ЛИТЕРАТУРА

1. **Тернер Дж.** Эффекты плавучести в жидкостях.— М.: Мир, 1977.
2. **Thorpe S. A.** On the shape and breaking of finite amplitude internal gravity waves in a shear flow // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 85, pt 1.
3. **Ahmed R., Banerjee S.** Finite amplitude waves in stratified two-phase flow: transition to slug flow // AIChE J. — 1985.— V. 31, N 9.
4. **Koop C. C., McGee B.** Measurements of internal gravity waves in a continuously stratified flow // J. Fluid Mech.— 1986.— V. 172.— P. 453.
5. **Деркач М. И., Стененко А. Г.** Устойчивость сдвиговых течений в верхнем слое океана при наличии волн отрицательной энергии // Мор. гидрофиз. журн.— 1987.— № 1.
6. **Andow T., Hanawa K., Toba Y.** Experimental study of internal waves in a stratified shear flow // J. Oceanogr. Soc. Japan.— 1981.— V. 37.— P. 179.
7. **Букреев В. И.** Волны на границе раздела двух жидкостей разной плотности, генерируемые движением кругового цилиндра и симметричного крыла // ПМТФ.— 1980.— № 1.
8. **Букреев В. И., Гусев А. В., Стурова И. В.** Генерация внутренних волн при совместном поступательном и колебательном движении цилиндра в двухслойной жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 3.

Поступила 9/VI 1987 г.

УДК 532.593

АДАПТАЦИЯ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Боровиков, М. Я. Кельберт

(Москва)

1. Рассмотрим линеаризованную систему уравнений гидродинамики стратифицированной жидкости:

$$\rho_0 u_t + p_x = 0,\ p_t - \rho_0 g w + \rho_0 c^2(u_x + v_y + w_z) = 0,$$
$$\rho_0 v_t + p_y = 0,\ \rho_0 w_t + p_z + g\rho = 0, \tag{1.1}$$
$$\rho_t + w d\rho_0/dz + \rho_0(u_x + v_y + w_z) = 0.$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости; p — давление; $\rho_0 = \rho_0(z)$ — невозмущенная плотность; ρ — возмущение плотности; g — ускорение силы тяжести; c — скорость звука.

При формальном предельном переходе $c \to \infty$ (1.1) преобразуется в систему уравнений внутренних волн:

$$\rho_0 u_t + p_x = 0,\ \rho_0 v_t + p_y = 0, \tag{1.2}$$
$$\rho_0 w_t + p_z + g\rho = 0,\ u_x + v_y + w_z = 0,\ \rho_t + w d\rho_0/dz = 0.$$

Начальные данные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$ для (1.2) нельзя задавать произвольно. Кроме условия несжимаемости

$$\tilde{Q} = \tilde{u}_x + \tilde{v}_y + \tilde{w}_z = 0 \tag{1.3а}$$

они должны удовлетворять уравнению

$$\Delta\tilde{p} + g\tilde{\rho}_z - \rho_0^{-1} d\rho_0/dz\,(\tilde{p}_z + g\tilde{\rho}) = 0. \tag{1.3б}$$

Поэтому задача Коши для (1.2) требует «согласованных» начальных данных, удовлетворяющих условиям (1.3). В то же время для исходной системы (1.1) начальные данные можно задавать произвольно. Тогда при $c \gg 1$, когда решение системы (1.1) близко к решению предельной системы (1.2), а начальные данные u^c, v^c, w^c, p^c, ρ^c произвольны и не удовлетворяют условиям (1.3), должен происходить процесс «адаптации» начальных данных к этим условиям. Естественно предположить, что этот переходный процесс заключается в излучении звуковых волн, происходит на временах $\tau = L/c$ (L — характерный размер задачи) и приводит к согласованным начальным условиям $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{p}$, $\tilde{\rho}$, для которых поле скоростей делается вихревым, а давление и плотность оказываются связанными соотношением (1.3б).

