

В заключение мы проиллюстрируем возможность визуализации поля давления на примере обтекания профиля Жуковского. Условия голографирования: тарировочное статическое давление 1 атм, угол атаки 10° , перепад давлений при обдуве модельного препятствия $1,07 \div 1,00$ атм. В области передней кромки крылового профиля наблюдается повышенное давление, которое распространяется далее на нижнюю поверхность, в то время как давление у верхней поверхности значительно меньше (фиг. 4, а). Именно этот перепад давлений создает подъемную силу, действующую на крыло. Для сравнения рядом приведен расчетный профиль давлений на верхней 1 и нижней 2 поверхностях модели [9] (фиг. 4, б).

Авторы признательны Г. П. Свищеву, отметившему важность разработки методов «панорамной» и объемной регистрации полей давления в движущейся сплошной среде.

Поступила 21 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Петунин А. М. Методы и техника измерений параметров газового потока. М., «Машиностроение», 1972.
2. Пенкхерст Р., Холдер Д. Техника эксперимента в аэродинамических трубах. М., ИЛ, 1955.
3. Захарьевский А. Н. Интерферометры. М., 1952.
4. Emmerling R, Meier G. E. A., Dinkelacker A. Investigation of the instantaneous structure of the wall pressure under a turbulent boundary layer flow. Mitt. MPI Strömungsforsch. u. Aerodyn. Versuchsanst., Göttingen, 1974, N 131.
5. Thompson D. H., Tanner L. H. An optical interference manometer.—*J. o Scient. Instrum.*, 1969, vol. 2, s. 2.
6. Кольер Р. Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. М., «Мир», 1973.
7. Вайнберг Д. В. Пластины, диски, балки-стенки. Киев, ГИЛСА, 1959.
8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Мир», 1968.

УДК 532.516

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

В. П. Шидловский

(Москва)

Задача об установившемся ламинарном движении несжимаемой вязкой жидкости под воздействием неограниченного диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью, была впервые сформулирована и приближенно решена Карманом [1]. Решение этой задачи, построенное для уравнений Навье — Стокса, обладает в то же время рядом особенностей, характерных для течений в пограничных слоях. Нетрудно установить, например, что решению Кармана соответствует конечная толщина вытеснения, не зависящая от радиальной координаты, можно ввести и другие толщины, определяемые в теории пограничного слоя. С учетом этого при решении задачи Кармана и ее модификаций [2—6] применяются многие методы теории пограничного слоя.

В свое время делались попытки построения решения, аналогичного решению Кармана, для более общего случая сжимаемой вязкой и теплопроводной жидкости [7, 8]. В частности, в работе [7] течение газа под воздействием вращающегося диска с постоянной температурой поверхности рассмотрено

в приближении пограничного слоя. Однако построение высших приближений к решению полной задачи, определяемых по методу срачиваемых асимптотических разложений [9], выявляет наличие секулярных членов, пропорциональных все более высоким степеням радиальной координаты, что свидетельствует о расхождении приближений. Таким образом, выясняется, что в случае постоянной температуры поверхности задача о неограниченном диске, вращающемся в газе, не имеет решения в приближении пограничного слоя и при любых значениях характерных параметров требует для своего описания полных уравнений Навье — Стокса.

Чтобы иметь возможность применить к решению задачи о диске в сжимаемой жидкости метод возмущений, следует видоизменить постановку задачи, полагая температуру поверхности переменной по радиусу. Исходя из предположения о том, что радиальное изменение температуры подчиняется степенному закону, ниже проводится преобразование исходной системы уравнений Навье — Стокса к безразмерной форме, наиболее удобной для перехода к уравнениям пограничного слоя. Показано, что такой переход возможен лишь для квадратичного закона изменения температуры по радиусу, когда существует автомодельное решение полных уравнений Навье — Стокса. Вводя в рассмотрение малый параметр ε , аналогичный $Re^{-1/2}$ в задачах обтекания, и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем корректный вариант уравнений пограничного слоя в газе на вращающемся диске. Исследование этих уравнений указывает на наличие некоторых особенностей такого пограничного слоя, не встречающихся в обычных пограничных слоях. Например, выясняется, что решение уравнений пограничного слоя может существовать, если вне пограничного слоя имеет место адиабатическое движение определенного класса с давлением и температурой, переменными по радиусу, и с постоянной угловой скоростью вращения всей массы газа. Анализируются также особенности затухания возмущений по мере удаления от поверхности, приводятся результаты численного расчета параметров течения в пограничном слое для некоторого конкретного примера.

