УДК 532, 536.66

ГРУППА МАСШТАБНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ОПИСАНИИ ДВИЖЕНИЯ НАНОЖИДКОСТИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ПОРИСТОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЕТОМ ЗАВИСИМОСТИ ВЯЗКОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Р. Кэндэзэми, И. Мухэймин, Г. Камачи*

Университет Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Джохор, Малайзия
* Университетский колледж Линтона, Мантин, Малайзия
E-mail: future990@gmail.com

Исследуется стационарное двумерное течение электропроводящей несжимаемой жидкости на вертикальной пористой растягивающейся пластине, пронизываемое однородным поперечным магнитным полем. В предположении, что вязкость жидкости является линейной функцией температуры, дифференциальные уравнения в частных производных специальным видом преобразований группы Ли, а именно группой масштабных преобразований, преобразуются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых численно методом пристрелки с использованием метода Рунге — Кутты — Джилля. Установлено, что число Льюиса, параметр броуновского движения и параметр термофореза оказывают значительное влияние на поле течения и профили температуры.

Ключевые слова: группа масштабного преобразования, броуновское движение, магнитное поле, наножидкость с вязкостью, зависящей от температуры, термофоретическое осаждение частицы.

Введение. Наножидкость представляет собой суспензию частиц очень малого размера, свойства которой существенно зависят от характеристик теплопереноса. Наножидкости являются сконструированными коллоидами, состоящими из основной жидкости и наночастиц, и обладают свойствами, которые позволяют использовать их в различных областях включая микроэлектронику и фармацевтическую промышленность, а также в топливных элементах и при создании гибридных двигателей. Исследование наночастиц представляет интерес, поскольку они являются связующим звеном между сплошным веществом и атомной или молекулярной структурой. Важными транспортными механизмами в наножидкостях являются броуновская диффузия и термофорез. В последние годы появилось большое количество работ, в которых изучается конвективное течение в пористых средах, используемое в ядерных реакторах (для отвода тепла), солнечных коллекторах, сушильных аппаратах, теплообменниках, при добыче геотермального тепла и нефти, в строительстве и т. д. Наножидкости применяются также для охлаждения чипов в компьютерах. Случайное движение наночастиц внутри основной жидкости, называемое броуновским движением, обусловлено непрерывными столкновениями наночастиц и молекул основной жидкости. С уменьшением размера наночастицы интенсивность броуновского движения увеличивается.

Магнитная наножидкость — уникальный материал, обладающий свойствами жидкости и магнитного поля. Такие жидкости используются в магнитооптических фильтрах длин волн, оптических модуляторах, при изготовлении нелинейных оптических материалов, в перестраиваемых оптоволоконных фильтрах, дифракционных решетках и оптических переключателях. Изменяя магнитное поле, можно регулировать различные физические параметры этих жидкостей. Магнитные наночастицы применяются в медицине, биомедицине, при конструировании громкоговорителей, в качестве герметизирующих материалов, а также при разделении в тяжелой воде. Магнитные наножидкости могут использоваться при лечении онкологических заболеваний для усиления кровотока к опухоли, поскольку магнитные наночастицы более интенсивно осаждаются на опухолевых клетках и поглощают значительно бо́льшую энергию. Наножидкости используются и в других областях биомедицины для разделения клетки с помощью магнитных полей, для транспортирования лекарственных средств в организме, для проведения гипертермии, а также в магнитно-резонансной томографии.

Согласно кинетической теории термофорез происходит вследствие того, что высокоэнергетические молекулы из более нагретой области жидкости, имеющие большой импульс, сталкиваются с молекулами из менее нагретой области. Это приводит к перемещению частиц в направлении, противоположном направлению температурного градиента. Наножидкостные хладагенты, способные производить бо́льшую тепловую работу, могут быть использованы для обеспечения ядерной безопасности [1]. Особенностью наножидкостей является большая теплопроводность [2], что позволяет использовать их в современных ядерных системах [3]. Подробный обзор работ, посвященных исследованию конвективного переноса в наножидкостях, приведен в работе [4], в которой подчеркивается необходимость поиска удовлетворительного объяснения аномального увеличения теплопроводности и вязкости. Существуют различные модели конвективных течений наножидкостей и методы решения соответствующих задач (см., например, [5–8]).

Вязкость — свойство жидкости, препятствующее течению сплошных сред. Большое значение имеет изучение влияния температуры на вязкость жидкости. В наножидкости с увеличением температуры вязкость уменьшается, а текучесть, наоборот, увеличивается. Многие физические характеристики материалов включая фазу (твердая, жидкая, газообразная или плазма), плотность, растворимость, давление пара и электропроводность зависят от температуры. При наличии броуновского движения зависимость вязкости наножидкости от температуры при термофоретическом осаждении частиц становится более существенной в случае больших градиентов относительного объема наночастиц и температуры. Кроме того, существенный вклад в конвективный перенос в пористой среде вносят инерция, дисперсия, тепловое излучение и вдув (отсос). Естественно, совместное действие этих факторов оказывает большое влияние на скорости массо- и теплообмена.

В данной работе при исследовании градиента относительного объема наночастиц рассматривается совместное воздействие броуновского движения и термофореза в случае, когда вязкость наножидкости зависит от температуры. В работах [9, 10] с использованием группы Ли изучены трехмерные нестационарные уравнения для ламинарного пограничного слоя неньютоновских жидкостей. Предложены два способа приведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью группового анализа. С использованием группового анализа изучено движение пористой поверхности при наличии вертикального отсоса или вдува через нее, а также проанализировано точное решение уравнений пограничного слоя конкретной неньютоновской жидкости на растягивающейся пластине. В [11] проведен групповой анализ ползучести для жидкости второго класса. С использованием трансляционной симметрии и приближенного решения в виде ряда с помощью масштабного подобия построено точное решение экспоненциального типа, рассмотрены некоторые краевые задачи.