Естественно также возникает вопрос о том, как определить по исходным начальным функциям согласованные данные $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\tilde{p}$. $\tilde{\rho}$. Отметим аналогию подобной постановки задачи с классической работой [1]. В задаче о геострофическом ветре установившееся движение также чисто вихревое, причем компоненты скорости и давление связаны соотношениями $u = -(2\omega_z\rho)^{-1}\partial p/\partial y$, $v = -(2\omega_z\rho)^{-1}\partial p/\partial x$, где $\omega_z = \omega_0 \sin\theta$, θ — широта. Если в какой-то области изменить гидродинамическое поле, происходит его «адаптация», сопровождающаяся излучением волн в соответствии с уравнением $\partial^2\varphi/\partial t^2 = c^2\Delta\varphi - 4\omega_z^2\varphi$ (φ — потенциал скоростей, c — скорость звука). В процессе этого излучения потенциальная часть поля «убегает», а стационарное значение функции тока $\bar{\psi}$ и соответствующее ей давление $\bar{p}$ однозначно определяются по начальным данным.

2. Дадим решение поставленной задачи для простейшего случая безграничной экспоненциальной среды $\rho_0(z) = \rho_* \exp(-\varkappa z)$. Тогда уравнения (1.1) и (1.2) сводятся к системам с постоянными коэффициентами и их решения записываются в квадратурах. При этом предположим, что начальные данные для (1.1) локализованы в некоторой области диаметра L, тогда характерное время распространения звуковых волн $\tau_c = L/c$. С другой стороны, масштаб времени для (1.2)— это период плавучести $T = 2\pi/N$ $(N = [-g\rho_0^{-1}\partial\rho_0/\partial z]^{1/2} = \sqrt{\varkappa g}$ — частота Брента — Вяйсяля). Будем полагать далее, что $\tau_c \ll T$, т. е. $c \gg L(\varkappa g)^{1/2}$.

Сформулируем основной результат работы. Разложим поле потоков жидкости $\rho_0(z)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ на потенциальную и вихревую части:

$$\rho_0\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \rho_0\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) + \rho_0\mathbf{v}_{\text{в}}(\mathbf{x}, t), \tag{2.1}$$
$$\rho_0\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{x}, t),\ \mathbf{v}_{\text{в}}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{rot}\psi(\mathbf{x}; t).$$

Это разложение отличается от обычного: необходимо, чтобы вихревым было поле скоростей $\mathbf{v}_{\text{в}}$, а потенциальным — поле потоков жидкости $\rho_0\mathbf{v}_n$. Чтобы построить разложение (2.1), запишем $\mathbf{v}_{\text{в}} = \mathbf{v} - \rho_0^{-1}\nabla\varphi$ и из условия $\operatorname{div}\mathbf{v}_{\text{в}} = 0$ получим для φ уравнение $\Delta\varphi - (\nabla\rho_0, \nabla\varphi) = \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v}$.

Условие убывания на бесконечности обеспечивает единственность решения φ. Для начальных значений $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ положим аналогично:

$$\rho_0\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = \rho_0\mathbf{v}_n^0(\mathbf{x}) + \rho_0\mathbf{v}_{\text{в}}^0(\mathbf{x}),\ \rho_0\mathbf{v}_n^0(\mathbf{x}) = \nabla\varphi^0(\mathbf{x}),\ \mathbf{v}_{\text{в}}^0(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}\psi^0(\mathbf{x}). \tag{2.1а}$$

Пусть $\tilde{p}(\mathbf{x})$ определяется по начальному значению $\rho^0(\mathbf{x})$ согласно (1.3б) и дополнительному условию $\tilde{p} \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Основной результат работы — теорема, в силу которой в процессе адаптации начальных условий поле скоростей становится чисто вихревым, а давление подстраивается под плотность.