1. Пусть в плоскости $z=0$ располагается диск бесконечно большого радиуса, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω . Полупространство над диском заполнено вязким теплопроводным газом, имеющим постоянные удельные теплоемкости c_p и c_v , постоянное число Прандтля σ , с уравнением состояния в форме Клапейрона и со степенной зависимостью вязкости от температуры. Под воздействием вращения диска газ приводится в движение, и, считая это движение установившимся и осесимметричным, для его описания воспользуемся уравнениями Навье — Стокса, в цилиндрической системе координат имеющими форму

$$(1.1) \quad \frac{\partial (r\rho v_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r\rho v_z)}{\partial z} = 0; \quad p = (\kappa - 1)\rho\varepsilon; \quad \mu = Ae^n;$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \mu \left[3 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] + 2\mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right),$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \right] + 2\mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right);$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} \right] \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right];$$

$$\rho \left(v_r \frac{\partial e}{\partial r} + v_z \frac{\partial e}{\partial z} \right) + p \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\kappa}{\sigma} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\mu \frac{\partial e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial e}{\partial z} \right) \right] + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{v_r^2}{r^2} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)^2 \left\} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2,$$

где $\kappa = c_p/c_v$, $e = c_v T$ — внутренняя энергия; A , n — постоянные параметры, остальные обозначения совпадают с общепринятыми.

Чтобы иметь возможность рассмотреть некоторый класс задач с различными граничными условиями, предположим, что на выбранной нами характерной поверхности температура, давление и плотность подчиняются следующим законам:

$$(1.2) \quad e_* \equiv c_v T_* = B_T r^k; \quad p_* = (\kappa - 1) B_T B_\rho r^{kn}; \quad \rho_* = B_\rho r^{k(n-1)},$$

где B_T , B_ρ и k — заданные константы. Выбор показателя степени в законе изменения p_* обусловлен тем, чтобы конвективный член уравнения энергии из системы (1.1) имел тот же порядок по r , что и член с теплопроводностью.

Из (1.2), (1.1) можно получить выражение характерной кинематической вязкости

$$v_* = AB_T^n B_\rho^{-1} r^k,$$

после чего характерное число Рейнольдса представляется в виде

$$(1.3) \quad \text{Re} = \frac{\omega r^2}{v_*} = \varepsilon^{-2} r^{2-k}, \quad \varepsilon = \left(\frac{AB_T^n}{\omega B_\rho} \right)^{1/2},$$

где для удобства записи введена величина ε , в общем случае размерная.

Преобразуем систему уравнений (1.1) к безразмерной форме, пользуясь при этом формулами (1.2), (1.3). Как видно из (1.3), роль характерной длины играет здесь радиальная координата r , а масштабы длин и скоростей в осевом направлении следует выбрать так, как это делается в теории пограничного слоя, т. е.

$$z_* = \frac{r}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{v_*}{\omega}} = \varepsilon r^{k/2};$$

$$v_{z*} = \frac{\omega r}{\sqrt{\text{Re}}} = \varepsilon \omega r^{k/2}.$$

После преобразования формулы имеют вид

$$(1.4) \quad r = \varepsilon^{\frac{2}{k-2}} \xi^{k-2}; \quad z = \varepsilon r^{k/2} \vartheta; \quad v_r = \omega r F;$$

$$v_\theta = \omega r G; \quad v_z = \varepsilon \omega r^{k/2} N; \quad e = B_T r^k Q;$$

$$p = (\kappa - 1) B_T B_\rho r^{kn} P; \quad \rho = B_\rho r^{k(n-1)} D;$$

$$\mu = B_\rho \omega \varepsilon^2 r^{kn} Q^n,$$

где F , G , N , Q , P , D — функции двух новых аргументов ξ и ϑ . Для сокращения записи введем символ дифференциального оператора

$$(1.5) \quad \Delta^* = -\frac{k}{2} \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{k-2}{2} \xi \frac{\partial}{\partial \xi}$$

