

**ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ  
КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ  
ЖИДКОСТИ ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВКЛЮЧЕНИИ ПОПЕРЕЧНОГО  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

*В. И. Хоничев, В. И. Яковлев*

*(Новосибирск)*

В работе исследованы вихревые течения, возникающие во вращающемся круговом цилиндре несжимаемой проводящей жидкости при внезапном включении поперечного магнитного поля. Исследование проведено для начального этапа, когда вторичное течение в основном определяется силами Лоренца, а влияние вязкости и конвективного переноса вихря вторичным течением пренебрежимо мало. На магнитное число Рейнольдса  $R_m$  основного вращательного движения ограничений не наложено, число  $R_m'$ , вычисленное по характерной скорости вторичного течения, считалось малым.

1. Магнитная гидродинамика вращающихся жидкостей вызывает интерес с точки зрения приложений к проблемам астрофизики и геофизики [1]. Существенная часть рассматриваемых вопросов связана с нестационарными процессами взаимодействия вращающейся проводящей жидкости с магнитным полем.

Предлагаемая работа посвящена изучению вторичных течений, возникающих во вращающейся жидкости при изменении внешнего магнитного поля. Принята идеализированная модель вращающегося жидкого цилиндра, магнитное поле включается «мгновенно». Полученные результаты могут быть полезны при изучении лабораторных моделей астрофизических и геофизических явлений.

Метод решения и упрощающие предположения подобны принятым в [2].

В работе [2] рассмотрено вихревое течение, возникающее в длинном круговом цилиндре проводящей жидкости при внезапном включении или выключении внешнего магнитного поля. Процесс диффузии поля внутри жидкости, имеющей место при изменении внешнего магнитного поля, связан с возникновением электрического тока в жидкости и сил Лоренца. Если последние непотенциальны, то они не могут быть уравновешены градиентом давления и приводят к возникновению вихревого течения. В [2] рассмотрена простая геометрия, приводящая к непотенциальным силам Лоренца — геометрия с однородным внешним полем, направленным перпендикулярно оси цилиндра.

В работе показано, что если магнитное число Рейнольдса мало, то в процессе возникновения вихревого течения внутри цилиндра можно выделить начальный этап продолжительностью порядка  $t_0 = 4\pi\sigma a^2/c^2$ , где  $a$  — радиус цилиндра,  $\sigma$  — проводимость жидкости. На этом этапе течение определяется только силами Лоренца, влияние других факторов (вязкость, конвективный перенос вихрей) пренебрежимо мало; их влияние начинает играть существенную роль позднее. Течение, устанавливаемое к концу этого начального этапа, рассчитано в работе [2].

Представляет интерес изучение вихревого течения, возникающего в процессе проникновения внешнего поля в движущуюся жидкость. В этом случае процесс установления магнитного поля внутри жидкости происходит как за счет диффузии, так и за счет конвективного переноса силовых линий. Распределение сил Лоренца и распределение вихрей в жидкости при этом усложняется.

В данной работе процесс возникновения вторичного вихревого течения в движущейся жидкости рассмотрен на примере вращающегося жидкого цилиндра. Рассматривается проводящая жидкость, находящаяся внутри непроводящего длинного цилиндрического контейнера с внутренним радиусом  $a$ . Контейнер с жидкостью вращаются относительно оси цилиндра с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ . В момент  $t = 0$  мгновенно включается внешнее однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно оси цилиндра. Необходимо определить распределение магнитного поля и сил Лоренца внутри жидкости, и на этой основе найти распределение скорости вторичного течения.

При  $\Omega_0 = 0$  рассматриваемая задача совпадает с задачей [2], поэтому приводимое ниже решение является обобщением [2] на случай вращающегося цилиндра. Так же как в [2], магнитное число Рейнольдса, определенное по характерной скорости  $V$  вторичного течения, предполагается малым

$$(1.1) \quad R_m' = 4\pi\sigma V a / c^2 \ll 1$$

(штрих подчеркивает, что данное число вычислено по скорости вторичного течения).

Относительно магнитного числа Рейнольдса  $R_m = 4\pi\sigma\Omega_0 a^2 / c^2$ , вычисленного по характерной скорости  $a\Omega_0$  основного вращательного движения, ограничений не вводится. Так как  $R_m = 2\pi t_0 / T$  ( $t_0 = = 4\pi\sigma a^2 / c^2$  — время проникновения поля,  $T = 2\pi / \Omega_0$  — время одного оборота цилиндра), то при  $R_m \ll 1$  вращение не оказывает влияния на процесс проникновения поля и характер вторичного течения. При  $R_m \gtrsim 1$  это влияние существенно и характер вторичного течения резко отличается от случая покоящегося цилиндра.

