УДК 517.944+519.46

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ И ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ю. А. Чиркунов

Новосибирский государственный университет экономики и управления,
630070 Новосибирск
E-mail: chr01@rambler.ru

Получены достаточное условие отсутствия касательных преобразований, допускаемых квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, достаточное условие линейной автономности операторов группы Ли преобразований, допускаемых слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Доказана теорема о структуре законов сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Выполнена классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными по законам сохранения первого порядка.

Ключевые слова: слабонелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, касательные преобразования, линейно-автономные операторы, законы сохранения первого порядка, инварианты Лапласа.

Введение. В данной работе исследуются групповые свойства и законы сохранения для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Как известно, информация о структуре операторов, допускаемых дифференциальным уравнением, и законах сохранения для него существенно упрощает как отыскание этих операторов и законов сохранения, так и поиск решений данного уравнения [1]. Классификация дифференциальных уравнений по законам сохранения позволяет, в частности, выявить экспериментально определенные значения физических величин и формы зависимостей, представляющие интерес при математическом исследовании задачи, а также получить новые физические величины, сохраняющиеся с течением времени.

1. Касательные преобразования, допускаемые квазилинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Рассматривается квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$a^{ij}u_{ij} + b = 0 \qquad (a^{ij} = a^{ji}), \tag{1}$$

где $u_{ij} = \partial_i\partial_j u$, $\partial_i = \partial/\partial x^i$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ n \geqslant 2)$; матрица $A = \|a^{ij}\|$ и величина b — заданные функции переменных $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, u, $\underset{1}{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ $(u_i = \partial_i u)$; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до n (за исключением случаев, которые оговорены особо).

Для удобства далее через $r_*(A)$ обозначен общий ранг матрицы A [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00489).

Теорема 1. *Если $r_*(A) \geqslant 3$, то все касательные преобразования, допускаемые уравнением* (1)*, являются продолженными точечными преобразованиями.*

Доказательство. Пусть $r_*(A) = r \geqslant 3$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$, а в ряду миноров $M^1, M^2, \ldots, M^r$ в левом верхнем углу матрицы A никакие два соседних минора не равны нулю и $M^r \neq 0$. Имеет место следующая альтернатива: 1) $M^3 \neq 0$; 2) $M^3 = 0$ (тогда миноры M^2 и M^4 отличны от нуля).

Оператор группы касательных преобразований, допускаемых уравнением (1), ищется в виде [1]

$$\xi^i\,\partial_i + \eta\,\partial_u + \zeta_{(i)}\,\partial_{u_i}, \tag{2}$$

где $\xi^i = -H_{u_i}$, $\eta = H - u_j H_{u_j}$, $\zeta_{(i)} = H_i + u_i H_u$, $H_i = \partial_i H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $H = H(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u})$ — производящая функция.

Условия инвариантности многообразия (1) относительно оператора (2) приводят к соотношениям

$$H_{u_i u_j} = a^{ij}\lambda^1 - a^{j1}\lambda^i - a^{i1}\lambda^j \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n), \tag{3}$$

где $\lambda^m = H_{u_1 u_m}$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ — решение уравнений

$$(a^{ij}a^{k1} - a^{ik}a^{j1})\lambda^1 - (a^{ik} + a^{i1}a^{k1})\lambda^j + (a^{ij} + a^{i1}a^{j1})\lambda^k = 0; \tag{4}$$

$$\begin{gathered}2(a^{ik}a^{mj} - a^{im}a^{jk})\lambda^1 + (a^{kj}a^{m1} - a^{mj}a^{k1})\lambda^i + (a^{im}a^{k1} - a^{ik}a^{m1})\lambda^j + \\ + (a^{im}a^{j1} - a^{mj}a^{i1})\lambda^k + (a^{kj}a^{i1} - a^{ik}a^{j1})\lambda^m = 0; \qquad (5)\\ i, j, k, m = 2, 3, \ldots, n.\end{gathered}$$

Следствием системы (4), (5) являются уравнения

$$B(1, i, j)(\lambda^1, \lambda^i, \lambda^j)^{\mathrm{т}} = 0 \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n;\ i \neq j), \tag{6}$$

где $B(1, i, j) = \|B^{km}(1, i, j)\|$ — матрица, присоединенная к матрице минора третьего порядка матрицы A, стоящего на пересечении строк и столбцов с номерами $1, i, j$.