и обозначение $\gamma = B_T \omega^{-2}$. Подстановка формул (1.4) в уравнения (1.1) дает

$$(1.6) \quad P = QD, \quad (kn - k + 2) DF + \Delta^*(DF) + \partial(DN)/\partial\vartheta = 0;$$

$$D(F^2 - G^2 + F \cdot \Delta^*F + N \partial F / \partial \vartheta) = -(\kappa - 1) \gamma \varepsilon^{-2} \xi^2 (knP +$$

$$+ \Delta^*P) + \frac{2}{3} \xi^2 (kn + \Delta^*) [Q^n (F + 2 \cdot \Delta^*F - \partial N / \partial \vartheta)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[Q^n \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \xi^2 \cdot \Delta^* N \right) \right] + 2\xi^2 Q^n \cdot \Delta^* F; \\
D \left(2FG + F \cdot \Delta^* G + N \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right) & = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(Q^n \cdot \frac{\partial G}{\partial \vartheta} \right) + \xi^2 (kn + \Delta^*) \times \\
& \times (Q^n \cdot \Delta^* G) + 2\xi^2 Q^n \cdot \Delta^* G; \\
D (F \cdot \Delta^* N + N \partial N / \partial \vartheta) & = -(\kappa - 1) \gamma \varepsilon^{-2} \partial P / \partial \vartheta + \\
& + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[Q^n \left(2 \frac{\partial N}{\partial \vartheta} - 2F - \Delta^* F \right) \right] + \left(kn - \frac{k}{2} + 2 + \Delta^* \right) \times \\
& \times \left[Q^n \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \xi^2 \cdot \Delta^* N \right) \right]; \\
D [F (k + \Delta^*) Q + N \partial Q / \partial \vartheta] & + (\kappa - 1) P (2F + \Delta^* F + \partial N / \partial \vartheta) = \\
= \frac{\kappa}{\sigma} \xi^2 \{ (kn + k + \Delta^*) [Q^n (k + \Delta^*) Q] \} & + \frac{\kappa}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(Q^n \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \right) + \\
+ \gamma^{-1} \varepsilon^2 Q^n \{ 2 [(F + \Delta^* F)^2 + F^2 + (\partial N / \partial \vartheta)^2] & + \xi^{-2} (\partial G / \partial \vartheta)^2 + \\
+ \xi^{-2} \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \xi^2 \cdot \Delta^* N \right)^2 + (\Delta^* G)^2 - \frac{2}{3} & \left[(2 + \Delta^*) F + \frac{\partial N}{\partial \vartheta} \right]^2 \}.
\end{aligned}$$

Сравнивая формулы (1.3), (1.4), можно видеть, что $\xi = \text{Re}^{-1/2}$. Если предположить, что условия данной задачи позволяют распространить на нее те принципы, которые соблюдаются при внешнем обтекании, то предельный переход $\xi \rightarrow 0$ должен был бы привести к превращению уравнений (1.6) в уравнения пограничного слоя на поверхности вращающегося диска. Однако такой предельный переход проходит безболезненно не для всех уравнений системы (1.6). Обращаясь к последнему уравнению этой системы (уравнению энергии), можно увидеть, что формально главным членом этого уравнения при $\xi \rightarrow 0$ следует считать диссипативный член, содержащий множитель ξ^{-2} . Но предположение о преобладающей роли диссипации не может иметь физического обоснования, а с точки зрения математики, в таком случае следовало бы отбросить все члены со старшими производными, что привело бы к невозможности решения краевых задач. Возникающее таким образом противоречие свидетельствует лишь об одном: в общем случае движения вязкого и теплопроводного газа под воздействием вращающегося диска неограниченных размеров невозможно добиться упрощения математического описания задачи за счет перехода к уравнениям пограничного слоя, и каков бы ни был режим движения, в потоке всегда найдется такая область, для исследования которой нужно использовать полные уравнения Навье — Стокса.

