УДК 517.958: 531.327.13

ОБРУШЕНИЕ ВОЛН ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ НАД ПРЕПЯТСТВИЕМ

В. Ю. Ляпидевский, Ж. Сюй*

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
* Институт физической океанографии Океанского университета Китая,
266003 Чиньдао, Китай
E-mail: liapid@hydro.nsc.ru

В длинноволновом приближении изучаются течения однородной тяжелой жидкости над неровным дном. Предложена математическая модель, учитывающая как дисперсионные эффекты, так и формирование турбулентного верхнего слоя при обрушении поверхностных гравитационных волн. Исследовано асимптотическое поведение нелинейных возмущений на фронте волны и найдены условия перехода от гладких течений к обрушивающимся волнам при стационарном обтекании локального препятствия сверхкритическим потоком.

Ключевые слова: однородная жидкость, сверхкритическое течение, волны предельной амплитуды, обрушение волн.

Введение. Для описания волновых процессов в течениях однородной тяжелой жидкости со свободной поверхностью широко используются математические модели, соответствующие второму приближению теории мелкой воды (различные варианты уравнений Буссинеска [1], уравнения Грина — Нагди [2], уравнения Железняка — Пелиновского [3] и т. д.). Эти уравнения адекватно отражают структуру нелинейных волновых фронтов умеренной амплитуды. Однако в отличие от точной постановки задачи Коши — Пуассона в рамках второго приближения невозможно описать волны предельной амплитуды и получить критерии перехода от гладких волн к обрушивающимся. Процесс обрушения поверхностных волн в последнее десятилетие интенсивно исследуется экспериментально [4–6]. Показано, что при обрушении развивается приповерхностный турбулентный слой, который играет важную роль в формировании волнового фронта. Теоретические модели этого процесса построены только для развитых турбулентных боров [7–9].

В данной работе исследуется математическая модель, учитывающая влияние поверхностного турбулентного слоя на структуру стационарного течения в окрестности локального препятствия.

1. Математическая модель. Уравнения мелкой воды для несжимаемой жидкости с учетом поверхностного турбулентного слоя и негидростатичности распределения давления могут быть записаны в следующем виде (см. [10, гл. 6]):

$$\begin{gathered} h_t + (hu)_x = -\sigma q, \\ u_t + uu_x + g(h + \eta + z)_x + p_x = 0, \\ \eta_t + (\eta v)_x = \sigma q, \end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 40276008) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-05-64460).

$$v_t + vv_x + g(h+\eta+z)_x = \sigma q(u-v)/\eta,$$
$$q_t + vq_x = \sigma\big((u-v)^2 - (1+\theta)q^2\big)/(2\eta).$$

Здесь h, η — глубина нижнего (потенциального) и верхнего (турбулентного) слоев; u, v — соответствующие средние горизонтальные скорости в слоях; q — среднеквадратичная скорость мелкомасштабного движения в верхнем слое; g — ускорение свободного падения; $z = z(x)$ — форма дна; коэффициенты σ и θ постоянны.

Для замыкания модели нужно выбрать выражение для связанного с эффектами негидростатичности дополнительного давления p на дне канала. При $p \equiv 0$ уравнения (1) представляют собой первое приближение теории мелкой воды с учетом обрушения поверхностных волн. Структура бегущих волн для этой модели исследована в [9, 10]. При $p = p(h, \dot h, \ddot h)$, $\dot h = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial x$ получаем обобщение различных моделей, соответствующих второму приближению. Для описания стационарных течений со свободной поверхностью в окрестности локального препятствия используем следующее представление для избыточного давления:

$$p = u^2(2hh_{xx} - h_x^2 + 3k(z_x^2 + hz_{xx}))/6. \qquad (2)$$

При $k = 1$ зависимость (2) получена в [11], при $k = 0$ — в [12]. Для стационарных течений система (1), (2) принимает вид

$$(hu)_x = -\sigma q, \qquad (\eta v)_x = \sigma q,$$
$$uu_x + g(h+\eta+z)_x + \big(u^2(2hh_{xx} - h_x^2 + 3k(z_x^2 + hz_{xx}))\big)_x/6 = 0, \qquad (3)$$
$$vv_x + g(h+\eta+z)_x = \sigma q(u-v)/\eta, \qquad vq_x = \sigma((u-v)^2 - (1+\theta)q^2)/(2\eta).$$

Рассматриваются гладкие решения (3), описывающие стационарные возмущения равномерного сверхкритического потока ($h = h_0$, $u = u_0$, $\mathrm{Fr} = u_0/\sqrt{gh_0} > 1$) при обтекании локального симметричного препятствия

$$z(x) = z(-x), \qquad z(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > l. \qquad (4)$$

Предполагается, что на достаточно большом расстоянии от препятствия вверх по потоку течение не возмущено, т. е.

$$h \to h_0, \quad u \to u_0, \quad \eta \to 0 \qquad \text{при} \quad x \to -\infty. \qquad (5)$$

Требуется найти возможные волновые конфигурации, локализованные в окрестности препятствия. Рассмотрим сначала решение этой проблемы в рамках более простой модели в предположении о том, что поверхностный турбулентный слой отсутствует ($\eta \equiv 0$).