Целью данной работы является анализ развития стационарного течения в пограничном слое, теплообмена и изменения относительного объема наночастиц на пористой растягивающейся поверхности в наножидкости при различных параметрах с использованием группы масштабных преобразований, а именно группы преобразований Ли.

1. Математическая модель. Рассмотрим двумерную задачу. Выберем систему координат, в которой ось x направлена вертикально вверх. Рассмотрим вертикальную пластину при $y = 0$ (рис. 1). Однородное поперечное магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$ приложено параллельно оси y. Предполагается, что индуцированное магнитное поле, внешнее электрическое поле и электрическое поле, обусловленное поляризацией зарядов, незначительны. На границе температура T и относительный объем наночастицы φ принимают постоянные значения T_w и φ_w соответственно. Значения T и φ в окружающей среде на бесконечности обозначим T_∞ и φ_∞ соответственно.

Используется приближение Обербека — Буссинеска. Следующие четыре уравнения поля представляют собой законы сохранения полной массы, импульса, тепловой энергии и изменения относительного объема наночастицы соответственно. В качестве переменных поля рассматриваются скорость $\boldsymbol{v}$, температура T и объем наночастицы C:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho_f}\,\frac{\partial \mu_f}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\mu_f}{\rho_f}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho_f}\,u - \frac{\nu}{K}\,u + {}$$
$$+ [(1 - C_\infty)\rho_{f\infty}\beta g(T - T_\infty) - (\rho_p - \rho_{f\infty})g(C - C_\infty)]; \qquad (1)$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varkappa}{(\rho c)_f}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau\Big[D_{\rm B}\,\frac{\partial C}{\partial y}\,\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_t}{T_\infty}\Big(\frac{\partial T}{\partial y}\Big)^2\Big],$$
$$u\,\frac{\partial C}{\partial x} + v\,\frac{\partial C}{\partial y} = D_{\rm B}\,\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{D_t}{T_\infty}\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \qquad (2)$$

$$u = U(x), \quad v = -V(x), \quad C = C_w, \quad T = T_w \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$u = 0, \quad C = C_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости в направлениях осей x и y соответственно; μ, ν — динамическая и кинематическая вязкости жидкости; ρ_f — плотность основной жидкости; ρ_p — массовая плотность частиц; T, $\varkappa$ — температура и теплопроводность жидкости;

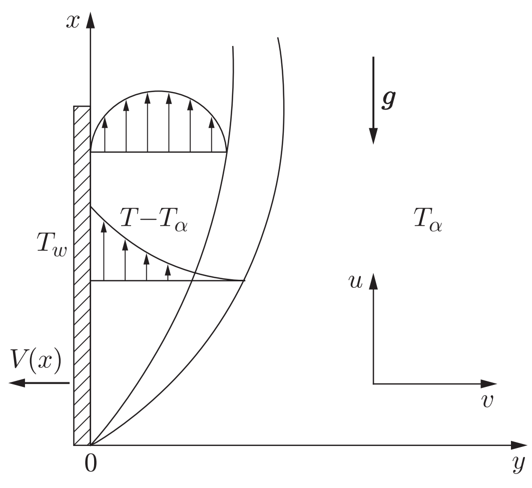


Рис. 1. Физическая модель течения в пограничном слое на вертикальной растягивающейся пористой поверхности

D — коэффициент диффузии; K — проницаемость пористой среды; B_0 — напряженность постоянного магнитного поля; σ — электропроводность жидкости; β — температурный коэффициент объемного расширения; g — ускорение свободного падения; T_w — температура стенки; T_∞ — температура окружающей среды на бесконечности; $U(x)$ — скорость вдоль потока; $\alpha = \varkappa/(\rho c)_f$ — температуропроводность жидкости; $\tau = (\rho c)_p/(\rho c)_f$ — отношение теплоемкостей материала наночастицы и жидкости; $V(x)$ — скорость вдува (отсоса) жидкости. Четвертый член в правой части уравнения (1) означает сопротивление первого порядка (сопротивление Дарси); $D_{\rm B}$ — коэффициент броуновской диффузии; D_t — коэффициент термофоретической диффузии. Вывод уравнения (2) представлен в работе [4].

Для u, v, θ, φ введем следующие соотношения:

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}.$$

Скорость вдоль потока и скорость вдува (отсоса) принимаются в виде

$$U(x) = c_1 x^m, \qquad V(x) = V_0 x^{(m-1)/2}. \tag{3}$$

Здесь $c_1 > 0$ — постоянная; температура стенки T_w и показатель m в степенном законе также являются постоянными. Далее полагаем $c_1 = 1$.

Зависимость вязкости наножидкости от температуры представляется в виде [12]

$$\mu_f = \mu_f^*[a + b(T_w - T)],$$

где μ_f — эффективная динамическая вязкость наножидкости; $\mu_f^* = \nu^*\rho_f$ — постоянная вязкость наножидкости вдали от пластины; a и $b > 0$ — константы. Для вязкой жидкости предлагается зависимость вязкости от температуры T в виде

$$\mu_f = \frac{\mu_\infty}{1 + \gamma(T - T_\infty)},$$

где γ — параметр химической реакции; μ_∞ — вязкость вдали от нагретой пластины.

Подставляя соотношения (3) в уравнения (1), (2), получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\zeta\nu^*\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \nu^*[a + \zeta(1-\theta)]\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + \\
+ (1-\varphi_\infty)\rho_{f\infty}\beta g\theta\,\Delta\theta - (\rho_p - \rho_{f\infty})g\varphi\,\Delta\varphi - \frac{\nu}{K}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho_f}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \\
\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\varkappa}{(\rho c)_f}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \tau\Big[D_{\rm B}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{D_t}{T_\infty}\Big(\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big)^2\Big], \\
\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = D_{\rm B}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{D_t}{T_\infty}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},
\end{gathered} \tag{4}$$

где $\zeta = b(T_w - T_\infty)$; $\nu^* = \mu_f^*/\rho_f$.

Граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = x^m, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -V_0 x^{(m-1)/2}, \quad \theta = \varphi = 1 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \to 0, \quad \theta \to 0, \quad \varphi \to 0 \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Рассмотрим преобразование группы Ли в упрощенном виде, а именно группу масштабных преобразований:

$$\begin{aligned} \Gamma\colon\quad & x^* = x\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_1}, \quad y^* = y\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_2}, \quad \psi^* = \psi\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_3}, \quad u^* = u\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_4}, \\ & v^* = v\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_5}, \quad \theta^* = \theta\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_6}, \quad \varphi^* = \varphi\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_7}. \end{aligned} \tag{5}$$

Преобразование (5) можно рассматривать как точечное преобразование координат $x, y, \psi, u, v, \theta, \varphi$ в координаты $x^*, y^*, \psi^*, u^*, v^*, \theta^*, \varphi^*$.

Подставляя (5) в (4), получаем

$$\begin{aligned} & \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3)}\Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*}\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^*\,\partial y^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*}\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^{*2}}\Big) = -\zeta\nu^*\,\mathrm{e}^{\varepsilon(3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_6)}\,\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\,\frac{\partial^2\psi^*}{\partial y^{*2}} + \\ & + \nu^*(a+\zeta)\,\mathrm{e}^{\varepsilon(3\alpha_2-\alpha_3)}\,\frac{\partial^3\psi^*}{\partial y^{*3}} - \zeta\nu^*\,\mathrm{e}^{\varepsilon(3\alpha_2-\alpha_3-\alpha_6)}\,\theta^*\,\frac{\partial^3\psi^*}{\partial y^{*3}} + \mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha_6}(1-\varphi_\infty)\rho_{f\infty}\beta g\theta^*\,\Delta\theta^* - \\ & \qquad - \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha_2-\alpha_3)}\Big(\frac{\sigma B_0^2}{\rho_f} + \frac{\nu^*}{K}\Big)\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} - \mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha_7}(\rho_p - \rho_{f\infty})g\varphi^*\,\Delta\varphi^*, \\ & \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_6)}\Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*}\,\frac{\partial\theta^*}{\partial x^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*}\,\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\Big) = \frac{\varkappa}{(\rho c)_f}\,\mathrm{e}^{\varepsilon(2\alpha_2-\alpha_6)}\,\frac{\partial^2\theta^*}{\partial y^{*2}} + \\ & \qquad + \tau\Big(D_{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{\varepsilon(2\alpha_2-\alpha_6-\alpha_7)}\,\frac{\partial\varphi^*}{\partial y^*}\,\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*} + \mathrm{e}^{\varepsilon(2\alpha_2-2\alpha_6)}\,\frac{D_t}{T_\infty}\Big(\frac{\partial\theta^*}{\partial y^*}\Big)^2\Big), \\ & \mathrm{e}^{\varepsilon(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_7)}\Big(\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*}\,\frac{\partial\varphi^*}{\partial x^*} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x^*}\,\frac{\partial\varphi^*}{\partial y^*}\Big) = D_{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{\varepsilon(2\alpha_2-\alpha_7)}\,\frac{\partial^2\varphi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{D_t}{T_\infty}\,\mathrm{e}^{\varepsilon(2\alpha_2-\alpha_6)}\,\frac{\partial^2\theta^*}{\partial y^{*2}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для того чтобы система осталась инвариантной при использовании группы преобразований Γ, должны выполняться соотношения

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 3\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = 3\alpha_2 - \alpha_3 = -\alpha_6 = \alpha_2 - \alpha_3 = -\alpha_7,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_6 = 2\alpha_2 - \alpha_6 = 2\alpha_2 - 2\alpha_6 = 2\alpha_2 - \alpha_6 - \alpha_7,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_7 = 2\alpha_2 - \alpha_7 = 2\alpha_2 - \alpha_6.$$

Из соотношения $3\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_3$ следует, что $\alpha_2 = 0$. Значит, $\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 3\alpha_2 - \alpha_3$ и, таким образом, $\alpha_6 = \alpha_7 = 0$, $\alpha_2 = \alpha_1/4 = \alpha_3/3$. Из граничных условий получаем $\alpha_4 = m\alpha_1 = \alpha_1/2$, $\alpha_5 = (m-1)\alpha_1/2 = -\alpha_1/4$ (поскольку $m = 1/2$). Следовательно, граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} = (x^*)^{1/2}, \quad \frac{\partial\psi^*}{\partial x} = -V_0(x^*)^{-1/4}, \quad \theta^* = \varphi^* = 1 \quad \text{при} \quad y^* = 0,$$

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial y^*} \to 0, \quad \theta^* \to 0, \quad \varphi^* \to 0 \quad \text{при} \quad y^* \to \infty.$$

Множество преобразований Γ сводится к преобразованиям

$$x^* = x\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_1}, \quad y^* = y\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_1/4}, \quad \psi^* = \psi\,\mathrm{e}^{3\varepsilon\alpha_1/4},$$

$$u^* = u\,\mathrm{e}^{\varepsilon\alpha_1/2}, \quad v^* = v\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\alpha_1/4}, \quad \theta^* = \theta, \quad \varphi^* = \varphi.$$