Теорема А. *При фиксированных* t, $\mathbf{x}$ *и* $c \to \infty$ *решение системы* (1.1) *стремится к решению системы* (1.2), *удовлетворяющему «согласованным» начальным условиям*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_{\text{в}}^0(\mathbf{x}) = \operatorname{rot}\psi^0(\mathbf{x}),\ \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho^0(\mathbf{x}),\ p(\mathbf{x}, 0) = \tilde{p}(\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

Согласно теореме А, при любом сколь угодно малом $t = t_0$ можно указать такие большие значения c, чтобы поле $\mathbf{v}$, p, ρ в момент t_0 было сколь угодно близко к (2.2). Чтобы более точно описать процесс адаптации, введем «быстрое» время $\tau = ct$.

Теорема В. *При фиксированных* τ, $\mathbf{x}$ *и* $c \to \infty$ *функции* $\mathbf{v}_{\text{в}}(\mathbf{x}, \tau)$ и $\rho(\mathbf{x}, \tau)$ *стремятся к начальным функциям* $\mathbf{v}_{\text{в}}^0(\mathbf{x})$ *и* $\rho^0(\mathbf{x})$, *функция* $\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, \tau)$— *к предельному значению* $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \tau)$, *а* $p(\mathbf{x}, \tau) = cp_1(\mathbf{x}, \tau) + p_0(\mathbf{x}, \tau)$. *При фиксированном* $\mathbf{x}$ *и* $\tau \to \infty$ *функции* $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \tau)$ *и* $p_1(\mathbf{x}, \tau)$ *стремятся к нулю, а функция* $p_0(\mathbf{x}, \tau)$ — *к пределу* $\tilde{p}(\mathbf{x})$, *где* $\tilde{p}(\mathbf{x})$ *определяется по* $\rho^0(\mathbf{x})$ *в силу уравнения* (1.3б).

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Система (1.2), как известно, сводится к одному уравнению, например, для вертикальной скорости w

$$(2.3)\qquad \partial^2/\partial t^2[\Delta w - g^{-1}N^2\partial w/\partial z] + N^2\Delta_h w = 0$$

($\Delta_h = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$), требующему задания двух произвольных начальных функций. В то же время (1.2) требует задания пяти начальных функций, подчиненных двум условиям: $\operatorname{div} \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = 0$ и (1.3б), т. е. позволяет задавать произвольно три начальные функции. Куда теряется лишняя начальная функция при переходе от (1.2) к (2.3)? Дело в том, что (1.1) и (1.2), кроме акустических и внутренних волн для (1.1) и внутренних волн для (1.2), имеют еще одно решение — стационарные горизонтальные вихри. Именно, если выполнено условие $\partial u^0/\partial x + \partial v^0/\partial y = 0$, то, как легко видеть, функции $u(\mathbf{x}, t) = u^0(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x}, t) = v^0(\mathbf{x})$, $w(\mathbf{x}, t) \equiv p(\mathbf{x}, t) \equiv \equiv \rho(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ — точные решения систем (1.1) и (1.2). Чтобы отфильтровать эти вихри, можно разложить начальное поле горизонтальных скоростей на потенциальную и вихревую части, полагая $u^0(\mathbf{x}) = u^0_n(\mathbf{x}) + u^0_в(\mathbf{x})$, $v^0(\mathbf{x}) = v^0_n(\mathbf{x}) + v^0_в(\mathbf{x})$ $\left(\partial u^0_n/\partial y = \partial v^0_n/\partial x,\ \partial u^0_в/\partial x = -\partial v^0_в/\partial y\right)$. Тогда вихревая часть поля горизонтальных скоростей сохраняется, а оставшаяся потенциальная часть удовлетворяет условию $\partial u^0/\partial y = \partial v^0/\partial x$, которое можно рассматривать как третье условие согласованности для приведения задачи Коши для (1.2) из пяти уравнений к уравнению (2.3) второго порядка по t.