2. Уединенные волны над препятствием. При $\eta \equiv 0$ система (3) редуцируется к модели, полученной в [11]:

$$hu = Q \equiv \mathrm{const},$$
$$u^2/2 + g(h+z) + u^2(2hh_{xx} - h_x^2 + 3k(z_x^2 + hz_{xx}))/6 = J = \mathrm{const}\,. \qquad (6)$$

В работе [11] уравнения (6) использовались для построения транскритических режимов течения над препятствием ($\mathrm{Fr} < 1$).

При $\mathrm{Fr} > 1$ локализованные в окрестности препятствия течения задаются решениями уравнений (6), удовлетворяющими условиям (5) и симметричными относительно начала координат. Такие решения могут быть получены возмущением двух типов течений над ровным дном: равномерного течения и уединенной волны. Поэтому в определенном диапазоне чисел Фруда $\mathrm{Fr} > 1$ в окрестности препятствия могут быть реализованы два различных течения.

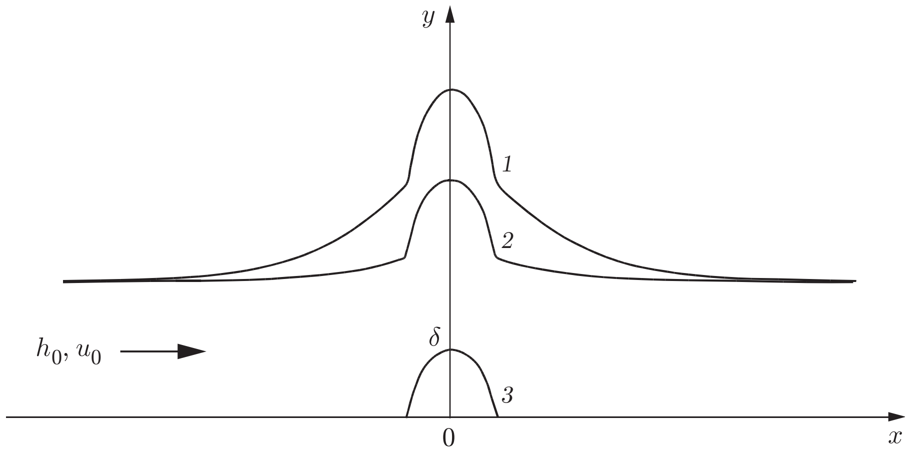

Рис. 1. Сверхкритическое обтекание препятствия (модель (6), $\mathrm{Fr} = 1{,}5$, $\sigma = 0{,}15$, $\delta = 0{,}5h_0$, $k = 0$):
1 — возмущение уединенной волны; *2* — возмущение равномерного течения; *3* — препятствие (полуцилиндр радиуса $R = 0{,}5h_0$)

Так как течение вне препятствия (при $|x| > l$) представляет собой часть солитона, форма которого может быть найдена интегрированием уравнений при $z = 0$, то (6) редуцируется к одному уравнению первого порядка

$$h_x^2 = \frac{3}{\mathrm{Fr}^2\, h_0^3}\,(h - h_0)^2(\mathrm{Fr}^2\, h_0 - h), \tag{7}$$

решение которого представляется в квадратурах. Заметим, что в (7) использованы условия (5), т. е.

$$Q = h_0 u_0, \qquad J = (\mathrm{Fr}^2/2 + 1) g h_0.$$

Таким образом, проблема отыскания симметричных течений в окрестности локального препятствия сводится к построению решений (6) на интервале $(-l, 0)$ со следующими краевыми условиями:

$$h_x\big|_{x=-l} = \Big(\frac{3(\mathrm{Fr}^2\, h_0 - h)}{\mathrm{Fr}^2\, h_0^3}\Big)^{1/2}(h - h_0), \qquad h_x\big|_{x=0} = 0. \tag{8}$$

Решение задачи (6), (8) может быть найдено численно при заданной форме препятствия. Для гладких препятствий простой формы можно показать, что существует критическое значение $\mathrm{Fr}_* > 1$ такое, что при $\mathrm{Fr} > \mathrm{Fr}_*$ задача (6), (8) имеет два решения, причем при увеличении числа Фруда амплитуда волны, соответствующей возмущенному солитону, неограниченно возрастает [13, 14].