В данной работе, как и в [2], рассматривается не весь процесс проникновения и последующего видоизменения вихревого течения. Целью исследования является получение картины течения к моменту почти полного установления стационарного магнитного поля в цилиндре (т. е. к концу начального этапа). Если в [2] это течение установившееся, то в случае вращающегося цилиндра силы Лоренца не исчезают с установлением стационарного распределения магнитного поля и их влияние на вторичное течение продолжается. В работе за момент установления поля условно принят момент времени  $t = t_0$ . К этому моменту времени относится большинство графического материала, представленного ниже, хотя полученное решение справедливо в пределах нескольких временных «масштабов»  $t_0$  (пока влияние вязкости и конвективного переноса вихрей не станет заметным).

2. Проведем вычисление распределения магнитного поля. В цилиндрической системе координат  $(r, \alpha, z)$  с углом  $\alpha$ , отсчитываемым от направления приложенного однородного поля  $\mathbf{H}_0$ , искомое магнитное поле  $\mathbf{H}$  имеет две компоненты  $(H_r(r, \alpha, t), H_\alpha(r, \alpha, t))$ , определяемые вектор-потенциалом  $\mathbf{A} = A(r, \alpha, t)\mathbf{e}_z$

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \alpha}, -\frac{\partial A}{\partial r}, 0 \right)$$

Изменение магнитного поля при его проникновении во вращающийся цилиндр описывается уравнениями

$$(2.1) \quad \Delta A_1 = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial t} = -\Omega_0 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} + v_m \Delta A_2$$

Здесь  $v_m = c^2 / 4\pi\sigma$ , индексы 1, 2 относятся к полю вне и внутри цилиндра. В конвективном члене во втором уравнении за скорость дви-

жения принята скорость  $v_0 = \Omega_0 r e_\alpha$  основного вращательного движения. На основании (1.1) вторичное течение на процесс проникновения поля влияния не оказывает. Начальные и граничные условия те же, что и в [2] для неподвижного цилиндра

$$(2.2) \quad A_1(r, \alpha, 0) = H_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \alpha, \quad A_2(r, \alpha, 0) = 0$$

$$(2.3) \quad A_1(a, \alpha, t) = A_2(a, \alpha, t), \quad \frac{\partial A_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial A_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$(2.4) \quad A_1(r, \alpha, t) \rightarrow H_0 r \sin \alpha \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

Решение ищем в виде

$$A_1(r, \alpha, t) = f_1(r, t) e^{i\alpha}, \quad A_2(r, \alpha, t) = f_2(r, t) e^{i\alpha}$$

Для комплексных функций  $f_1(r, t)$ ,  $f_2(r, t)$  получаем уравнения

$$(2.5) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_1}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} f_1(r, t) = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{v_m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f_2}{\partial r} \right) - \left( \frac{v_m}{r^2} + i\Omega_0 \right) f_2(r, t)$$

$$(2.6) \quad f_1(r, 0) = -iH_0 \left( r - \frac{a^2}{r} \right), \quad f_2(r, 0) = 0$$

$$(2.7) \quad f_1(a, t) = f_2(a, t), \quad \frac{\partial f_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial f_2}{\partial r} \Big|_{r=a}$$

$$(2.8) \quad f_1(r, t)_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -iH_0 r$$

Использование преобразования Лапласа позволяет получить решение выписанных уравнений. Выражения для  $A_1(r, \alpha, t)$ ,  $A_2(r, \alpha, t)$  имеют вид

$$(2.9) \quad A_1(r, \alpha, t) = -iH_0 r e^{i\alpha} \left\{ 1 - \frac{a^2}{r^2} \left[ 1 + 2i \frac{J_1(i\beta)}{\beta J_0(i\beta)} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\alpha_n^2 + iR_m)\tau}}{\alpha_n^2 + iR_m} \right] \right\}$$

$$(2.10) \quad A_2(r, \alpha, t) = 2H_0 a e^{i\alpha} \left\{ -\frac{J_1(i\beta\xi)}{\beta J_0(i\beta)} + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \xi) e^{-(\alpha_n^2 + iR_m)\tau}}{J_1(\alpha_n) (\alpha_n^2 + iR_m)} \right\}$$

Здесь  $\beta = \sqrt{iR_m}$  — комплексное число,  $\alpha_n$  — положительные нули функции  $J_0(x)$ ,  $\tau = (v_m/a^2) t = t/t_0$  — безразмерное время,  $\xi = r/a$  — безразмерный радиус. В предельном случае  $\beta = 0$  ( $\Omega_0 = 0$ ) вещественная часть (2.10) совпадает с результатом [2].