Для первой части альтернативы из (4)–(6) следует $\lambda^j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Для второй части альтернативы из уравнений (5) вытекают уравнения

$$M(1, i, j, k)\lambda^1 = 0 \qquad (i, j, k = 2, 3, \ldots, n; \quad i \neq j \neq k \neq i),$$

где $M(1, i, j, k)$ — минор четвертого порядка матрицы A, стоящий на пересечении строк и столбцов с номерами $1, i, j, k$. Отсюда следует, что $\lambda^1 = 0$. Так как $M^2 \neq 0$ и $r_*(A) \geqslant 3$, то из (4) следует, что $\lambda^j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$.

Таким образом, в силу (3) производящая функция H является линейной функцией переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Теорема доказана.

Замечание 1. Достаточное условие отсутствия касательных преобразований для уравнения (1) $r_*(A) \geqslant 3$, вообще говоря, нельзя ослабить. Например, уравнение $(tu_t - u)u_{tt} = 2\nabla u \cdot \nabla u_t + 1$, где $t \in \mathbb{R}^1$, $\nabla = \partial_{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geqslant 2)$, допускает группу касательных преобразований с производящей функцией $H = \exp u_t$.

2. Точечные преобразования, допускаемые слабонелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Рассматривается слабонелинейное уравнение

$$a^{ij}(\boldsymbol{x}, u)u_{ij} + b(\boldsymbol{x}, u, \underset{1}{u}) = 0. \tag{7}$$

Оператор, допускаемый уравнением (7), ищется в виде

$$\xi^i(\boldsymbol{x}, u)\partial_i + \eta(\boldsymbol{x}, u)\partial_u. \tag{8}$$

Определение 1. Оператор (8) будет называться линейно-автономным, если его координаты $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n, \eta$ удовлетворяют уравнениям $\xi^1_u = \xi^2_u = \ldots = \xi^n_u = 0$, $\eta_{uu} = 0$.

Теорема 2. *Если $r_*(A) \geqslant 2$, то координаты $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ всех операторов (8), допускаемых слаболинейным уравнением (7), не зависят от функции u. Если при этом $b_{u_i u_j} = 0$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то все операторы (8), допускаемые уравнением (7), являются линейно-автономными.*

Доказательство. Пусть $r_*(A) = r \geqslant 2$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$, а в ряду миноров $M^1, M^2, \ldots, M^r$, стоящих в левом верхнем углу матрицы A, никакие два соседних минора не равны нулю и $M^r \neq 0$.

Определяющие уравнения содержат подсистему

$$\xi^i_u = -a^{i1}\xi^1_u, \qquad (a^{ij} + a^{i1}a^{j1})\xi^1_u = 0,$$
$$(2a^{k1}a^{ij} - a^{kj}a^{i1} - a^{ki}a^{j1})\xi^1_u = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n),$$

из которой следует, что $\xi^i_u = 0$.

Если координаты $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ каждого оператора (8), допускаемого уравнением (7), не зависят от функции u, то

$$2\eta_{uu} = b_{u_1u_1}(\eta_u - 2a^{i1}\xi^1_i) - 2b_{u_1u_i}\xi^1_i + \xi^1 b_{1u_1u_1} + \xi^i b_{iu_1u_1} + \eta b_{uu_1u_1} + \\ + b_{u_1u_1u_1}[\eta_1 + u_1(\eta_u - \xi^1_1) - u_i\xi^i_1] + b_{u_iu_1u_1}(\eta_i + u_i\eta_u - u_1\xi^1_i - u_m\xi^m_i).$$

Из этого уравнения следует второе утверждение теоремы.