3. Введем функцию $Q(\mathbf{x}, t) = \operatorname{div} \mathbf{v} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$. Тогда (1.1) сведется к системе

$$(3.1)\qquad \begin{gathered}\rho_0 Q_t + \rho_0' w_t + \Delta p + g\rho_z = 0,\quad \rho_t + \rho_0' w + \rho_0 Q = 0,\\ \rho_0 w_t + p_z + g\rho = 0,\ p_t - \rho_0 g w + c^2\rho_0 Q = 0,\end{gathered}$$

решив которую можно найти $u(\mathbf{x}, t)$ и $v(\mathbf{x}, t)$ при использовании сохранения горизонтальной завихренности $\omega(\mathbf{x}, t)$: $\omega(\mathbf{x}, t) = \partial u(\mathbf{x}, t)/\partial y - \partial v(\mathbf{x}, t)/\partial x \equiv \partial u^0/\partial y - \partial v^0/\partial x = \omega^0(\mathbf{x})$, т. е. из уравнений $\partial u(\mathbf{x}, t)/\partial x + \partial v(\mathbf{x}, t)/\partial y = Q(\mathbf{x}, t) - \partial w(\mathbf{x}, t)/\partial z$, $\partial u(\mathbf{x}, t)/\partial y - \partial v(\mathbf{x}, t)/\partial x = \omega^0(\mathbf{x})$.

Переформулируем теоремы А и В в терминах системы (3.1). Для этого найдем потенциальную и вихревую части функции $w(\mathbf{x}, t)$. Из формулы (2.1) следует $\operatorname{div}(\rho_0\mathbf{v}) = \rho_0 Q + \rho_0' w = \Delta\varphi$, т. е. по известным функциям Q, w потенциал φ определяется из уравнения Пуассона $\Delta\varphi = \rho_0 Q + \rho_0' w$, откуда $\varphi = \Delta^{-1}(\rho_0 Q + \rho_0' w)$ (Δ^{-1} — интегральный оператор, обратный оператору Лапласа). Очевидно,

$$(3.2)\qquad \rho_0 w_n = \partial\varphi/\partial z = \Delta^{-1}\left[(\rho_0 Q)_z' + (\rho_0' w)_z'\right],\quad w_в = w - w_n.$$

Поэтому теоремы А, В формулируются следующим образом:

Теорема А′. *При фиксированных* t, $\mathbf{x}$ *и* $c \to \infty$ *решение системы* (3.1) *стремится к решению*

$$(3.1')\qquad \rho_0 w_t + p_z + g\rho = 0,\ \Delta p + \rho_0' w + g\rho_z = 0,\ \rho_t + w\rho_0' = 0,$$

удовлетворяющему дополнительному условию $Q = 0$ *и начальным условиям*

$$(3.3)\qquad \begin{gathered} w(\mathbf{x}, 0) = w^0(\mathbf{x}) - \rho_0^{-1}\Delta^{-1}(\rho_0 Q^0 + \rho_0' w^0)_z',\\ \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho^0(\mathbf{x}),\ p(\mathbf{x}, 0) = \tilde{p}(\mathbf{x})\end{gathered}$$

($\tilde{p}(\mathbf{x})$ *определяется как решение уравнения* (1.3б)).

Теорема В′. *При фиксированных* $ct = \tau$, $\mathbf{x}$ *и* $c \to \infty$ *функции* $w_в(\mathbf{x}, \tau)$ *и* $\rho(\mathbf{x}, \tau)$ *стремятся к начальным значениям* $w^0_в(\mathbf{x})$ *и* $\rho^0(\mathbf{x})$, *функции* $Q(\mathbf{x}, \tau)$ и $w_n(\mathbf{x}, \tau)$ — *к предельным значениям* $Q_1(\mathbf{x}, \tau)$ *и* $w_{n1}(\mathbf{x}, \tau)$, *а* $p(\mathbf{x}, \tau) = c p_1(\mathbf{x}, \tau) + p_0(\mathbf{x}, \tau)$. *При фиксированном* $\mathbf{x}$ *и* $\tau \to \infty$ *функции* $Q_1(\mathbf{x}, \tau)$,

$w_{n1}(\mathbf{x}, \tau)$, $p_1(\mathbf{x}, \tau)$ *стремятся к нулю, а* $p_0(\mathbf{x}, \tau)$ — *к функции* $\widetilde{p}(\mathbf{x})$, *определяемой как решение уравнения* (1.3б).