На рис. 1 представлены профили симметричных волн при сверхкритическом обтекании локального препятствия (полуцилиндра), полученные возмущением уединенной волны (кривая *1*) и равномерного потока (кривая *2*) в рамках модели (6) при $k = 0$. В отличие от точной постановки задачи Коши — Пуассона [13] различные модификации уравнений мелкой воды над неровным дном (второе приближение), включая уравнения Кортевега — де Фриза [14, 15], не имеют ограничений на амплитуду волны и, следовательно, не дают критерия перехода от гладких волн к обрушивающимся. В п. **3** показано, что использование модели (3), учитывающей формирование поверхностного турбулентного слоя, позволяет не только определить волны предельной амплитуды, но и описать процесс обрушения волны и развития турбулентного бора.

Отметим, что для коротких препятствий уравнения (6) теряют смысл. В этом случае проблема (6), (8) может быть решена в классе непрерывных кусочно-гладких функций введением в уравнения сосредоточенного воздействия препятствия на длинноволновое движение [16]. Это означает, что стационарное сверхкритическое течение в окрестности препятствия малой протяженности представляет собой некоторую часть солитона при $-\infty < x < 0$ и $0 < x < \infty$ с заданным углом наклона $h_x\big|_{x=0-0} = -h_x\big|_{x=0+0}$, зависящим от формы препятствия. В первом приближении этот угол может быть задан следующим образом [16]:

$$h_x\big|_{x=0-0} = \frac{3}{2}\,\frac{gh_0}{Q^2}\int\limits_{-l}^{l} z(x)\,dx. \tag{9}$$

Задача (6), (9) существенно проще рассмотренной выше проблемы (6), (8), и ее решение может быть найдено в квадратурах.

3. Структура волнового бора в горизонтальном канале. Уравнения (3), описывающие нелинейные волны в однородной жидкости с учетом развития поверхностного турбулентного слоя, существенно сложнее уравнений (6). Тем не менее в канале с ровным дном ($z(x) \equiv 0$) может быть построено решение (3), являющееся аналогом солитона. Рассмотрим нетривиальное решение (3), которое формируется из равномерного потока, т. е.

$$h \to h_0, \quad \eta \to 0, \quad u \to u_0 \qquad \text{при} \quad x \to -\infty. \tag{10}$$

Заметим, что правая часть уравнений (3) сингулярна при $\eta \to 0$. Поэтому для малых возмущений $\tilde h$, $\tilde u$, $\tilde\eta$, $\tilde v$, $\tilde q$ равномерного течения

$$h = h_0 + \tilde h, \quad \eta = \tilde\eta, \quad u = u_0 + \tilde u, \quad v = u_0 + \tilde v, \quad q = \tilde q$$

получаем полулинейную систему, однородную относительно возмущений:

$$\begin{gathered}
u_0\tilde h_x + h_0\tilde u_x = -\sigma\tilde q, \qquad u_0\tilde\eta_x = \sigma\tilde q,\\
g(\tilde h_x + \tilde\eta_x) + u_0\tilde u_x + u_0^2h_0\tilde h_{xxx}/3 = 0, \qquad g(\tilde h_x + \tilde\eta_x) + u_0\tilde v_x = \sigma\tilde q(\tilde u - \tilde v)/\tilde\eta,\\
u_0\tilde q_x = \sigma((\tilde u - \tilde v)^2 - (1+\theta)\tilde q^2)/(2\tilde\eta).
\end{gathered} \tag{11}$$

Решения (11) с условиями (10) могут быть представлены в виде $\tilde h = \hat h\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\tilde\eta = \hat\eta\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\tilde u = \hat u\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\tilde v = \hat v\,\mathrm{e}^{\lambda x}$, $\tilde q = \hat q\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ с положительным параметром λ, удовлетворяющим следующей алгебраической системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\lambda u_0\hat h + \lambda h_0\hat u = -\sigma\hat q, \qquad \lambda u_0\hat\eta = \sigma\hat q,\\
g\hat h + g\hat\eta + u_0\hat u + \lambda^2u_0^2h_0\hat h/3 = 0, \qquad \lambda(g\hat h + g\hat\eta + u_0\hat v) = \sigma\hat q(\hat v - \hat u)/\hat\eta,\\
\lambda u_0\hat q = -\sigma((1+\theta)\hat q^2 - (\hat u - \hat v)^2)/(2\hat\eta).
\end{gathered} \tag{12}$$