Замечание 2. Достаточное условие независимости от функции u координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ всех операторов (8), допускаемых уравнением (7): $r_*(A) \geqslant 2$, вообще говоря, нельзя ослабить. Например, уравнение $u_{tt} = t|\nabla u|^2 - u_t^2$ допускает оператор $(\exp u)\,\partial_t$.

Замечание 3. Для того чтобы все операторы (8), допускаемые уравнением (7), в котором $a^{11} \neq 0$, были линейно-автономными, достаточно потребовать выполнения более слабого, чем в формулировке теоремы 2, условия, а именно $r_*(A) \geqslant 2$ и $b_{u_1u_i} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Это условие, вообще говоря, нельзя ослабить. Например, уравнение $u_{tt} = \Delta u + u_t^2 - |\nabla u|^2$ допускает оператор $(\exp u)\,\partial_u$.

3. Законы сохранения первого порядка для слабонелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Законом сохранения первого порядка для уравнения (7) называется вектор $\boldsymbol{B} = (B^1, B^2, \ldots, B^n)$, компоненты которого являются функциями переменных $\boldsymbol{x}$, u, $\underset{1}{u}$ и удовлетворяют соотношению $(D_i B^i) = 0$ в силу (7) (D_i — оператор полного дифференцирования по x^i) [1].

Теорема 3. *Если $r_*(A) \geqslant 3$, то компоненты $B^1, B^2, \ldots, B^n$ в каждом законе сохранения первого порядка для уравнения (7) являются многочленами не выше второй степени относительно $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Доказательство. Пусть $r_*(A) = r$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$, а в ряду миноров $M^1, M^2, \ldots, M^r$ никакие два соседних минора не равны нулю.

Система определяющих уравнений имеет вид

$$B^i_{u_j} + B^j_{u_i} + 2a^{ij}B^1_{u_1} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \qquad B^i_i + u_iB^i_u + bB^1_{u_1} = 0.$$

Условия совместности этой системы представляют собой уравнения $B^k_{u_iu_j} = a^{ij}B^1_{u_1u_k} - a^{ik}B^1_{u_1u_j} - a^{jk}B^1_{u_1u_i}$ и уравнения (4), (5), в которых надо положить $\lambda^k = B^1_{u_1u_1u_k}$ ($i, j = 2, 3, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$). Поэтому $B^1_{u_1u_1u_k} = 0$ при всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда следует утверждение теоремы.

4. Законы сохранения первого порядка для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматривается уравнение

$$L[u] = a^{ij}(\boldsymbol{x})u_{ij} + b^i(\boldsymbol{x})u_i + c(\boldsymbol{x})u = 0. \tag{9}$$

Из операторной формулы Грина

$$vL[u] - uL^*[v] = D_i[a^{ij}vu_j + (b^iv - (va^{ij})_j)u]$$

следует, что уравнение (9) имеет закон сохранения

$$B^i = a^{ij}vu_j + (b^iv - (va^{ij})_j)u \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

где $v = v(\boldsymbol{x})$ — решение сопряженного уравнения $L^*[v] = 0$.

Определение 2. В случае если закон сохранения для уравнения (9) является линейной комбинацией тривиальных законов сохранения и законов сохранения (10), он будет называться очевидным законом сохранения, в противном случае — неочевидным законом сохранения.

Теорема 3 дает "оценку сверху" для неочевидных законов сохранения первого порядка для уравнения (9). "Оценку снизу" дает

Теорема 4. *Любой закон сохранения, компоненты которого линейно выражаются через $u, u_1, u_2, \ldots, u_n$, является очевидным законом сохранения для уравнения* (9).