При  $\tau > 1$ , т. е. по истечении времени порядка  $t_0$ , ряды в (2.9), (2.10) практически обращаются в нуль и решение становится стационарным. Стационарное магнитное поле в рассматриваемом случае отличается от однородного поля  $H_0$ , так как силовые линии закручиваются вращающимся цилиндром.

Картины силовых линий, соответствующих полученному решению, в графическом виде не приводятся, так как наглядное представление о них можно получить из иллюстративных материалов, представленных в [3], где численным методом исследовано поведение магнитного поля во вращающейся проводящей жидкости.

Различие принятых в [3] и в данной работе начальных условий по полю несущественно для установившейся картины распределения магнитного поля. Существенным является различие в граничных условиях. В данной работе вращающийся цилиндр находится в непроводящей среде и в решении использовано естественное граничное условие на бесконечности. В [3] предполагается, что вне вращающейся жидкости с конечной проводимостью  $\sigma$  имеется граница с неподвижной бесконечно проводящей

жидкостью. Это условие приводит к отмеченному в [3] очень сильному увеличению магнитного поля на внешней границе вращающейся жидкости при больших значениях числа  $R_m$ . В рассматриваемой задаче установившееся магнитное поле вне цилиндра при  $R_m \rightarrow \infty$  совпадает с начальным распределением и максимальное значение поля равно  $2H_0$  (при  $\alpha = +\pi/2$ ), т. е. достигается усиление поля в два раза.

Выталкивание магнитного поля из вращающейся жидкости при больших  $R_m$  не связано с использованными граничными условиями.

3. Проведем вычисление распределения вихря скорости. В движущейся проводящей жидкости изменение вихря  $\mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{v}$  происходит как за счет конвективного переноса и диффузии из-за вязкости, так и под действием непотенциальных сил Лоренца  $c^{-1} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]$ . В случае плоского течения несжимаемой жидкости уравнение для вихря имеет вид

$$(3.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \omega + (\mathbf{v} \nabla) \omega = \frac{1}{\rho c} \text{rot } [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] + \nu \Delta \omega$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\mathbf{v}_0 = \Omega_0 r \mathbf{e}_\alpha$  — заданная скорость вращательного движения, через  $\mathbf{v}$  обозначена скорость вторичного течения.

В [2] показано, что на распределение вихря, устанавливающееся к моменту  $t_0$  полного проникновения магнитного поля в цилиндр, вязкость и конвективный член (в рассматриваемом случае это будет один из двух конвективных членов) влияния не оказывают.

Как видно из оценок

$$(3.2) \quad \left| \frac{(\mathbf{v} \nabla) \omega}{\partial \omega / \partial t} \right| \sim \frac{Va}{v_m} = R_m', \quad \left| \frac{\nu \Delta \omega}{\partial \omega / \partial t} \right| \sim \frac{\nu}{v_m}$$

допущения (1.1) и неравенства  $\nu/v_m \ll 1$ , имеющего место для жидких металлов и электролитов, последними членами в обеих частях уравнения (3.1) можно пренебречь по сравнению с первым членом.

В результате получаем уравнение

$$(3.3) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = \frac{1}{\rho c} \text{rot}_z [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] \quad (\omega = \omega e_z)$$