Проведенное выше рассуждение справедливо как для случая постоянной температуры поверхности диска ($k=0$), так и для любого степенного закона, соответствующего формулам (1.2) при $k \neq 2$. Случай $k=2$ является особым и не только приводит к ряду упрощений, но и позволяет устранить упомянутое выше противоречие. Действительно, из (1.3) видно, что при $k=2$ число Рейнольдса превращается в константу $\text{Re} = \varepsilon^{-2}$, так что $\xi \equiv \varepsilon$, а дифференциальный оператор (1.5) вырождается при этом в обыкновенный

$$(1.7) \quad (\Delta^*)_{k=2} = -\vartheta d/d\vartheta,$$

и, следовательно, система (1.6) становится системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Но самое важное свойство уравнений (1.6)

при $k=2$ состоит в том, что переход $\xi \rightarrow 0$ дает в этом случае $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon/\xi \rightarrow 1$, в результате чего диссипативный член уравнения энергии оказывается имеющим тот же порядок, что и член с теплопроводностью, и никаких противоречий при переходе от уравнений Навье — Стокса к уравнениям пограничного слоя уже не возникает.

2. Рассмотрим более подробно тот вариант движения вязкого газа над вращающимся диском, когда температура поверхности меняется в радиальном направлении по квадратичному закону, т. е. когда пригодны формулы (1.2) с частным значением $k=2$. Нужно отметить, что температурный пограничный слой у диска в несжимаемой жидкости исследовался в работе [10] для произвольного закона изменения температуры по радиусу, а специальный случай квадратичного закона рассматривался в [11]. Изучая движение сжимаемого газа, В. В. Сычев [12] указал на возможность уменьшения числа аргументов задачи о неустановившемся движении под воздействием вращающейся конической поверхности при линейном законе зависимости вязкости от температуры и при квадратичном законе радиального распределения температуры. Таким образом, в случае $n=1$ этот вывод распространяется и на рассматриваемую здесь задачу, чем подтверждается возможность получения автомоделльного решения, отмеченная в п. 1.

Не налагая ограничений на величину n , воспользуемся общими безразмерными уравнениями (1.6), где следует лишь положить $k=2$, $\xi \equiv \varepsilon$ и считать оператор Δ^* выраженным, согласно (1.7). Предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ позволяет получить уравнения пограничного слоя на диске, вращающемся в газе (штрихом обозначается дифференцирование по ϑ):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} 2nDF - \vartheta(DF)' + (DN)' &= 0; \quad P = QD; \\ D(NF' - \vartheta FF' + F^2 - G^2) &= -(\kappa - 1)\gamma 2nP + (Q^n F)'; \\ D(NG' - \vartheta FG' + 2FG) &= (Q^n G)'; \quad P' = 0; \\ D(NQ' - \vartheta FQ' + 2FQ) + (\kappa - 1)P(2F - \vartheta F' + N') &= \\ &= \frac{\kappa}{\sigma} (Q^n Q)' + \frac{1}{\gamma} Q^n (F'^2 + G'^2). \end{aligned}$$

Прежде чем сформулировать граничные условия, следует заметить, что для уравнений (2.1) нельзя получить решение с условиями $P(\infty) = Q(\infty) = 0$, так как условие постоянства функции P поперек слоя приводит к тривиальным и физически бессмысленным выражениям $P \equiv 0$ и $Q \equiv 0$. Но если $P = P(\infty) \neq 0$, то на бесконечном удалении от диска функция $G(\vartheta)$ должна стремиться к некоторому постоянному пределу, т. е. вдалеке от поверхности должно существовать вращательное движение газа с определенной постоянной угловой скоростью.

С учетом сделанного замечания граничные условия для решения задачи о пограничном слое на диске можно представить в виде

$$(2.2) \quad \begin{aligned} G(0) &= 1; \quad F(0) = N(0) = 0; \\ Q(\infty) &= 1; \quad P(\infty) = 1; \quad F(\infty) = 0; \\ G(\infty) &= \sqrt{2n(\kappa - 1)\gamma} = U. \end{aligned}$$

При таком задании граничных условий значение $Q(0) = Q_w$, характеризующее распределение температуры по поверхности диска, будет найдено в процессе решения.