Требуется найти нетривиальное решение (12) с дополнительным ограничением $\hat\eta > 0$, $\hat q > 0$, $\lambda > 0$. Из первых четырех уравнений (12) следуют соотношения

$$\begin{gathered}
\hat u - \hat v = \frac{(gh_0 - u_0^2)(\hat h + \hat\eta)}{2u_0h_0}, \qquad \hat h = \frac{3(u_0^2 - gh_0)\hat\eta}{h_0^2u_0^2\lambda^2 + 3(gh_0 - u_0^2)},\\
\hat h + \hat\eta = \frac{h_0^2u_0^2\lambda^2\hat\eta}{h_0^2u_0^2\lambda^2 + 3(gh_0 - u_0^2)}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Следствием (13) является
$$(\hat{u}-\hat{v})^2=\frac{(gh_0-u_0^2)^2h_0^2u_0^2\lambda^4\hat{\eta}^2}{4(h_0^2u_0^2\lambda^2+3(gh_0-u_0^2))^2}. \tag{14}$$
Из второго и пятого уравнений (12) получаем
$$(\hat{u}-\hat{v})^2=(3+\theta)\hat{q}^2=(3+\theta)\lambda^2u_0^2\hat{\eta}^2/\sigma^2. \tag{15}$$
Из (14), (15) выводим квадратное уравнение для значений параметра λ ($\lambda>0$), при которых существует решение (12), отличное от нуля:
$$h_0^2u_0^2\lambda^2-ph_0(u_0^2-gh_0)\lambda+3(gh_0-u_0^2)=0. \tag{16}$$
Здесь $p=\pm\sigma/(2\sqrt{3+\theta}\,)$. Для сверхкритических течений ($\mathrm{Fr}>1$) положительные корни уравнения (17) задаются формулой
$$\lambda=\frac{ph_0(u_0^2-gh_0)+\sqrt{p^2h_0^2(u_0^2-gh_0)^2+12h_0^2u_0^2(u_0^2-gh_0)}}{2h_0^2u_0^2}. \tag{17}$$
Заметим, что для построения аналога солитона в (17) используются положительные значения p и при $\sigma\to0$ ($p\to0$) значения λ совпадают с соответствующими значениями для солитона, полученными с использованием (7):
$$\lambda=\sqrt{3(\mathrm{Fr}^2-1)}\big/(\mathrm{Fr}\,h_0).$$

Для заданного числа Фруда ($\mathrm{Fr}>1$) стационарное решение (3), удовлетворяющее (10), может быть построено с использованием полученной асимптотики. Для околокритических течений ($0<\mathrm{Fr}-1\ll1$) структура решения (3) с асимптотикой (10), (17) близка к солитону, задаваемому (7), так как относительная толщина верхнего турбулентного слоя мала по сравнению с общей глубиной потока. Тем не менее полученное решение уже не симметрично и представляет собой волновой бор с постепенно нарастающей толщиной турбулентного слоя (см. [10, гл. 6]).

Главное отличие рассматриваемой модели от (6) состоит в том, что волны, описываемые системой (3), достигают предельной амплитуды. Это означает, что существует критическое значение числа Фруда $\mathrm{Fr}^*>1$ такое, что гладкое решение (3) с асимптотикой (10) не существует при $\mathrm{Fr}>\mathrm{Fr}^*$. Для того чтобы понять причину разрушения гладких решений, рассмотрим систему (3), записанную в виде
$$h_x=w,\qquad u_x=-\frac{\sigma q+uw}{h},$$
$$w_x=\frac{1}{2h}\Big(\frac{6}{u^2}\Big(E-g(h+\eta+z)-\frac{u^2}{2}\Big)+w^2-3k(z_x^2+hz_{xx})\Big), \tag{18}$$
$$\eta_x=\frac{g\eta(w+z_x)+\sigma q(2v-u)}{\Delta},\qquad v_x=\frac{\sigma q-v\eta_x}{\eta},\qquad q_x=\frac{\sigma}{2\eta v}\left((u-v)^2-(1+\theta)q^2\right),$$
где $\Delta=v^2-g\eta$; $E=u_0^2/2+gh_0$.