Для доказательства теорем A′ и B′ перейдем от (3.1) к системе с постоянными коэффициентами, полагая $p = \exp(-\varkappa z/2)\rho_* \bar{p}$, $\rho = \exp(-\varkappa z/2)\rho_* \bar{\rho}$, $(Q, w) = \exp(\varkappa z/2)(\bar{Q}, \bar{w})$. Тогда для переменных $\bar{Q}$, $\bar{w}$, $\bar{p}$, ρ получим (черта далее опускается)

$$Q_t + \Delta p - \varkappa^2 p/4 + g\rho_z + \varkappa g\rho/2 = 0,\ \rho_t - \varkappa w + Q = 0, \tag{3.4}$$
$$w_t + p_z - \varkappa p/2 + g\rho = 0,\ p_t - gw + c^2 Q = 0,$$
$$(Q, w, p, \rho)|_{t=0} = (Q^0, w^0, p^0, \rho^0).$$

Решение системы (3.4) нетрудно найти в квадратурах. Обозначим неизвестные функции Q, w, p, ρ через u_i ($i = 1, 2, 3, 4$), тогда (3.4) запишем в форме

$$Au = 0,\ u|_{t=0} = u^0, \tag{3.4′}$$

где элементы матрицы A — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Обозначим через $\mathscr{E}$ фундаментальное решение уравнения $(\det A)\varphi = 0$, т. е. обращающееся в нуль при $t < 0$ решение уравнения $(\det A)\mathscr{E} = \delta(t)\delta(\mathbf{x})$. Тогда решение системы (3.4) имеет вид

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{4} B_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)[\mathscr{E}(t, \mathbf{x}) * u_j^0(\mathbf{x})]. \tag{3.5}$$

Здесь $*$ — операция свертки по пространственным переменным; B_{ij} — алгебраические дополнения элементов A_{ij} матрицы A. Для системы (3.4) фундаментальное решение выписано в приложении (эта задача имеет и самостоятельный интерес). Воспользовавшись формулой (3.5), можно выписать решение задачи (3.4) и прямой выкладкой проверить выполнение теорем A′ и B′. Этот путь приводит, однако, к громоздким вычислениям, поэтому наметим более простое доказательство теорем A′ и B′.

Рассмотрим сначала теорему B′. В стандартных обозначениях $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \to (\omega, \alpha, \beta, \gamma)$, $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ определитель (3.4)

$$\det A = \omega^4 - c^2[\omega^2 k^2 + N^2(k^2 - \gamma^2) - \omega^2\varkappa^2/4],\ N^2 = \varkappa g - g^2/c^2. \tag{3.6}$$

Выписав соответствующие алгебраические дополнения (3.4) $B_{11} = \omega^3 + \varkappa\omega g + \omega g(\gamma - \varkappa/2)$, $B_{21} = -\varkappa\omega g(\gamma + \varkappa/2) - \omega g(k^2 - \varkappa^2/4)$, $B_{31} = -\varkappa g(k^2 - \gamma^2) - \omega^2(k^2 - \varkappa^2/4)$, $B_{41} = g^2(k^2 - \gamma^2) - g\omega^2(\gamma + \varkappa/2)$ и выражение для $Q(\mathbf{x}, \tau)$ методом Фурье через преобразования Фурье $Q^0(\mathbf{k})$, $w^0(\mathbf{k})$, $p^0(\mathbf{k})$, $\rho^0(\mathbf{k})$ начальных данных, а также учитывая, что замена $\tau = ct$ отвечает замене $\xi = \omega/c$, находим