Форма уравнений (2.1) может быть упрощена в случае $n=1$, если ввести вместо ϑ новый аргумент

$$\zeta = \int_0^{\theta} D d\theta$$

и обозначить

$$W = D(N - \theta F).$$

В результате получим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} 3F + W' &= 0; \quad QD = 1; \\ WF' + F^2 - G^2 &= -QU^2 + F''; \\ WG' + 2FG &= G''; \\ \kappa WQ' + 2FQ &= \frac{\kappa}{\sigma} Q'' + \frac{2(\kappa - 1)}{U^2} (F'^2 + G'^2). \end{aligned}$$

Граничные условия (2.2) остаются в прежнем виде, в них следует лишь положить $n=1$ и заменить N на W .

Система уравнений (2.3) очень похожа на уравнения, описывающие движение несжимаемой жидкости под воздействием вращающегося диска [2]. Основное отличие системы (2.3) состоит в том, что уравнение энергии не может быть отделено от уравнений движения и уравнения неразрывности, т. е. тепловой пограничный слой не может рассматриваться отдельно от динамического, что и следует ожидать при изучении движения и теплопередачи в сжимаемом газе.

Исследуем асимптотическое поведение решения уравнений (2.3) при $\zeta \rightarrow \infty$. Будем считать, что $W(\infty) = -c$, полагая тем самым, что, как и в случае несжимаемой жидкости, вдалеке от поверхности имеет место подсос жидкости в направлении к диску, компенсирующий унос массы в радиальном направлении за счет действия центробежных сил инерции. Асимптотические формулы для основных переменных могут быть записаны в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} F &= C_1 e^{-b\zeta}; \quad G = U + C_2 e^{-b\zeta}; \\ W &= -c + \frac{3}{b} C_1 e^{-b\zeta}; \quad Q = 1 + C_3 e^{-b\zeta}. \end{aligned}$$

Подстановка (2.4) в уравнения (2.3) приводит к алгебраическим соотношениям для коэффициентов C_i , позволяющим получить нетривиальное решение только при декременте затухания b , удовлетворяющем уравнению

$$(2.5) \quad (b^2 - bc)^2 = U^2 \left(\frac{2\sigma}{\kappa} \frac{b - c}{b - \sigma c} - 4 \right).$$

Решение уравнения (2.5) не удается представить в аналитической форме при произвольных κ , σ и U . Очевидно, что случай $\sigma=1$ и $\kappa > 0,5$ является особым, так как в этом случае уравнение (2.5) не имеет действительных корней. Можно показать, что одна из двух имеющихся пар комплексно-сопряженных корней обязательно имеет положительную вещественную часть и, следовательно, исследуемая система (2.3) имеет затухающие на бесконечности решения, но характер затухания оказывается при этом колебательным.

Покажем, что в общем случае произвольного числа Прандтля уравнение (2.5) при любых действительных и отличных от нуля значениях U и c

имеет по меньшей мере один положительный корень. Для этого введем

$$S = (b - c)/(b - \sigma c)$$

и заменим в уравнении (2.5) неизвестную b на s . Получим

$$(2.6) \quad \Phi(s) = 0;$$

$$\Phi = (\sigma s - 1)^2 s^2 - B^2 (s - 1)^4 (s - 2\kappa\sigma^{-1});$$

$$B^2 = \frac{2\kappa}{\sigma} \frac{U^2}{(1 - \sigma)^2 c^2}.$$

Необходимо найти действительный корень уравнения (2.6), удовлетворяющий условию $s > 2\kappa\sigma^{-1}$, так как при невыполнении этого условия возникает та же ситуация, что и при $\sigma = 1$. Такой корень обязательно будет у уравнения типа (2.6), имеющего при указанном ограничении два существенно положительных слагаемых, второе из которых имеет множитель -1 , обращается в нуль в начальной точке рассматриваемого интервала, но возрастает по абсолютной величине быстрее первого слагаемого, так как содержит более высокую степень s . Найдя корень s_1 , можно найти и соответствующий декремент b_1 , однозначно связанный с s_1 :

$$(2.7) \quad b_1 = c(\sigma s_1 - 1)/(s_1 - 1).$$

Для обычных газов $\kappa > 1/2$, $\sigma < 1$, но тогда из уравнения (2.7) следует, что $0 < b_1 < c$. Предполагая, что функция $W(\zeta)$ монотонно уменьшается по мере возрастания ζ , следует считать коэффициент C_1 в формулах (2.4) положительным. С другой стороны, подстановка формул (2.4) в уравнения (2.3) позволяет получить, в частности,