которое только конвективным членом  $\Omega_0 d\omega/d\alpha$ , связанным с основным вращательным движением, отличается от соответствующего уравнения в [2]. Правая часть уравнения (3.3) вычисляется по известному решению (2.10) для магнитного поля. Вычисления дают

$$(3.4) \quad \frac{1}{\rho c} \text{rot}_z [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \text{Re} \{ F_1(r, t) e^{2i\alpha} + F_2(r, t) \}$$

$$(3.5) \quad F_1(r, t) = \frac{H_0^2}{\pi \rho a^2} \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{1}{\beta J_0(i\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[J_1(i\beta\xi)]^2}{J_1(\alpha_n)} \frac{d}{d\xi} \left[ \frac{J_1(\alpha_n \xi)}{J_1(i\beta\xi)} \right] e^{-(\alpha_n^2 + iR_m)\tau} - \right. \\ \left. - 2i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \xi) \alpha_k J_1'(\alpha_k \xi) e^{-(\alpha_n^2 + \alpha_k^2 + 2iR_m)\tau} (\alpha_k^2 - \alpha_n^2)}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_k) (\alpha_n^2 + iR_m) (\alpha_k^2 + iR_m)} \right\}$$

$$(3.6) \quad F_2(r, t) = \frac{H_0^2}{\pi \rho a^2} \frac{1}{\xi} \left\{ - \frac{1}{\beta J_0(i\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(d/d\xi) [J_1(\alpha_n \xi) J_1(i\beta\xi)]}{J_1(\alpha_n)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\alpha_n^2 + iR_m}{\alpha_n^2 - iR_m} e^{-(\alpha_n^2 - iR_m)\tau} - iR_m \left( \frac{J_1(i\beta\xi)}{\beta J_0(i\beta)} \right)^* \frac{J_1'(i\beta\xi)}{J_0(i\beta)} + \right. \\ \left. + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \xi) \alpha_k J_1'(\alpha_k \xi) (\alpha_n^2 - \alpha_k^2) e^{-(\alpha_n^2 + \alpha_k^2)\tau}}{J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_k) (\alpha_n^2 - iR_m) (\alpha_k^2 + iR_m)} \right\}$$

Комплексные функции  $F_1(r, t)$ ,  $F_2(r, t)$  не зависят от угла  $\alpha$ , поэтому зависимость от последнего описывается лишь множителем  $\exp(2i\alpha)$  в первом слагаемом (3.4). Из-за этого множителя при  $\Omega_0 = 0$  вихревое течение распадается на четыре отдельных ячейки. Второе слагаемое  $F_2(r, t)$  связано с вращением и отсутствует в случае покоящегося цилиндра.

Наличие множителя  $\exp(-\alpha_n^2 \tau)$  в выражениях (3.5), (3.6) приводит к тому, что при  $\tau > 1$  силовое воздействие магнитного поля на вращающуюся жидкость

$$(3.7) \quad \frac{1}{\rho c} \operatorname{rot}_z [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] = \operatorname{Re} \left\{ i R_m \frac{H_0^2}{\pi \rho a^2} \frac{1}{\xi} \left( \frac{J_1(i\beta\xi)}{\beta J_0(i\beta)} \right)^* \frac{J_1'(i\beta\xi)}{J_0(i\beta)} \right\}$$

перестает зависеть от угла  $\alpha$  и времени  $t$ . (Здесь звездочка обозначает комплексно-сопряженную величину.) Эта величина наряду с вязкостью определяет установившееся течение, которое для случая  $R_m \gg 1$  было исследовано в [4].

Решение уравнения (3.3) с правой частью (3.4), удовлетворяющее начальному условию  $\omega(r, \alpha, 0) = 2\Omega_0$ , ищется в комплексном виде

$$(3.8) \quad \omega(r, \alpha, t) = 2\Omega_0 + \omega_1(r, \alpha, t) + \omega_2(r, t) \quad \omega_1 = \varphi(r, t) e^{2i\alpha}$$

Неизвестные  $\varphi(r, t)$ ,  $\omega_2(r, t)$  удовлетворяют нулевым начальным условиям и уравнениям

$$d\varphi/dt + 2i\Omega_0\varphi = F_1(r, t), \quad d\omega_2/dt = F_2(r, t)$$

Опуская промежуточные вычисления, включающие в себя операции суммирования рядов при помощи контурного интегрирования, результат интегрирования можно представить в виде

$$(3.9) \quad \omega_1(r, \alpha, t > t_0) = \frac{H_0^2 e^{2i(\alpha - \Omega_0 t)}}{4\pi \rho \nu_m} \Phi_1(\xi), \quad \omega_2(r, t > t_0) = \frac{H_0^2}{4\pi \rho \nu_m} \Phi_2(\xi, \tau)$$

$$(3.10) \quad \Phi_1(\xi) = \frac{2i}{\xi} \left\{ \frac{J_2(i\beta\xi) J_1(\beta\xi)}{\beta J_0(i\beta) J_0(\beta)} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n \xi) I_1(\alpha_n \xi) \alpha_n^2}{I_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n) (\alpha_n^4 + R_m^2)} \right\}$$