$$\lim_{c\to\infty} Q(\mathbf{x}, \tau/c) = Q_1(\mathbf{x}, \tau) = (2\pi)^{-3}\int_{R^3} \exp\{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\} \times$$
$$\times Q^0(\mathbf{k})\cos\left((k^2 + \varkappa^2/4)^{1/2}\tau\right) d\mathbf{k},$$
$$\lim_{\tau\to\infty} Q_1(\mathbf{x}, \tau) = 0\ \ (\mathbf{k} = (\alpha, \beta, \gamma)\ \text{и}\ Q^0(\mathbf{k}) = \int_{R^3} \exp\{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\} Q^0(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}).$$

Аналогично, используя формулы для алгебраических дополнений B_{12}, B_{22}, B_{32}, B_{42} и переходя в представлении Фурье для $w(\mathbf{x}, \tau/c)$ к пределу при $c \to \infty$, а затем при $\tau \to \infty$, получим, что вертикальная скорость $w(\mathbf{x}, \tau/c)$ стремится к $\widetilde{w}(\mathbf{x}) = w^0(\mathbf{x}) + \widehat{w}(\mathbf{x})\Big(\widehat{w}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3}\int_{R^3} \exp\{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x})\} \times$

$\times (i\gamma - \varkappa/2)(k^2 + \varkappa^2/4)^{-1} Q^0(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}\Big)$, т. е. является решением уравнения

$$(\Delta - \varkappa^2/4)\widehat{w} = -(\partial/\partial z - \varkappa/2)Q^0. \tag{3.7}$$

Нетрудно проверить, что после перехода к исходным переменным уравнение (3.7) для $-\hat{w}$ совпадает с (3.2), так что $w_n(\mathrm{x}) = -\hat{w}(\mathrm{x})$ и $\tilde{w}(\mathrm{x}) = w_{\text{в}}(\mathrm{x})$.

Аналогично доказываются утверждения теоремы B′, относящиеся к предельному поведению плотности и давления. Предельное значение $\tilde{p}(\mathrm{x})$ находится по начальной плотности $\rho^0(\mathrm{x})$ как решение уравнения Пуассона $(\Delta - \varkappa^2/4)\,\hat{w} = (\partial/\partial z - \varkappa/2)\,Q^0$.

Для доказательства теоремы A′ перейдем от (3.1) к системе (3.4) с постоянными коэффициентами. Воспользовавшись символической записью, перейдем к пределу при $c \to \infty$. Тогда получим

$$
\begin{aligned}
(3.8)\qquad & Q = 0,\ w \sim (\det B)^{-1}(-\omega(\gamma - \varkappa/2)Q^0 + \omega(k^2 - \varkappa^2/4)w^0 - \\
& \quad -g(k^2 - \gamma^2)\rho^0) = (\det B)^{-1}(\omega(k^2 - \varkappa^2/4)\,\tilde{w} - g(k^2 - \gamma^2)\rho^0),\\
& \rho \sim (\det B)^{-1}(-\varkappa(\gamma - \varkappa/2)\,Q^0 + \varkappa(k^2 - \varkappa^2/4)\,w^0 + \omega(k^2 - \varkappa^2/4)\rho^0) = \\
& \quad = (\det B)^{-1}(k^2 - \varkappa^2/4)(\varkappa\tilde{w} + \omega\rho^0),\\
& p \sim (\det B)^{-1}((\varkappa g + \omega^2)Q^0 - \varkappa g(\gamma + \varkappa/2)w^0 - \omega g(\gamma + \varkappa/2)\rho^0) = \\
& = (\det B)^{-1}(\omega(k^2 - \varkappa^2/4)\tilde{p} - \varkappa g(\gamma + \varkappa/2)\tilde{w}) + Q^0/(k^2 - \varkappa^2/4) = \\
& \quad = -g(\gamma + \varkappa/2)(k^2 - \varkappa^2/4)^{-1}\rho,\ \det B = \omega^2 k^2 + N^2(k^2 - \gamma^2) - \\
& \qquad - \omega^2\varkappa^2/4,\ N^2 = \varkappa g,
\end{aligned}
$$