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $a^{11} = -1$. Пусть закон сохранения имеет вид

$$B^i = f^{ij}(\boldsymbol{x})u_j + h^i(\boldsymbol{x})u \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Из соотношения $(D_iB^i) = 0$ в силу (9) следует

$$f^{ij} = -a^{ij}v + g^{ij}(\boldsymbol{x}), \qquad g^{ij} + g^{ji} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где $L^*[v] = 0$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что матрица $\|g^{ij}\|$ является антисимметричной.

5. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными по законам сохранения первого порядка. Ниже проводится классификация уравнения

$$u_{12} + au_1 + bu_2 + c = 0 \tag{11}$$

относительно коэффициентов a, b, c, являющихся заданными функциями переменных x^1, x^2, по законам сохранения первого порядка, т. е. по векторам $\boldsymbol{B} = (B^1, B^2)$, компоненты которых зависят от x^1, x^2, u, u_1, u_2 и удовлетворяют соотношению

$$(D_1B^1 + D_2B^2) = 0 \tag{12}$$

в силу (11).

Наиболее общие преобразования эквивалентности, сохраняющие дифференциальную структуру уравнения (11) и соотношения (12), состоят из преобразований $x'^1 = f^1(x^1)$, $x'^2 = f^2(x^2)$, $u = g(x^1, x^2)u'$, где $f^1(x^1)$, $f^2(x^2)$ — обратимые функции; $g(x^1, x^2) \neq 0$.

Система определяющих уравнений приводится к виду

$$\begin{gathered} B^1_{u_1} = B^2_{u_2} = 0, \\ B^1_1 + u_1B^1_u + B^2_2 + u_2B^2_u - (au_1 + bu_2 + cu)(B^1_{u_2} + B^2_{u_1}) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Если a, b, c являются произвольными функциями переменных x^1, x^2, то множество законов сохранения первого порядка для уравнения (11) состоит только из тривиальных законов сохранения.

Классификация осуществляется по неочевидным законам сохранения. Второе продолжение системы (13) содержит классифицирующие уравнения $hB^1_{u_2u_2u_2} = 0$, $kB^2_{u_1u_1u_1} = 0$, где $h = a_1 + ab - c$, $k = b_2 + ab - c$ — инварианты Лапласа.

5.1. *Случай* $hk \neq 0$. Из второго продолжения системы (13) следует, что компоненты B^1, B^2 имеют вид

$$\begin{aligned} B^1 &= \theta^1 u_2^2 + \psi u u_2 - (\psi_2/2 - a\psi - \theta^2 c)u^2, \\ B^2 &= \theta^2 u_1^2 + \psi u u_1 - (\psi_1/2 - b\psi - \theta^1 c)u^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\psi = \theta^1 a + \theta^2 b$; $\theta^1 = \varphi^1/h$; $\theta^2 = \varphi^2/k$; функции $\varphi^1 = \varphi^1(x^1, x^2)$, $\varphi^2 = \varphi^2(x^1, x^2)$ — решение переопределенной пассивной системы:

$$\begin{gathered} \varphi^1_1 = (p_1 + 2b)\varphi^1, \qquad \varphi^2_2 = (q_2 + 2a)\varphi^2, \qquad \varphi^1_2 + \varphi^2_1 = 2(a\varphi^1 + b\varphi^2), \\ \varphi^1_{22} = (q_2 + 4a)\varphi^1_2 + 2[a_2 - a(q_2 + 2a)]\varphi^1 - (h - K)\varphi^2, \\ \varphi^1_{11} = (p_1 + 4b)\varphi^2_1 + 2[b_1 - b(p_1 + 2b)]\varphi^2 - (k - H)\varphi^1, \\ 2(K - H)\varphi^1_2 - [H_2 - q_2 H + 4a(K - H)]\varphi^1 = (K_1 - p_1 K)\varphi^2; \end{gathered} \tag{15}$$