$$(3.11) \quad \Phi_2(\xi, \tau) = -\frac{4}{\xi} \left\{ \frac{J_1(i\beta\xi) J_0(\beta) J_1(\beta\xi) [1 - (\beta\xi)^2] + J_1(\beta) \beta^2 \xi J_1'(\beta\xi)}{\beta J_0(i\beta) 2J_0^2(\beta) \beta \xi} + \right. \\ \left. + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \xi) J_1'(i\alpha_n \xi) \alpha_n^2}{J_1(\alpha_n) J_0(i\alpha_n) (\alpha_n^2 - iR_m)^2} + i R_m \tau \left( \frac{J_1(i\beta\xi)}{\beta J_0(i\beta)} \right)^* \frac{J_1'(i\beta\xi)}{J_0(i\beta)} \right\}$$

Здесь приведено решение, справедливое вследствие замены  $\exp(-\alpha_n^2 \tau)$  на нуль только при  $\tau \gg 1$ . Практически оно пригодно с момента  $\tau = 1$ , так как допускаемая при этом погрешность невелика.

В случае  $R_m \ll 1$  решение упрощается

$$\operatorname{Re} \omega_1(r, \alpha, t > t_0) = \frac{H_0^2}{\pi \rho \nu_m} \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{R_m}{32} \xi^2 \cos 2(\alpha - \Omega_0 t) + \right. \\ \left. + 2 \sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_2(\alpha_n \xi) I_1(\alpha_n \xi) \alpha_n^2}{I_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n) (\alpha_n^4 + R_m^2)} \right\} \\ \operatorname{Re} \omega_2(r, \alpha, t > t_0) = \frac{H_0^2}{4\pi \rho \nu_m} \frac{R_m}{\xi} \left\{ \frac{\xi}{2} \left( \frac{1}{2} - \xi^2 \right) + \right. \\ \left. + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\alpha_n \xi) [I_0(\alpha_n \xi) - (\alpha_n \xi)^{-1} I_1(\alpha_n \xi)]}{J_1(\alpha_n \xi) I_0(\alpha_n) \alpha_n^4} - \xi \tau \right\}$$

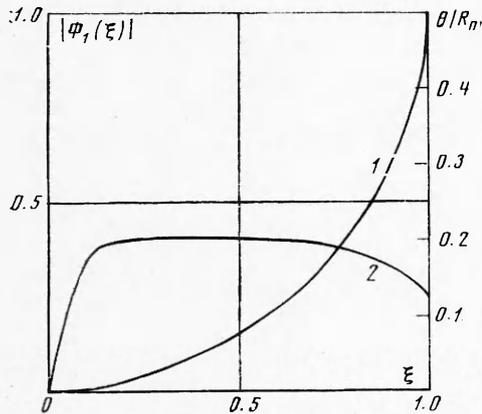
Для случая покоящегося цилиндра ( $\Omega_0 = 0, R_m = 0$ ) вихрь  $\omega_2$  исчезает, а  $\text{Re } \omega_1(r, \alpha, t > t_0)$  совпадает с результатом [2]. (Различие постоянных множителей вызвано использованием разных систем единиц.)

Безразмерные функции  $\Phi_1(\xi), \Phi_2(\xi, \tau)$  были вычислены для трех значений  $R_m$  (0.01, 0.1 1.0); результаты приведены в графическом виде. На фиг. 1 представлены модуль (кривая 1) и аргумент (кривая 2) функции

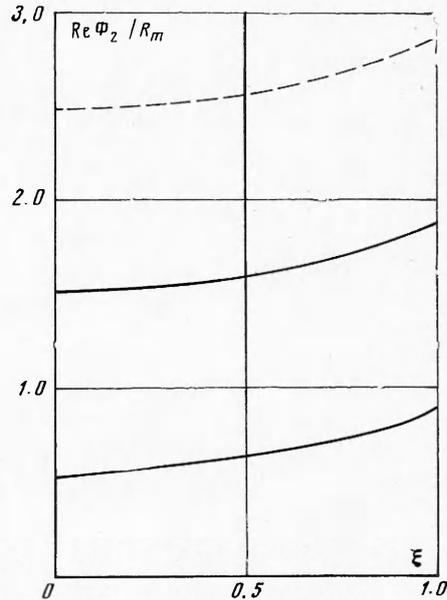
$$\Phi_1(\xi) = |\Phi_1(\xi)| e^{-i[\pi/2 - \theta(\xi)]}$$

Из-за слабой зависимости  $|\Phi_1(\xi)|$  от  $R_m$  три кривые сливаются в одну. Угол  $\theta$  меняется почти пропорционально числу  $R_m$ , поэтому на фиг. 1 приведена зависимость  $\theta(\xi) / R_m$ , которая для трех  $R_m$  изображается одной кривой.