так как $Q^0/(k^2 - \varkappa^2/4)$ не дает вклада при всех $t > 0$. Заметим, что формулы (3.8) совпадают с формулами для решения задачи Коши по начальным данным $(w_{\text{в}}, \rho^0)$, найденным непосредственно из (3.1′).

4. В задаче об ударе в несжимаемой жидкости ([3, § 11], а также [4]) рассматривается движение жидкости под воздействием импульсивных массовых сил $\mathbf{X}(\mathrm{x}, t)$, действующих в течение малого интервала времени τ, причем $\tilde{\mathbf{V}}(\mathrm{x}) = \int_0^\tau \mathbf{X}(\mathrm{x}, t)\,dt$ остается при $\tau \to 0$ фиксированным. Задачу Коши для (1.1) при нулевых начальных возмущениях $\tilde{\rho}(\mathrm{x})$, $\tilde{p}(\mathrm{x})$ также можно рассматривать как предельный случай задачи об ударе, так как она эквивалентна задаче с нулевыми начальными данными и δ-образными массовыми силами $\mathbf{X}(\mathrm{x}, t)$ в правых частях уравнений для u_t, v_t, w_t. Обозначим через $\Phi(\tau, c, \mathrm{x}, t)$ решение задачи с нулевыми начальными данными и массовыми силами, действующими при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ (зависящее от τ и c как от параметров). Определим двойной предельный переход

$$
(4.1)\qquad \lim_{c \to \infty}\lim_{\tau \to 0} \Phi(\tau, c, \mathrm{x}, t),
$$

где внутренний предел — переход к задаче Коши с нулевыми $\tilde{\rho}(\mathrm{x})$, $\tilde{p}(\mathrm{x})$ и ненулевыми $\tilde{u}(\mathrm{x})$, $\tilde{v}(\mathrm{x})$, $\tilde{w}(\mathrm{x})$, а внешний — переход к несжимаемой жидкости. В [3, 4] рассматривается предельный переход

$$
(4.2)\qquad \lim_{\tau \to 0}\lim_{c \to \infty} \Phi(\tau, c, \mathrm{x}, t).
$$

Внутренний предел — переход к несжимаемой жидкости, а внешний описывает действие массовых сил.

Покажем, что эти пределы совпадают. В [3, § 11, формула (1)] находится скорость жидкости после действия импульсивных сил

$$
(4.3)\qquad \mathbf{V}(\mathrm{x}) = \int_0^\tau \mathbf{X}(\mathrm{x}, t)\,dt - \rho_0^{-1}\int_0^\tau \operatorname{grad} p(\mathrm{x}, t)\,dt = \tilde{\mathbf{V}}(\mathrm{x}) - \rho_0^{-1}\operatorname{grad}\tilde{\omega}(\mathrm{x}),
$$

где $p(\mathrm{x}, t)$ — давление, возникшее в результате действия импульсивных сил, а функция $\tilde{\omega}(\mathrm{x}) = \int_0^\tau p(\mathrm{x}, t)\,dt$ названа в [3] импульсивным давлением.

Задача об определении скорости $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ сводится к вычислению $\tilde{\omega}(\mathbf{x})$, для чего воспользуемся тем, что дивергенция левой части (4.3) должна быть равна нулю. Разлагая $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ на потенциальную и вихревую части согласно (2.1а), получим $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{\text{в}}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\omega}(\mathbf{x}) = \varphi^0(\mathbf{x})$. Теперь совпадение пределов (4.1) и (4.2) непосредственно вытекает из теоремы А.