Разлагая данные функции в ряд Тейлора по степеням ε и удерживая члены порядка ε, получаем

$$x^* - x = x\varepsilon\alpha_1, \quad y^* - y = y\varepsilon\alpha_1/4, \quad \psi^* - \psi = 3\psi\varepsilon\alpha_1/4,$$
$$u^* - u = u\varepsilon\alpha_1/2, \quad v^* - v = -v\varepsilon\alpha_1/4, \quad \theta^* - \theta = \varphi^* - \varphi = 0.$$

В результате находим

$$y^*(x^*)^{-1/4} = \eta, \quad \psi^* = (x^*)^{3/4}F(\eta), \quad \theta^* = \theta(\eta), \quad \varphi^* = \varphi(\eta).$$

С помощью этих соотношений выражения (6) запишем в виде

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\,F'^2 - \frac{3}{4}\,FF'' = -\zeta\nu^*\theta'F'' + (a+\zeta)\nu^*F''' - \zeta\nu^*\theta F''' + \mathrm{R}_x\,(\theta - N_r\varphi) - (M+\lambda)F',\\ \frac{4}{3\,\mathrm{Pr}}\,\theta'' + F\theta' + (N_\mathrm{B}\theta'\varphi' + N_t\theta'^2) = 0,\\ \frac{4}{3}\,\varphi'' + F\varphi' + \frac{N_t}{N_\mathrm{B}}\,\theta'' = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathrm{Pr} = \nu^*(\rho c)_f/\varkappa = \mu^*(c)_f/\varkappa$ — число Прандтля; $\lambda = \nu^*U/K$ — параметр пористой среды; $\mathrm{R}_x = (1-\varphi_\infty)\beta g\,\Delta\theta/\nu^*$ — локальное число Рэлея; $N_r = (\rho_p - \rho_{f\infty})\,\Delta\varphi/[\rho_{f\infty}\beta\,\Delta\theta\,(1-\varphi_\infty)]$ — параметр плавучести; $N_\mathrm{B} = (\rho c)_p D_\mathrm{B}\,\Delta\varphi/[\nu^*(\rho c)_f]$ — параметр броуновского движения; $N_t = (\rho c)_p D_t\,\Delta\theta/[\nu^*(\rho c)_f T_\infty]$ — параметр термофореза; $M^2 = \sigma B_0^2 U/(c_1\rho_f)$ — магнитный параметр.

Граничные условия принимают вид

$$F' = 1, \quad F = -4V_0/3, \quad \theta = \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 0,$$
$$F' \to 0, \quad \theta \to 0, \quad \varphi \to 0 \quad \text{при} \quad \eta \to \infty.$$

Введя в (7) преобразования

$$\eta = \Big(\frac{g\beta}{b}\Big)^{\alpha_1}(\nu^*)^{b_1}\eta^*, \quad F = \Big(\frac{g\beta}{b}\Big)^{\alpha_1'}(\nu^*)^{b_1'}F^*,$$
$$\theta = \Big(\frac{g\beta}{b}\Big)^{\alpha_1''}(\nu^*)^{b_1''}\theta^*, \quad \varphi = \Big(\frac{g\beta}{b}\Big)^{\alpha_1''}(\nu^*)^{b_1''}\varphi^*$$

и полагая $F^* = f$, $\theta^* = \theta$, $\varphi^* = \varphi$, уравнения (7) можно записать в форме

$$\begin{gathered}(a+\zeta)f''' - \zeta\theta f''' - \zeta\theta' f'' - \frac{1}{2}\,f'^2 - (M+\lambda)f' + \frac{3}{4}\,ff'' + \zeta(\theta+\varphi) + \mathrm{R}_x(\theta - N_r\varphi) = 0,\\ \frac{4}{3\,\mathrm{Pr}}\,\theta'' + f\theta' + (N_\mathrm{B}\theta'\varphi' + N_t\theta'^2) = 0,\\ \frac{4}{3\,\mathrm{Sc}}\,\varphi'' + f\varphi' + \frac{N_t}{N_\mathrm{B}}\,\theta'' = 0,\end{gathered} \tag{8}$$

где $\mathrm{Le} = \nu^*/D_\mathrm{B}$ — число Льюиса.

Граничные условия принимают вид

$$\begin{gathered}f' = 1, \quad f = S, \quad \theta = \varphi = 1 \quad \text{при} \quad \eta^* = 0,\\ f' \to 0, \quad \theta \to 0, \quad \varphi \to 0 \quad \text{при} \quad \eta^* \to \infty,\end{gathered} \tag{9}$$

где $S = -(4/3)V_0(g\beta_1/b)^{-1/4}v^{-1/2}$ (значение $S > 0$ соответствует отсосу, $S < 0$ — вдуву).

2. Численное решение. Система уравнений (8) с граничными условиями (9) решалась численно с помощью схемы интегрирования Рунге — Кутты — Джилля [14] и метода пристрелки с пристрелочными параметрами $f''(0)$, $\theta'(0)$, $\varphi'(0)$. Система уравнений с заданными параметрами ζ, M, λ, Le, N_r, $N_{\rm B}$, N_t решается методом пристрелки до тех пор, пока не будут получены результаты желаемой степени точности, а именно 10^{-5}. Код написан с использованием пакета Mathematica, результаты решения представлены в виде графиков. Изучены развитие стационарного течения в пограничном слое, теплообмен и изменение относительного объема наночастиц на пористой растягивающейся поверхности в наножидкости при различных значениях параметра броуновского движения, параметра термофореза, параметра теплового излучения, магнитного параметра, параметра температурной зависимости вязкости и числа Льюиса. Далее подробно обсуждаются результаты.

3. Результаты исследования и их обсуждение. С использованием метода, описанного в п. **2**, выполнен численный расчет при $a = 1{,}0$ и различных значениях параметра температурной зависимости вязкости наножидкости ζ, магнитного параметра M, параметра вдува (отсоса) S, числа Прандтля Pr, параметра броуновского движения $N_{\rm B}$, параметра термофореза N_t и числа Льюиса Le.