Так как вещественное значение  $\omega_2(r, t)$  полностью определяется одной вещественной частью  $\Phi_2(\xi, \tau)$ , на фиг. 2 нанесены зависимости  $\text{Re } \Phi_2(\xi, \tau)$



Фиг. 1



Фиг. 2

для двух значений  $\tau$  (1.0, 2.0) (сплошные кривые). Вследствие линейной зависимости  $\Phi_2(\xi, \tau)$  от  $\tau$  по приведенным данным можно построить функцию  $\text{Re } \Phi_2(\xi, \tau)$  для любого момента времени  $\tau$  (для наглядности на фиг. 2 пунктиром указана кривая для  $\tau = 3$ ).

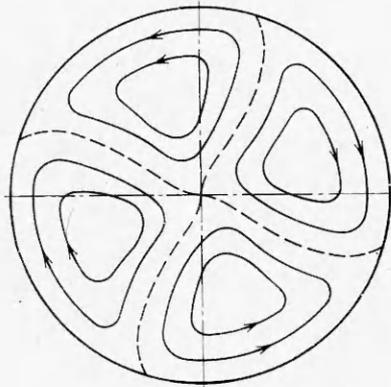
Из (3.8) следует, что исследуемое вторичное течение представляет собой наложение двух качественно различных течений. Первое из них, определяемое вихрем  $\omega_1(r, \alpha, t)$ , содержащим экспоненциальный множитель  $\exp(2i\alpha)$ , имеет структуру, состоящую из четырех отдельных ячеек. Схематически это течение изображено на фиг. 3. В каждой из ячеек жидкость циркулирует в направлении, противоположном направлению циркуляции в соседней ячейке, т. е.  $\omega_1$  меняет знак при переходе границы между ячейками. Следовательно, эта граница определяется условием  $\text{Re } \omega_1(r, \alpha, t) = 0$ . Уравнения  $\alpha_0 = \alpha_0(\xi)$  радиальных участков границ ячеек, показанных на фиг. 3 пунктиром, принимают вид

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \theta(\xi) + n \frac{\pi}{2} + \Omega_0 t$$

где  $n = 0, 1, 2, 3$  соответственно для каждой из четырех ячеек; последнее слагаемое  $\Omega_0 t$  обеспечивает вращение ячеек с постоянной угловой скоростью  $\Omega_0$ .

В общем случае  $\Omega_0 \neq 0$  (т. е.  $R_m \neq 0$ ) эти границы являются закрученными. Угол закручивания  $1/2 \theta(\xi)$ , как видно из фиг. 1, прямо пропорционален  $R_m$ ; при  $R_m = 1$  этот угол достигает  $12^\circ$ . Из (3.10) видно, что рассматриваемое «ячеистое» течение при  $t > t_0$  перестает зависеть от времени и только переносится в пространстве основным вращением с угловой скоростью  $\Omega_0$ .

Течение, описываемое вихрем  $\omega_2(r, t)$ , полностью осесимметрично. Данное осесимметричное течение при  $t > t_0$  продолжает зависеть от времени: вихрь  $\omega_2$ , следовательно, и скорость этого течения линейно зависят от времени. Это связано с тем,



Фиг. 3

что после установления стационарного состояния магнитное поле продолжает оказывать силовое воздействие («сопротивление») на вращающуюся жидкость и это воздействие осесимметрично (3.7). Указанная нестационарность приводит к тому, что при больших  $t$  данное течение становится преобладающим и вторичное течение начинает приближаться к осесимметричному. В случае малых значений числа  $R_m$  необходимое для этого время окажется достаточно большим и данное рассмотрение, не учитывающее сил вязкости и конвективного переноса вихрей вторичным течением, раньше станет непригодным. В случае  $R_m \gg 1$  течение, соответствующее  $\omega_2$ , быстро становится определяющим. Далее определено поле скоростей и приведены картины линий тока.