$$(2.8) \quad C_2 = 2UC_1/(b^2 - bc).$$

Знак коэффициента C_2 определяет собой знак производной $dG/d\zeta$ вдали от поверхности. Естественно предположить, что окружная скорость газа по мере удаления от поверхности монотонно убывает и тогда $C_2 > 0$. Но с учетом ограничений $C_1 > 0$, $b > 0$, $b < c$ соотношение (2.8) дает положительное значение C_2 , только если $U < 0$. Такое нестрогое рассуждение приводит к неожиданному выводу о том, что вращательное движение газа вдалеке от поверхности диска может совершаться в направлении, противоположном вращению самого диска.

Проведенное выше качественное исследование особенностей движения вязкого газа над вращающимся диском относилось лишь к предельному режиму пограничного слоя ($\varepsilon \rightarrow 0$.) Желая рассмотреть движение при произвольных $\varepsilon < 1$, мы должны вновь обратиться к уравнениям (1.6) и воспользоваться упоминавшимся ранее методом сращиваемых асимптотических разложений [9]. При $k=2$, $\xi \equiv \varepsilon$ и с учетом (1.7) уравнения (1.6) служат основой для построения внутренних разложений, тогда как перед построением внешних разложений следует осуществить замены

$$\vartheta = \vartheta_0/\varepsilon; \quad N = N_0/\varepsilon$$

и оперировать во внешней области с переменными ϑ_0 , N_0 .

Решение краевой задачи для уравнений (2.1) с условиями (2.2) следует считать начальным приближением для внутренней области. Начальным приближением для внешней области будет вращение массы газа как твердого тела с постоянной угловой скоростью $\Omega = \omega U$, с давлением и плотностью, соответствующими формулам (1.2) с тем же значением $k=2$. По-

строение всех последующих приближений, как внутренних, так и внешних, не вызывает каких-либо принципиальных затруднений ввиду отсутствия неясностей математического или физического характера. Качественные особенности течения, выясненные в рамках теории пограничного слоя, не должны претерпеть существенных изменений и с учетом высших приближений. Следует отметить лишь необходимость модификации граничных условий за счет учета таких эффектов, как скольжение, скорость крипа и температурный скачок, пропорциональных ε или ε^2 . Более подробное исследование высших приближений в решении задачи о движении газа над вращающимся диском выходит за пределы охвата данной статьи.

3. В качестве примера был проведен численный расчет пограничного слоя на вращающемся диске для случая $n=1$, когда можно использовать более простые уравнения (2.5) с модифицированными граничными условиями (2.2). Остальные параметры приняты следующими: $\kappa=1,4$; $\sigma=0,7$; $U^2=0,09108$. Значение Q_w и знак величины $U=v_{0\infty}/(\omega r)$ определялись в процессе решения.

Метод расчета в принципе не отличается от того, что было описано в работе [13], и сводится к численному решению задачи Коши с произволом в начальных значениях, сращиваемому в некоторой точке с решением, справедливым вдали от поверхности и определяемым несколькими членами асимптотического разложения; уточнение неизвестных параметров осуществляется методом Ньютона. Тот факт, что порядок системы (2.5) выше порядка системы, решавшейся в [13], не имеет существенного значения, хотя и несколько усложняет алгоритм решения.

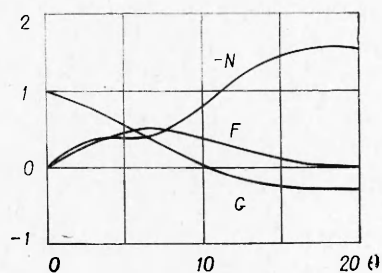
На фиг. 1, 2 показаны полученные в результате расчетов профили изменения безразмерных величин, характеризующих три компоненты скорости и температуру газа в пограничном слое. Графики подтверждают правильность выводов, сделанных ранее при качественном исследовании. В частности, при выбранной здесь величине модуля U оказалось возможным построить непрерывное решение только для $U < 0$, т. е. для случая вращательного движения массы газа вдали от диска в направлении, противоположном вращению самого диска.