С использованием алгоритма Рунге — Кутты — Джилля и метода пристрелки численно решены уравнения (8) с граничными условиями (9) при различных значениях управляющих параметров M, γ, λ, Le, N, N_r, $N_{\rm B}$, N_t. В таблице представлены значения приведенного числа Нуссельта $-\theta'(0)$, а также результаты, полученные в работах [8, 15, 16] при различных значениях Pr. Следует отметить, что при всех значениях Pr результаты расчетов хорошо согласуются. Из данных, приведенных в таблице, следует, что полученные результаты численных расчетов являются достоверными.

Проведено сравнение результатов численных расчетов без учета локального числа Рэлея R_x с известным точным решением. На рис. 2 показаны профили относительного объема наночастиц при различных значениях числа Льюиса Le, полученные в данной работе, и профили, соответствующие точному решению в работе [8]. Видно, что профили относительного объема наночастиц хорошо согласуются с теоретическим решением. При заданных значениях $N_{\rm B}$, N_t с увеличением числа Льюиса относительный объем наночастиц уменьшается, что обусловлено уменьшением толщины пограничного слоя относительного объема наночастиц.

На рис. 3 представлены типичные профили температуры и относительного объема наночастиц при различных значениях параметра броуновского движения $N_{\rm B}$. Видно, что с увеличением $N_{\rm B}$ температура жидкости увеличивается, а относительный объем наночастиц уменьшается. Следует отметить, что броуновское движение наночастиц на молекулярных и наноразмерных уровнях — ключевой наноразмерный механизм, обусловливающий их тепловое поведение, поскольку с уменьшением размера наночастицы интенсивность броуновского движения увеличивается.

Значения $-\theta'(0)$

Pr	$-\theta'(0)$			
	Данные работы [8]	Данные работы [15]	Данные работы [16]	Данные настоящей работы
0,07	0,0663	0,0656	0,0656	0,066 129
0,20	0,1691	0,1691	0,1691	0,169 136
0,70	0,4539	0,4539	0,5349	0,454 285
2,00	0,9113	0,9113	0,9113	0,911 423
7,00	1,8954	1,8954	1,8905	0,895 264
20,00	3,3539	3,3539	3,3539	3,353 853
70,00	6,4621	6,4622	6,4622	6,462 189

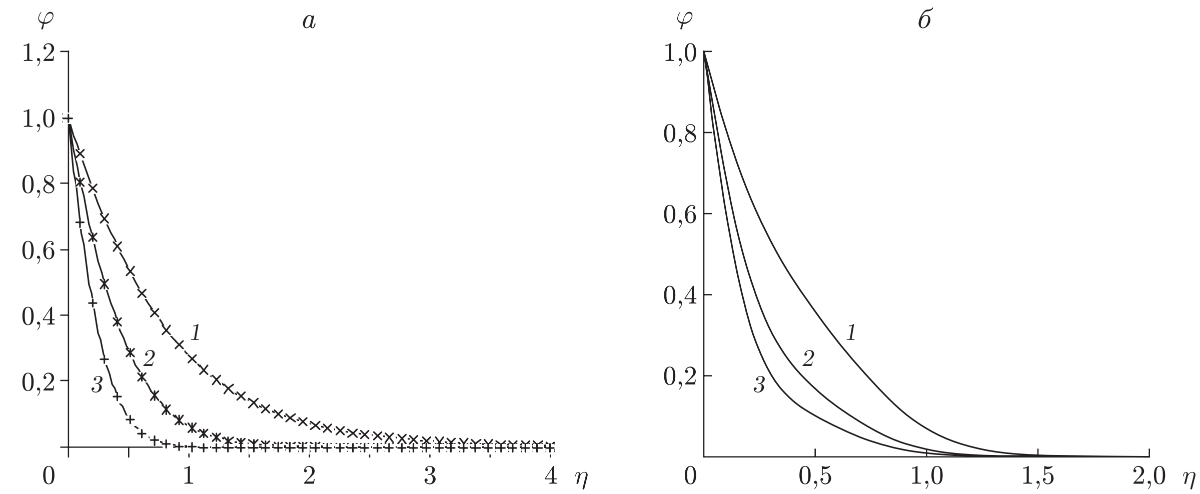


Рис. 2. Профили относительного объема наночастиц при $\mathrm{Pr} = 10$, $N_t = 0{,}1$, $N_{\mathrm{B}} = 0{,}1$:
а — результаты, полученные в настоящей работе, *б* — результаты, полученные в [8]; *1* — $\mathrm{Le} = 10$, *2* — $\mathrm{Le} = 20$, *3* — $\mathrm{Le} = 30$

