по полосе $\Pi_\varepsilon = \{(r, \theta) : |\theta - \theta^*| < \varepsilon\}$, стремятся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, двойной сингулярный интеграл по лопасти можно свести к повторному. При этом интегрирование по r в силу представления (21) можно выполнить аналитически. В результате двойной сингулярный интеграл в уравнении (10) сводится к одномерному вида

$$\int_0^\pi \left\{ \frac{C_1(r^*)}{\psi - \theta} + C_2(r^*) \ln |\psi - \theta| + K(\psi - \theta) \right\} \cos m\sigma d\sigma,$$

где $C_1(r^*)$, $C_2(r^*)$ — коэффициенты при особенностях; $K(\psi - \theta)$ — регуляяная функция. Сингулярные интегралы в этом выражении вычисляются аналитически. Что касается регуляяных интегралов от осциллирующих функций, то их можно вычислить по формулам Филона [5].

Из формул (16), (17) получим для перепада давления на лопасти формулу

$$(22) \quad \Delta p = \rho \omega^2 L^2 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{N_1} g_m(r) \sin m\sigma.$$

Таким образом, функции $g_m(r)$ определяют распределение нагрузки по размаху.

Пусть закон колебаний лопасти имеет вид

$$w(r, \theta, t) = \tilde{L} \sum_{k=1}^{N_0} q_k(t) f_k(r, \theta),$$

где $q_k(t)$ — безразмерные обобщенные координаты; $f_k(r, \theta)$ — формы колебаний; N_0 — число обобщенных координат.

Обобщенные гидродинамические силы, действующие на лопасти, вычисляются по формуле

$$(23) \quad Q_k(t) = \iint_{S_0} \Delta p(r, \theta, t) f_k(r, \theta) ds.$$

Подставляя в (23) выражение (22) для перепада давления, получим

$$Q_k(t) = \rho L^4 \theta_0^2 \sum_{j=1}^{N_0} M_{kj} \ddot{q}_j(t),$$

где M_{kj} — коэффициенты присоединенных масс, которые в общем случае являются комплексными, а при $\mu = 0$, π — действительными.

Представим присоединенные массы в виде

$$M_{kj} = \int_{r_1}^{r_2} m_{kj}(r) dr.$$

Здесь $m_{kj}(r)$ — погонные присоединенные массы в сечении $r = \text{const}$;

$$(24) \quad m_{kj}(r) = \sqrt{r^2 + h^2} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \Delta p(r, \theta, t) f_k(r, \theta) d\theta.$$

Исследовались присоединенные массы для следующих форм колебаний:

$$f_k(r, \theta) = (r - r_1)^q \cos l\sigma, \quad k = 1, 2, \dots, 9, \quad q, \quad l = 0, 1, 2,$$

где $k = 3q + l + 1$, θ и σ связаны соотношением (20). Подставляя в (24) выражение (22) для перепада давления, получим

$$(25) \quad m_{kj}(r) = \frac{\pi}{2} G_l^{(j)}(r) \times \sqrt{r^2 + h^2} (r - r_1)^q,$$

где $l = [k/3]$, $q = k - 1 - 3l$,

$$G_l^{(j)}(r) = \begin{cases} 2g_1^{(j)}(r), & l = 0, \\ g_2^{(j)}(r), & l = 1, \\ g_3^{(j)}(r) - g_1^{(j)}(r), & l = 2. \end{cases}$$

Здесь $g_l^{(j)}(r)$ — амплитудные функции давления, вычисленные для форм колебаний f_j .

В качестве примеров были рассмотрены две решетки лопастей с большим и малым удлинением. Первая решетка имеет следующие параметры: $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $\theta_0 = 0,7$, $N = 6$. В этом случае удлинение $\lambda = 0,39$, густота и угол выноса в среднем сечении равны соответственно $\tau = 1,6$, $\beta = -56^\circ$.

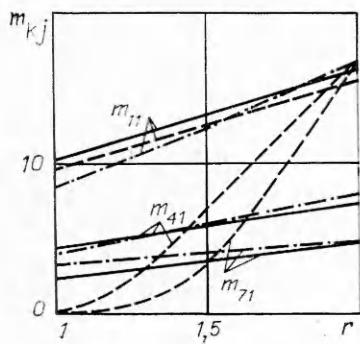
Оказалось, что для лопастей с малым удлинением функции g_m почти не зависят от радиуса, т. е. давление на лопасти выравнивается по размаху. В таблице приведены для примера значения функций $g_m(r)$ для формы колебаний $f_4 = r - r_1$ и сдвига фазы $\mu = 2\pi/3$.