$p = \ln h$; $q = \ln k$; $H = 2h - k - p_{12}$ — инвариант Лапласа x^1-преобразования Лапласа уравнения (11); $K = 2k - h - q_{12}$ — инвариант Лапласа x^2-преобразования Лапласа уравнения (11). Решение системы (15) имеет наибольший произвол в том случае, когда последнее уравнение этой системы является тождеством. Если последнее уравнение системы (15) выполнено тождественно, то из остальных уравнений этой системы следует, что все коэффициенты разложений φ^1 и φ^2 в ряды Тейлора выражаются не более чем через три произвольные постоянные. Следовательно, при $kh \neq 0$ уравнение (11) имеет не более трех неочевидных законов сохранения первого порядка.

Наибольшее число неочевидных законов сохранения первого порядка могут иметь только такие уравнения (11), коэффициенты a, b, c которых удовлетворяют системе уравнений

$$K = H, \qquad H_1 = p_1 H, \qquad H_2 = q_2 H \tag{16}$$

с условием совместности $(k - h)H = 0$. Это уравнение является классифицирующим.

Пусть $k = h$. Из уравнений (16) следует, что h является решением уравнения Лиувилля $(\ln h)_{12} = \gamma h$ ($\gamma = \mathrm{const}$). Тогда при $\gamma \neq 0$ уравнение (11) эквивалентно (см. [1]) уравнению Эйлера — Пуассона

$$u_{12} - \frac{2}{\gamma(x^1 + x^2)}\,(u_1 + u_2) + \frac{4u}{\gamma^2(x^1 + x^2)^2} = 0, \tag{17}$$

а при $\gamma = 0$ — уравнению

$$u_{12} + x^1 u_1 + x^2 u_2 + x^1 x^2 u = 0. \tag{18}$$

Из решения системы (15) следует, что уравнения (17), (18) имеют по три неочевидных закона сохранения первого порядка, определяемых по формулам (14), где соответственно

$$\theta^1 = \frac{c^1 + c^2 x^2 + c^3 (x^2)^2}{(x^1 + x^2)^{4/\gamma}}, \qquad \theta^2 = \frac{-c^1 + c^2 x^1 - c^3 (x^1)^2}{(x^1 + x^2)^{4/\gamma}}; \tag{19}$$

$$\theta^1 = (c^1 + c^2 x^2) \exp(2x^1 x^2), \qquad \theta^2 = (c^3 - c^2 x^1) \exp(2x^1 x^2). \tag{20}$$

Пусть $k \neq h$. Тогда $H = K = 0$. В этом случае уравнение (11) имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка, задаваемых формулами (14), в которых

$$\theta^1 = y(x^2) \exp\Big(2\int b\,dx^1\Big), \qquad \theta^2 = z(x^1) \exp\Big(2\int a\,dx^2\Big). \tag{21}$$

Функция $y(x^2)$ является решением обыкновенного линейного дифференциального уравнения третьего порядка, а функция $z(x^1)$ выражается через $y(x^2)$ и коэффициенты уравнения (11).

Результаты выполненной классификации при $kh \neq 0$ формулируются в виде следующей теоремы.

Теорема 5. *При $kh \neq 0$ уравнение* (11) *имеет не более трех неочевидных законов сохранения первого порядка, в которых компоненты квадратичны относительно u, u_1, u_2.*

При $h = k$ уравнение (11) *имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка тогда и только тогда, когда оно эквивалентно либо уравнению Эйлера — Пуассона* (17)*, либо уравнению* (18)*, для которых неочевидные законы сохранения первого порядка определяются формулами* (14), (19), (20).

При $h \neq k$ уравнение (11) *имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка тогда и только тогда, когда $H = K = 0$. В этом случае неочевидные законы сохранения первого порядка определяются по формулам* (14), (21).