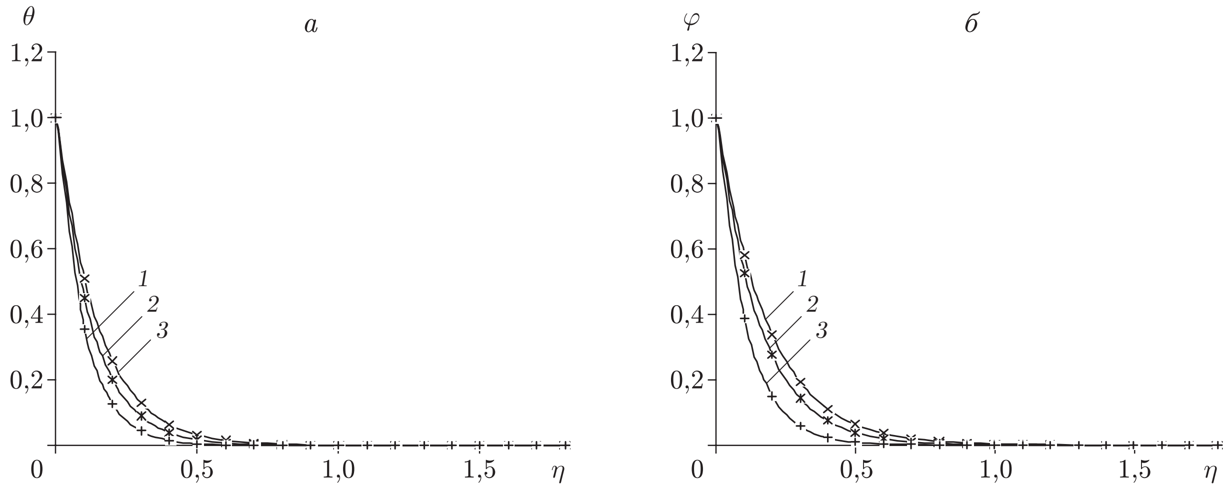


Рис. 3. Профили температуры (*а*) и относительного объема наночастиц (*б*) при $\mathrm{Pr} = 2{,}0$, $\mathrm{Le} = 3{,}0$, $N_t = 1{,}0$, $S = 2{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $\gamma = 1{,}0$, $N_r = 0{,}5$ и различных значениях N_{B}:
1 — $N_{\mathrm{B}} = 0{,}1$; *2* — $N_{\mathrm{B}} = 1{,}0$; *3* — $N_{\mathrm{B}} = 2{,}5$

На рис. 4 показано влияние параметра термофореза N_t на профили температуры и относительного объема наночастиц. Следует отметить, что с увеличением N_t температура жидкости увеличивается, тогда как относительный объем наночастиц уменьшается. В случае горячих поверхностей вследствие термофореза пограничный слой относительного объема наночастиц сдувается с поверхности, так как горячая поверхность отталкивает субмикронные частицы, в результате вблизи поверхности формируется относительно свободный от частиц слой. Вследствие этого наночастицы располагаются только снаружи. В частности, увеличению параметра термофореза N_t препятствует незначительное увеличение наклона профилей относительного объема наночастиц вблизи стенки и уменьшение объемной доли наночастиц. Это справедливо только при небольших значениях числа

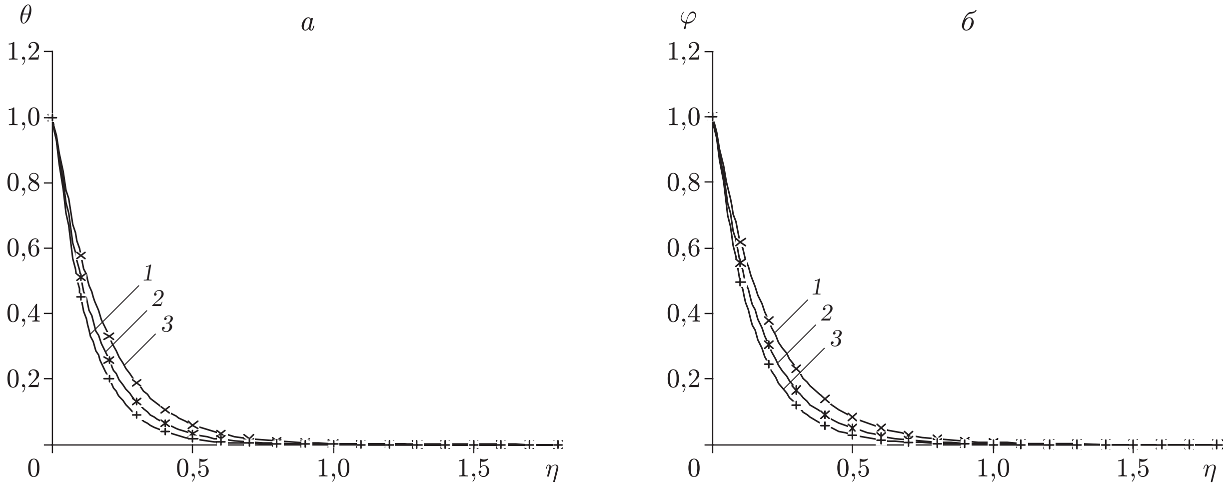


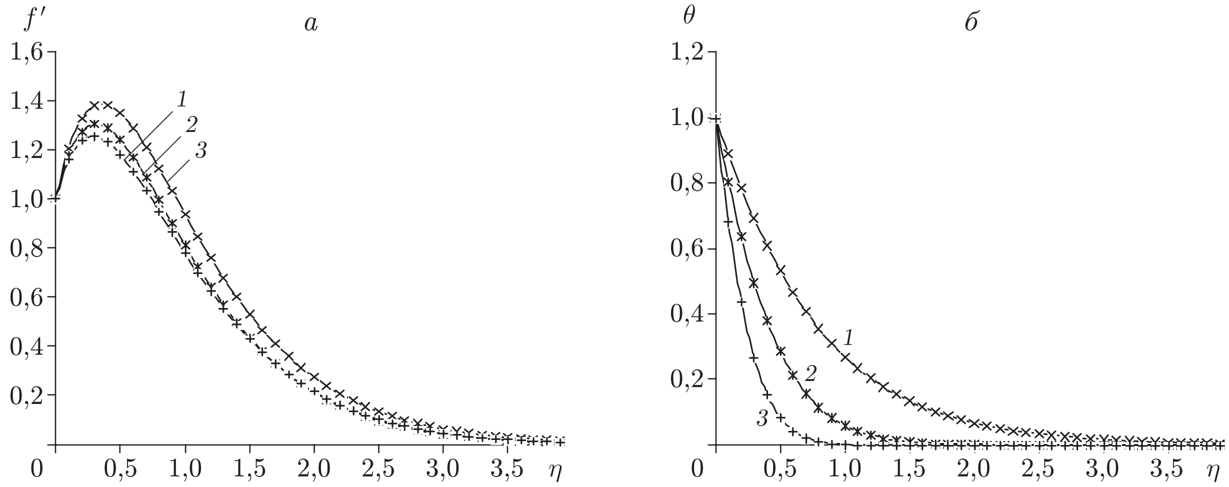
Рис. 4. Профили температуры (*а*) и относительного объема наночастиц (*б*) при $\mathrm{Pr} = 2{,}0$, $\mathrm{Le} = 3{,}0$, $N_{\mathrm{B}} = 1{,}0$, $S = 2{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $\gamma = 1{,}0$, $M = 1{,}0$, $N_r = 0{,}5$ и различных значениях N_t:
1 — $N_t = 0{,}1$; *2* — $N_t = 1{,}0$; *3* — $N_t = 2{,}0$