В рассматриваемом случае $n=1$ плотность газа на внешней границе пограничного слоя постоянна $(B_\rho)_{n=1}=\rho_\infty$. Вычисляя при заданных выше параметрах массовый расход газа, подтекающего к диску в осевом направлении, т. е. радиальный расход массы, уносимой от центра к периферии, имеем

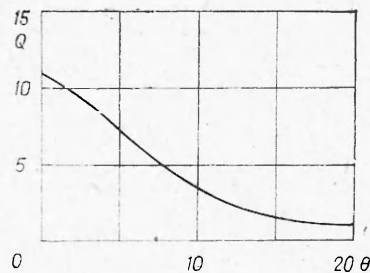
$$(3.1) \quad Q_m = 2\pi r \int_0^\infty \rho v_r dz = 2\pi r^3 \varepsilon \rho_\infty \omega \int_0^\infty F d\zeta.$$

Но в силу уравнения неразрывности

$$\int_0^\infty F d\zeta = -(1/3) W|_0^\infty = c/3$$



Фиг. 1



Фиг. 2

и из (3.1) получим

$$(3.2) \quad Q_m = 1,0497 \pi r^3 \omega \rho_\infty \varepsilon.$$

Напряжение трения на поверхности диска выражается зависимостью

$$\tau_w = - \left(\mu \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)_w = - AB_T r^2 \omega \varepsilon^{-1} G' (0).$$

Коэффициент момента сил трения представляется в форме

$$(3.3) \quad C_m = \frac{2\pi \int_0^r r^2 \tau_w dr}{(1/2) \rho_\infty \omega^2 r^5} = - \frac{4\pi}{5} \varepsilon G' (0) = 2,6777 \varepsilon.$$

Аналогично этому поток тепла от поверхности диска к газу равен

$$q_w = - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_w = - \frac{\kappa}{\sigma} AB_T^2 r^3 \varepsilon^{-1} Q' (0).$$

Число Нуссельта (интегральная характеристика теплопередачи) представляется выражением

$$(3.4) \quad Nu = \frac{r \int_0^r 2\pi r q_w dr}{\pi r^2 [(\lambda T)_w - (\lambda T)_\infty]} = - \frac{2}{5\varepsilon} \frac{Q' (0)}{Q_w^2 - 1} = 0,01238 \frac{1}{\varepsilon}.$$

Сравнение формул (3.1)–(3.4) с аналогичными выражениями для случая вращения диска в несжимаемой жидкости [2] свидетельствует о том, что учет сжимаемости не изменяет структуры представления интегральных характеристик движения и теплопередачи.

Поступила 24 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman T. Laminaire und Turbulente Reibung. ZAMM, 1921, Bd 1, S. 235.
2. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
3. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
4. Millsaps K., Pohlhausen K. Heat transfer by laminar flow from a rotating plate. — «J. Aeronaut. Sci.», 1952, vol. 19, N 2, p. 120.
5. Сычев В. В. О движении вязкой электропроводной жидкости под действием вращающегося диска в присутствии магнитного поля. — ПММ, 1960, т. 24, № 5, с. 906.
6. Шидловский В. П. Исследование движения вязкой электропроводной жидкости, вызванного вращением диска, при наличии осевого магнитного поля. — «Магнит. гидродинамика», 1966, № 1, с. 93.
7. Шидловский В. П. Ламинарный пограничный слой на неограниченном диске, вращающемся в газе. — ПММ, 1960, т. 24, № 1, с. 161.
8. Ostrach S., Thornton J. D. Compressible laminar flow and heat transfer about rotating isothermal disc. NASA Tech. Note, 1958, № 4320.
9. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
10. Davies D. R. Heat transfer by laminar flow from a rotating disk at large Prandtl numbers. Quart. — «J. Mech. Appl. Math.», 1959, vol. 12, N 1, p. 14.
11. Дорфман Л. А. Теплоотдача вращающегося диска. — «Инж.-физ. журнал», 1958, № 1, с. 3.
12. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого теплопроводного газа. — ПММ, 1961, т. 25, № 4, с. 600.
13. Cochran W. G. The flow due to a rotating disc. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1934, vol. 30, N 3, p. 365.