4. Поле скоростей вторичного течения определяется уравнениями

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = \omega(r, \alpha, t) \mathbf{e}_z$$

из которых следует:

$$(4.1) \quad \mathbf{v} = \operatorname{rot} [\Psi(r, \alpha, t) \mathbf{e}_z] = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \mathbf{e}_r - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_\alpha$$

$$(4.2) \quad \Delta \Psi = -\omega = -\frac{H_0^2}{4\pi\rho\nu_m} \{ \Phi_1(\xi) e^{2i(\alpha - R_m \tau)} + \Phi_2(\xi, \tau) \}$$

В правой части последнего уравнения член  $2\Omega_0$ , не относящийся к вторичному течению, опущен. Решение для функции тока ищется в виде

$$(4.3) \quad \Psi(r, \alpha, t) = \frac{H_0^2 a^2}{4\pi\rho\nu_m} \psi(\xi, \alpha, \tau), \quad \psi(\xi, \alpha, \tau) = \psi_1(\xi) e^{2i(\alpha - R_m \tau)} + \psi_2(\xi, \tau)$$

Ограниченные при  $\xi = 0$  функции  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_2(\xi, \tau)$  определяются уравнениями

$$(4.4) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\psi_1}{d\xi} \right) - \frac{4}{\xi^2} \psi_1 = -\Phi_1(\xi)$$

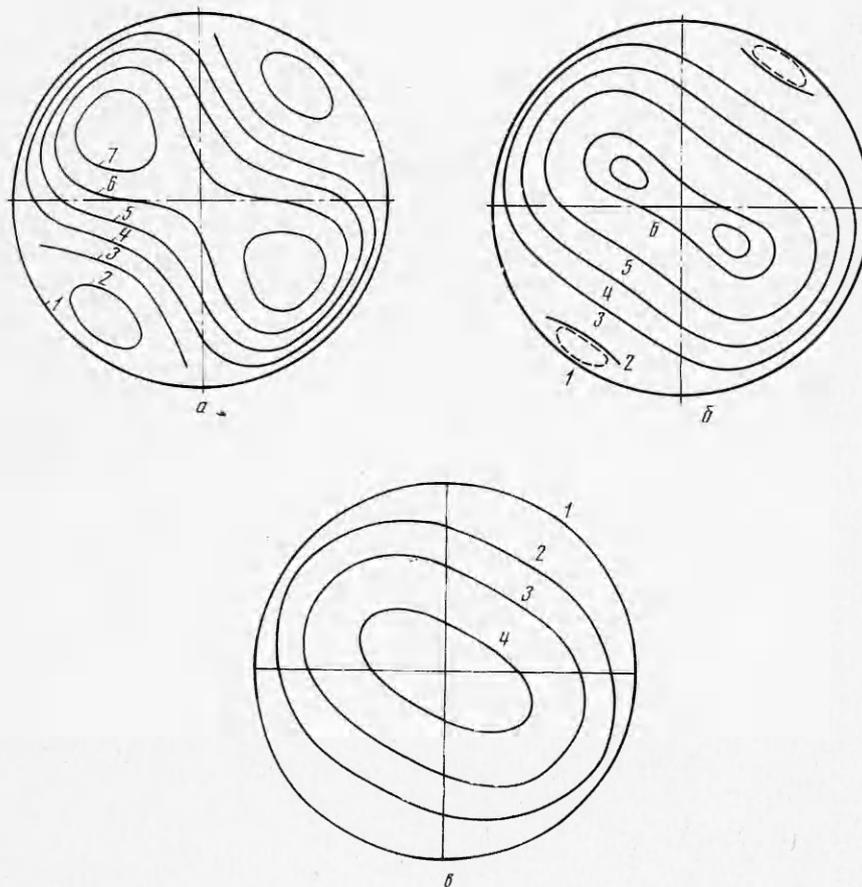
$$(4.5) \quad \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{d\psi_2}{d\xi} \right) = -\Phi_2(\xi, \tau)$$

и дополнительным граничным условием

$$(4.6) \quad \psi_1(1) = 0$$

следующим из условия  $v_r|_{r=a} = 0$ .