Льюиса, при которых влияние броуновской диффузии более существенно по сравнению с влиянием конвективного переноса. Однако при больших значениях числа Льюиса влияние диффузии мало́ по сравнению с влиянием конвекции, поэтому следует ожидать, что изменение параметра термофореза N_t приведет к значительному изменению толщины пограничного слоя относительного объема наночастиц.

На рис. 5,*а* представлены профили скорости при различных значениях параметра температурной зависимости вязкости наножидкости ζ. Видно, что при наличии равномерного отсоса скорость жидкости увеличивается с увеличением параметра ζ при конкретных значениях η, за исключением значений η вблизи стенки, а также вдали от нее (при $\eta = 4$). Это означает, что с увеличением параметра ζ вблизи стенки и вдали от нее скорость уменьшается (с увеличением значения η) медленнее. Это можно объяснить тем, что с увеличением параметра ζ и вязкости жидкости толщина пограничного слоя увеличивается менее существенно.

На рис. 5,*б*,*в* показано изменение поля температуры $\theta(\eta)$ и относительного объема наночастиц $\varphi(\eta)$ при наличии отсоса ($S = 0{,}5$) для различных значений ζ. Видно, что с увеличением ζ температура и относительный объем наночастиц уменьшаются. Увеличение параметра температурной зависимости вязкости наножидкости ζ приводит к уменьшению толщин теплового пограничного слоя и пограничного слоя относительного объема наночастиц, что обусловливает уменьшение температуры и относительного объема наночастиц. С уменьшением θ и φ скорость жидких частиц уменьшается. Таким образом, в этом случае на наночастицы действуют две противоположные силы, одна из которых вызывает увеличение скорости жидкости вследствие уменьшения вязкости наножидкости (с увеличением ζ), а другая — уменьшение скорости жидкости за счет уменьшения температуры θ (так как θ уменьшается с увеличением ζ). Вблизи поверхности, где температура θ высокая, преобладает первая сила, а вдали от поверхности, где температура θ низкая, — вторая сила.

На рис. 6 представлены типичные профили скорости и температуры при различных значениях магнитного параметра. Видно, что вследствие равномерного термофоретического осаждения частиц скорость жидкости уменьшается, а температура увеличивается, тогда как относительный объем наночастиц в жидкости не является существенным при



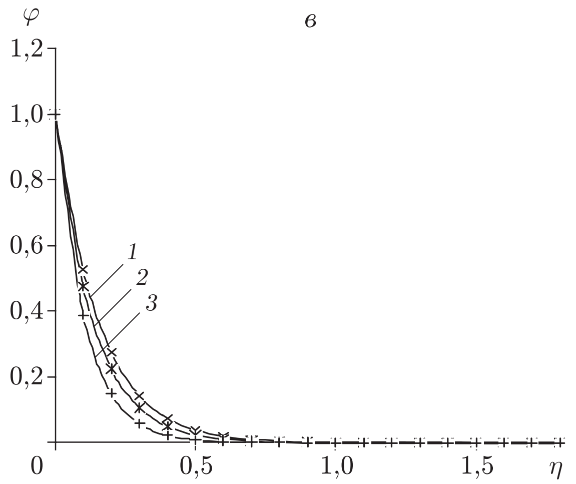


Рис. 5. Профили скорости (*а*), температуры (*б*) и относительного объема наночастиц (*в*) при $\mathrm{Pr} = 2{,}0$, $\mathrm{Le} = 3{,}0$, $N_{\mathrm{B}} = 1{,}0$, $S = 2{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $N = 1{,}0$, $N_r = 0{,}5$ и различных значениях ζ:
1 — $\zeta = 0{,}5$; *2* — $\zeta = 1{,}0$; *3* — $\zeta = 3{,}0$