Заметим, однако, что рассмотренная выше задача более общая, чем задача об ударе, так как, хотя начальное возмущение скорости можно интерпретировать как результат воздействия массовых импульсивных сил, начальные возмущения плотности и давления так интерпретировать не удается.

Приложение. Система (1.1) может быть сведена к одному уравнению, например, для вертикальной скорости w, которое в исходных переменных имеет вид (см. (3.6)) $\partial^2/\partial t^2(\Delta w - \varkappa \partial w/\partial z) + N^2\Delta_h w - c^{-2}\partial^4 w/\partial t^4 = 0$. Воспользовавшись для простоты традиционным приближением Буссинеска, отбросим член $\varkappa\partial^3 w/\partial^2 t\partial z$ и выпишем фундаментальное решение полученного уравнения

$$L_c\mathscr{E}_c = (\partial^2/\partial t^2\Delta + N^2\Delta_h - c^{-2}\partial^4/\partial t^4)\mathscr{E}_c = \delta(\mathbf{x})\delta(t).$$

Нетрудно показать (ср. [5], формула (7.13)), что

$$\text{(П.1)} \qquad \mathscr{E}_c = \frac{1}{8\pi^2 r}\int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} \exp\left\{-i\omega t + \frac{i\omega r}{c}\sqrt{\frac{\omega^2 - N^2\cos^2\varphi}{\omega^2 - N^2}}\right\}\times$$

$$\times\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - N^2}\sqrt{\omega^2 - N^2\cos^2\varphi}}$$

$$(\cos\varphi = z/r,\ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}).$$

Решение задачи Коши $L_c w = 0$ с начальными данными $w|_{t=0} = w^0$, $\partial w/\partial t|_{t=0} = w^1$, $\partial^2 w/\partial t^2|_{t=0} = w^2$, $\partial^3 w/\partial t^3|_{t=0} = w^3$ записывается как

$$\text{(П.2)} \qquad w = \partial/\partial t\,\Box\,\mathscr{E}_c * w^0 + \Box\,\mathscr{E}_c * w^1 - c^{-2}\partial\,\mathscr{E}_c/\partial t * w^2 - c^{-2}\,\mathscr{E}_c * w^3$$

($\Box = \Delta - c^{-2}\partial^2/\partial t^2$ — оператор Даламбера). При $c \to \infty$ (П.2) переходит в известную формулу [2] решения задачи Коши для уравнения внутренних волн $w = \partial\mathscr{E}/\partial t * \Delta w^0 + \mathscr{E} * \Delta w^1$ ($\mathscr{E}$ — фундаментальное решение уравнения внутренних волн). Возвращаясь к «физическим» начальным данным (w^0, ρ^0), находим $w = \partial\mathscr{E}/\partial t * \Delta w^0 - g\mathscr{E} * \Delta_h\rho^0$.

Положив в формуле (П.1) $t = \tau/c$ и перейдя к пределу $c \to \infty$, получим $\mathscr{E}_c(r, \varphi, \tau/c) \to \mathscr{E}_{\text{в}}(r, \tau) = (4\pi r)^{-1}(\tau - r)\,\theta(\tau)\theta(\tau - r)$— дважды проинтегрированное по τ фундаментальное решение обычного волнового уравнения (θ — функция Хевисайда).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Обухов А. М.** К вопросу о геострофическом ветре // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз.— 1949.— Т. 13, № 4.
2. **Секерж-Зенкович С. Я.** Фундаментальное решение оператора внутренних волн // ДАН СССР.— 1979.— Т. 246, № 2.
3. **Лэмб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: Техтеориздат, 1947.
4. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика.— М.: Гостехиздат, 1948.— Т. 1.
5. **Дикий Л. А.** Теория колебаний земной атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1969.

Поступила 12/V 1986 г.