Расчет присоединенных масс в этом случае можно проводить с помощью теории плоских решеток в среднем сечении $r_0 = (r_1 + r_2)/2$ и для осредненного по радиусу закона колебаний

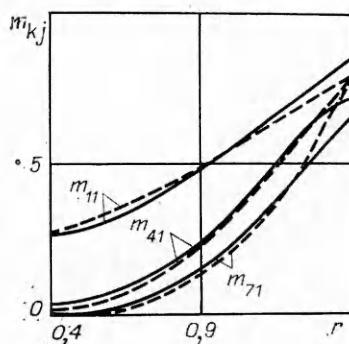
$$f_0(\theta) = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta) dr,$$

а затем они вычисляются в каждом сечении с помощью формул (25). Этот же вывод был установлен для прямой решетки пластин в случае малых удлинений и малых чисел Струхала [6].

Для иллюстрации на фиг. 2 приведены сплошной линией значения трех коэффициентов присоединенных масс m_{11} , m_{41} , m_{71} в зависимости от радиуса. Там же приведены соответствующие значения, вычисленные по гипотезе цилиндрических сечений (штриховая линия) и по осредненному закону колебаний (штрихпунктир). Для коэффициента m_{11} с формой колебаний, не зависящей от радиуса, все три кривые хорошо согласуются между собой. Для коэффициентов m_{41} , m_{71} форма колебаний зависит от радиуса соответственно по линейному и квадратичному законам. В этом случае



Фиг. 2



Фиг. 3

гипотеза цилиндрических сечений дает большое отклонение. Аналогичная картина наблюдается и для других коэффициентов присоединенных масс.

Для второй решетки с параметрами $r_1 = 0,4$, $r_2 = 1,4$, $\theta_0 = 0,74$, $h = 0,9$, $N = 30$ удлинение $\lambda = 5,4$, густота и угол выноса в среднем сечении равны соответственно $\tau = 1$, $\beta = 45^\circ$. В этом случае гипотеза цилиндрических сечений дает хорошее приближение к результатам пространственной теории. На фиг. 3 показана зависимость коэффициентов присоединенных масс m_{11} , m_{41} , m_{71} от радиуса для сдвига фазы $\mu = 2\pi/15$.

Вопрос о сходимости метода решался на основе численного эксперимента путем сравнения результатов при возрастающих значениях H и N_i ($i = 1, \dots, 4$). Было установлено, что для лопастей с малым удлинением результаты расчетов практически не зависят от величины H . Уже при $N_1 = N_2 = 4$, $N_3 = N_4 = 3$ дальнейшее увеличение N_i ($i = 1, \dots, 4$) приводит к изменению результатов в третьем знаке.

Для лопастей с большим удлинением давление существенно меняется по размаху, поэтому сходимость несколько хуже. В этом случае для получения достаточной точности число N_2 разбиений по радиусу следует увеличить. Например, для решетки с $\lambda = 5$, $\tau = 1$ при $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N_3 = N_4 = 3$ дальнейшее увеличение N_i ($i = 1, \dots, 4$) приводит к изменению результатов в третьем знаке.

В заключение следует отметить, что при расчете присоединенных масс гипотеза цилиндрических сечений дает хорошие результаты для лопастей с большим удлинением, а также приемлема для лопастей с малым удлинением в случае, когда форма колебаний не зависит от радиуса, и что в общем случае для лопастей с малым удлинением рекомендуется использовать метод среднего сечения, который хорошо согласуется с пространственной теорией.

Поступила 6 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэrodинамики. М.: Наука, 1966.
2. Самойлович Г. С. Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. М.: Наука, 1969.
3. Горелов Д. Н. Присоединенные массы решетки пластин в несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2.
4. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. М.: ИЛ, 1958.
5. Бахвалов Н. С. Численные методы. М.: Наука, 1976.
6. Горелов Д. Н., Курзин В. Б., Сарен В. Э. Аэродинамика решеток в нестационарном потоке. Новосибирск: Наука, 1971.

УДК 532.032 + 532.527

ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕВОЙ ПАРЫ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

П. И. Гешев, Б. С. Ездин

(Новосибирск)

1. **Введение.** Кроме гидродинамики идеальной жидкости [1, 2], понятие точечных вихрей используется в теории сверхтекущего гелия [3], а также в модели сильно замагнитной плазмы, где поведение электронов и ионов математически эквивалентно вихревому движению [4]. Хотя в реальных явлениях, происходящих в сплошной среде, всегда присутствуют эффекты диссипации энергии, существует большой класс задач, где этими эффектами можно пренебречь. Это справедливо для любой вихревой системы, рассматриваемой на коротких временных интервалах. В жидкости гелий при температурах, близких к абсолютному нулю, диссипацией энергии вообще можно пренебречь и систему квантовых вихрей рассматривать как идеальную [3]. Интересным является вопрос интегрируемости уравнений движения вихрей. В n -мерном фазовом пространстве движение происходит по многообразию размерности $n-k$, где k — число интегралов динамической системы. Необходимое условие стохастичности движения $n-k > 2$ [5]. В [6, 7] показано, что задача трех вихрей в неограниченном простран-