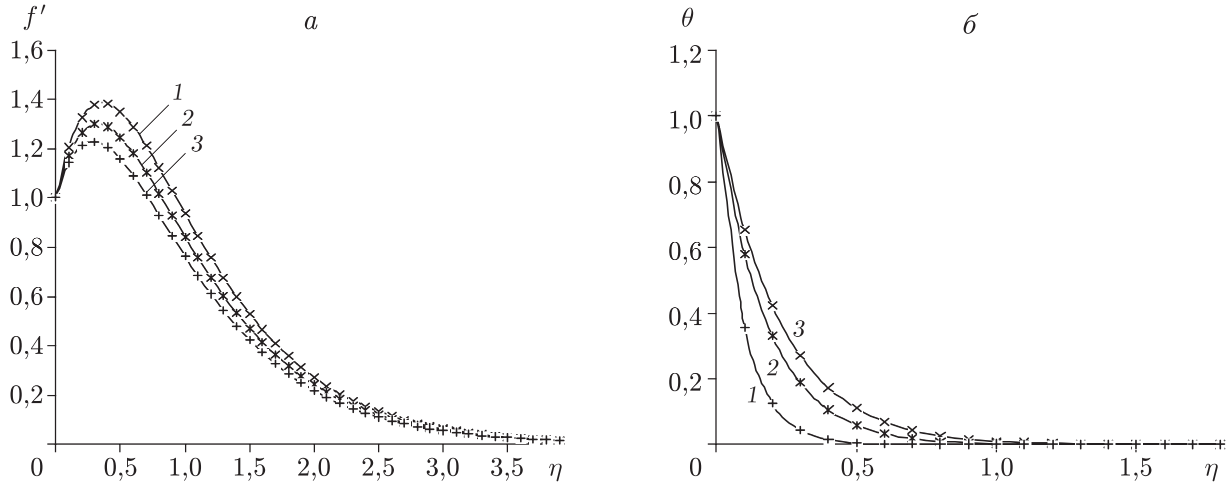


Рис. 6. Профили скорости (*а*) и температуры (*б*) при $\mathrm{Pr} = 2{,}0$, $\mathrm{Le} = 3{,}0$, $N_{\mathrm{B}} = 1{,}0$, $S = 2{,}0$, $\lambda = 1{,}0$, $N = 1{,}0$, $N_r = 0{,}5$ и различных значениях M:
1 — $M = 0{,}5$; *2* — $M = 3{,}0$; *3* — $M = 4{,}0$

увеличении напряженности магнитного поля. Воздействие поперечного магнитного поля на электропроводящую жидкость приводит к появлению силы типа силы сопротивления, называемой силой Лоренца. Эта сила замедляет движение жидкости и увеличивает ее температуру. Данный результат является ожидаемым, так как магнитное поле приводит в действие силу торможения в естественном конвективном течении. Магнитное поле, перемещающееся со свободным потоком, индуцирует движущую силу, которая замедляет движение жидкости и увеличивает толщину пограничного слоя.

Заключение. В данной работе теоретически изучена задача о стационарном течении в пограничном слое наножидкости на пористой растягивающейся поверхности при различных значениях параметров потока. Модель, используемая для описания движения наножидкости, учитывает броуновское движение и термофорез при наличии зависимости вязкости наножидкости от температуры. Установлено, что объемная доля наночастиц является определяющим параметром при изучении влияния наночастиц на поле течения и распределение температуры. Следует отметить, что при наличии магнитного поля термофоретическое осаждение частиц в случае броуновского диффузионного движения оказывает существенное влияние на поле течения, а следовательно, и на теплообмен и скорость распространения наночастиц от пластины в жидкость. При наличии равномерного отсоса вязкой несжимаемой жидкости механизм увеличения параметра температурной зависимости вязкости наножидкости заключается в том, что скорость потока увеличивается. В свою очередь это приводит к уменьшению температуры и относительного объема наночастиц. Выявлены механизмы, которые являются существенными в процессе осаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Choi S.** Enhancing thermal conductivity of fluids with nanoparticles // Developments and applications of non-Newtonian flows / Ed. by D. A. Siginer, H. P. Wang. N. Y.: ASME, 1995. FED — V. 231/MD — V. 66. P. 99–105.
2. **Masuda H., Ebata A., Teramae K., Hishinuma N.** Alteration of thermal conductivity and viscosity of liquid by dispersing ultra-fine particles // Netsu Bussei. 1993. V. 7. P. 227–233.
3. **Buongiorno J., Hu W.** Nanofluid coolants for advanced nuclear power plants // Proc. of the ICAPP'05, Seoul, May 15–19, 2005. Paper 5705.
4. **Buongiorno J.** Convective transport in nanofluids // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 2006. V. 128. P. 240–250.
5. **Kuznetsov A. V., Nield D. A.** Natural convective boundary-layer flow of a nanofluid past a vertical plate // Intern. J. Therm. Sci. [Electron. resource]. doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2009.07.015.
6. **Nield D. A., Kuznetsov A. V.** The Cheng — Minkowycz problem for natural convective boundary layer flow in a porous medium saturated by a nanofluid // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2009. V. 52. P. 5792–5795.
7. **Cheng P., Minkowycz W. J.** Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike // J. Geophys. Res. 1977. V. 82, N 14. P. 2040–2044.
8. **Khan W. A., Pop I.** Boundary-layer flow of a nanofluid past a stretching sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2010. V. 53. P. 2477–2483.
9. **Yurusoy M., Pakdemirli M.** Symmetry reductions of unsteady three-dimensional boundary layers of some non-Newtonian fluids // Intern. J. Engng Sci. 1997. V. 35. P. 731–740.
10. **Yurusoy M., Pakdemirli M.** Exact solutions of boundary layer equations of a special non-Newtonian fluid over a stretching sheet // Mech. Res. Comm. 1999. V. 26. P. 171–175.

11. **Yurusoy M., Pakdemirli M., Noyan O. F.** Lie group analysis of creeping flow of a second grade fluid // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36. P. 955–960.
12. **Batchelor G. K.** An introduction to fluid dynamics. L.: Cambridge Univ. Press, 1987.
13. **Ling J. X., Dybbs A.** Forced convection over a flat plate submersed in a porous medium: variable viscosity case. N. Y., 1987. (Paper / Amer. Soc. Mech. Engrs; 87-WA/HT-23).
14. **Gill S.** A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951. V. 47. P. 96–108.
15. **Wang C. Y.** Free convection on a vertical stretching surface // Z. angew. Math. Mech. 1989. Bd 69. S. 418–420.
16. **Gorla R. S. R., Sidawi I.** Free convection on a vertical stretching surface with suction and blowing // Appl. Sci. Res. 1994. V. 52. P. 247–257.

Поступила в редакцию 6/XII 2010 г.