5.2. *Случай $kh = 0$.* Случай $h = k = 0$ тривиален. Если один из инвариантов h, k отличен от нуля, то без ограничения общности можно считать, что $h \neq 0$. Второе продолжение системы (13) содержит классифицирующее уравнение $[(\ln h)_{12} - 2h]B^1_{u_2u_2} = 0$. При $(\ln h)_{12} \neq 2h$ неочевидные законы сохранения первого порядка для уравнения (11) имеют вид $B^1 = 0$, $B^2 = f(x^1, v)$, где $v = (u_1 + bu)\exp\Big(\displaystyle\int a\,dx^2\Big)$; f — произвольная функция ($f_v \neq 0$). При $(\ln h)_{12} = 2h$ уравнение (11) эквивалентно уравнению Эйлера — Пуассона [1] $u_{12} - u_1/(x^1 + x^2) = 0$, для которого имеется еще один неочевидный закон сохранения

$$B^1 = u_2^2 - \frac{uu_2}{x^1 + x^2} + \frac{u^2}{2(x^1 + x^2)^2}, \qquad B^2 = -\frac{uu_1}{x^1 + x^2} - \frac{u^2}{2(x^1 + x^2)^2}.$$

5.3. *Инвариантное описание случаев максимального расширения множества законов сохранения.* Выше установлено, что при $hk \neq 0$ уравнение (11) имеет три неочевидных закона сохранения первого порядка тогда и только тогда, когда инварианты Лапласа h, k удовлетворяют либо условиям

$$p_{12} = 2\exp p - \exp q, \qquad q_{12} = 2\exp q - \exp p \qquad (p \neq q), \tag{22}$$

либо условиям

$$p_{12} = \gamma \exp p \qquad (\gamma = \mathrm{const}, \quad p = q). \tag{23}$$

При $k = 0$, $h \neq 0$ расширение множества неочевидных законов сохранения первого порядка для уравнения (11) в нетривиальном случае имеет место только в том случае, если инварианты Лапласа этого уравнения удовлетворяют условию

$$p_{12} = 2\exp p \qquad (k = 0, \quad h \neq 0). \tag{24}$$

Решение системы определяющих уравнений показывает, что основные группы уравнений (22)–(24) совпадают с группой преобразований эквивалентности уравнения (11). По известному алгоритму [1] находится базис дифференциальных инвариантов второго порядка этой группы. Этот базис состоит из шести функций, которые могут быть выбраны следующим образом:

$$I^1 = \frac{k}{h}, \quad I^2 = \frac{1}{h}(\ln h)_{12}, \quad I^3 = \frac{1}{k}(\ln k)_{12},$$
$$I^4 = \frac{1}{I^1_1}\Big(\ln\frac{I^1_1}{h}\Big), \quad I^5 = \frac{1}{I^1_2}\Big(\ln\frac{I^1_2}{h}\Big), \quad I^6 = \frac{1}{h}\,I^1_1 I^1_2.$$

Инварианты I^1, I^2, I^3 впервые были найдены Л. В. Овсянниковым [2]. С помощью этих инвариантов уравнения (22), (23), (24) записываются соответственно в виде

$$I^2 + I^1 = 2, \qquad I^3 + \frac{1}{I^1} = 2 \qquad (I^1 \neq 0; 1); \tag{25}$$

$$I^1 = 1, \qquad I^2 = \gamma = \mathrm{const}; \tag{26}$$

$$I^1 = 0, \qquad I^2 = 2. \tag{27}$$

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Нетривиальное максимальное расширение множества законов сохранения первого порядка для уравнения* (11) *при* $h \neq 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда инварианты Овсянникова* I^1, I^2, I^3 *этого уравнения удовлетворяют альтернативным соотношениям* (25), (26), (27) *соответственно.*

Теорема 6 дает инвариантное описание уравнений (11), имеющих максимальное число неочевидных законов сохранения первого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. **Овсянников Л. В.** Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина // ПМТФ. 1960. № 3. С. 126–145.

Поступила в редакцию 5/VI 2008 г.