Функция  $\psi_2(\xi, \tau)$  может быть определена с точностью до константы, так как последняя не влияет на скорость  $v$ . Для определенности ниже использовано условие  $\psi_2(1, \tau) = 0$ . Решение линейного неоднородного



Фиг. 4

уравнения (4.4), удовлетворяющее условию (4.6), находится использованием функции Грина и имеет вид

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\xi^2} \int_0^{\xi} s^3 \Phi_1(s) ds - \xi^2 \int_0^1 s^3 \Phi_1(s) ds + \xi^2 \int_{\xi}^1 \frac{1}{s} \Phi_1(s) ds \right\}$$

Уравнение (4.5) интегрируется непосредственно

$$\begin{aligned} \psi_2(\xi, \tau) &= \int_{\xi}^1 \frac{1}{p} \int_0^p s \Phi_2(s, \tau) ds dp = - \ln \xi \int_0^{\xi} s \Phi_2(s, \tau) ds - \\ &- \int_{\xi}^1 (\ln s) s \Phi_2(s, \tau) ds \end{aligned}$$

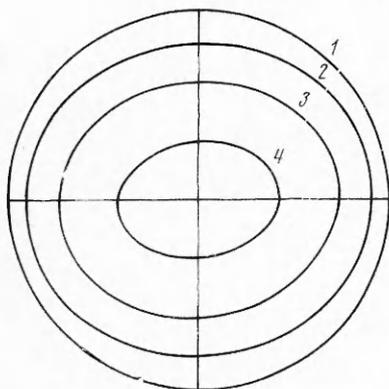
Найденная безразмерная функция тока  $\psi(\xi, \alpha, \tau)$  согласно (4.1), (4.3) определяет поле скоростей

$$(4.7) \quad v(r, \alpha, t) = \frac{H \omega^2 a}{4\pi \rho v_m} \left[ \frac{1}{\xi} \operatorname{Re} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} e_r - \operatorname{Re} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} e_\alpha \right]$$



Линии тока представляют собой линии  $\text{Re } \psi(\xi, \alpha, \tau) = \text{const}$ .

На фиг. 4, 5 представлены картины линий тока с соответствующими значениями безразмерной функции тока  $\psi$  для  $R_m = 0.1$  и  $R_m = 1.0$ . В случае  $R_m = 0.1$  прослеживается процесс изменения характера вторичного течения со временем. При  $\tau = 1$  (фиг. 4, а, кривым 1–7) соответствуют значения  $\psi = 0, 0.005, 0, -0.005, -0.01, -0.015, -0.02$  течение напоминает течение, возникающее в случае проникновения поля в покоящийся цилиндр [2]. Имеются ячейки с противоположными направлениями вращения, хотя они не доходят до центра круга, так как вблизи центра, как видно из фиг. 1, 2,  $\omega_2$  превалирует над  $\omega_1$  уже при  $\tau = 1$ .



Фиг. 5

При  $\tau = 2$  (фиг. 4, б, кривые 1–6) соответствуют значениям  $\psi = 0, 0, -0.01, -0.02, -0.03, -0.04$  осесимметричное течение, соответствующее вихрю  $\omega_2(\bar{r}, t)$  не столь интенсивно, чтобы полностью замазать ячеистую структуру течения, соответствующую вихрю  $\omega_1(r, \alpha, t)$ . Только при  $\tau = 3$  (фиг. 4, в, кривым 1–4) соответствуют  $\psi = 0, -0.02, -0.04, -0.06$  течение приобретает второй характерный вид с линиями тока, охватывающими ось цилиндра.

В случае  $R_m = 1$  с момента  $\tau = 1$  превалирующее значение приобретает течение  $\omega_2(r, t)$ , поэтому на фиг. 5 линии тока представлены только для этого момента времени. Здесь 1 —  $\psi = 0$ , 2 —  $\psi = -0.04$ , 3 —  $\psi = -0.09$ , 4 —  $\psi = -0.14$ .

Предположение (1.1), принятое в работе, на основании (4.7) равносильно условию

$$(H_0^2/4\pi\rho)(4\pi\sigma a/c^2)^2 < 1$$

Поступила 15 III 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Moffat H. K. Report on the Nato advanced study institute on magnetohydrodynamic phenomena in rotating fluids. J. Fluid Mech., 1973, vol. 57, pt 4.
2. Sneyd A. Generation of fluid motion in a circular cylinder by an unsteady applied magnetic field. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, pt 4.
3. Weiss N. O. The expulsion of magnetic flux by eddies. Proc. Roy. Soc. A, 1966, vol. 293, No. 1434.
4. Moffat H. K. On fluid flow induced by a rotating magnetic field. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pt. 3.