Заметим, что при $x\to-\infty$ решение задачи (18), (10) стремится к равномерному течению экспоненциально. В частности, $v=\hat{v}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, $\eta=\hat{\eta}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$, поэтому $\Delta=v^2-g\eta<0$ при $x\to-\infty$. Если условие $\Delta<0$ справедливо для всей области течения вплоть до достижения верхним турбулентным слоем дна канала ($h=0$), решение (18) над ровным дном ($z=0$) является гладким и представляет собой волновой бор. Однако в случае, когда функция Δ в (3) обращается в нуль на фронте волны, переход от докритического течения

($\Delta < 0$) к сверхкритическому ($\Delta > 0$) относительно волновой моды, порожденной верхним турбулентным слоем, может осуществляться посредством гидравлического прыжка. Появление в решении гидравлического прыжка и области интенсивного турбулентного перемешивания за ним соответствует развитию "вальца" на переднем склоне обрушивающейся волны. В данной работе разрывные решения (3) не рассматриваются, поэтому в качестве критерия перехода к обрушивающимся волнам используется условие обращения в нуль величины Δ в решениях задачи (3), (10). Для волнового бора критическое значение числа Фруда Fr^*, при котором величина Δ обращается в нуль на фронте первой волны, может быть найдено численно. Над ровным дном $\mathrm{Fr}^* \simeq 1{,}3$ и решение (18), (10) дает следующее значение амплитуды предельной волны:

$$(h + \eta)_{\max} = 1{,}9 h_0 \quad \text{при} \quad \mathrm{Fr}^* = 1{,}3. \tag{19}$$

Полученные в (19) значения согласуются с параметрами уединенной волны предельной амплитуды, найденными из задачи Коши — Пуассона в точной постановке [13].

4. Сверхкритическое течение над локальным препятствием. Вновь рассмотрим стационарное течение над симметричным относительно начала координат гладким препятствием (4) максимальной высоты $\delta = z(0)$, локализованным на интервале $(-l, l)$. Как и для уравнений (6), в окрестности препятствия может быть реализовано два типа сверхкритических течений: 1) течения, полученные возмущением равномерного потока ($h \equiv h_0$, $u \equiv u_0$, $\eta = 0$); 2) стационарные течения, описывающие волновой бор. При этом для $x < -l$ стационарное решение задачи (3), (10) задается однопараметрическим семейством $h = h_1(x - x_s)$, $u = u_1(x - x_s)$, $\eta = \eta_1(x - x_s)$, $v = v_1(x - x_s)$, $q = q_1(x - x_s)$, где точка x_s определяет положение фронта волны относительно препятствия. Для построения волнового профиля над препятствием достаточно решить задачу Коши для (18) с начальными данными при $x = -l$:

$$\begin{gathered} h(-l) = h_1(-l - x_s), \qquad u(-l) = u_1(-l - x_s), \qquad \eta(-l) = \eta_1(-l - x_s), \\ v(-l) = v_1(-l - x_s), \qquad q(-l) = q_1(-l - x_s). \end{gathered} \tag{20}$$

В отличие от случая, рассмотренного в п. **2**, решение задачи (18), (20) не является симметричным относительно начала координат из-за развития поверхностного турбулентного слоя. Тем не менее аналог солитона над препятствием может быть построен и для системы (18) в виде особого решения, разделяющего два типа обтекания: течения с подветренными волнами и течения с "градиентной катастрофой".

Для небольшого препятствия ($\delta \ll h_0$) структура волнового бора изменится незначительно по сравнению с соответствующим решением для горизонтального канала. Для препятствия, сравнимого с глубиной жидкости ($\delta \sim h_0$), в силу нелинейности системы при некоторых значениях x_s решение задачи (18), (20) может разрушиться на конечном участке канала за счет неограниченного возрастания производных ("градиентная катастрофа"). Однако при соответствующем выборе параметра x_s может быть реализован режим обтекания с подветренными волнами. Поэтому в определенной области параметров Fr, δ найдется критическое значение параметра x_s^*, разделяющее различные режимы течения. Именно этот предельный режим обтекания является аналогом локализованного солитонообразного возмущения над препятствием, рассмотренного в п. **2**. Численные расчеты показывают, что такой режим обтекания существует в достаточно широкой области определяющих параметров $\mathrm{Fr} > 1$ и $\delta > 0$.

Заметим, что локализованное течение над препятствием можно также построить при фиксированном положении фронта волны x_s, изменяя высоту препятствия δ.

На рис. 2 показаны профили волны (сплошные линии — свободная поверхность, штриховые — граница турбулентного слоя) при обтекании сегмента цилиндра сверхкритическим потоком, вычисленные по модели (3) при $k = 0$. Малое изменение высоты препятствия при заданном положении фронта волны дает различные решения задачи (18), (20):

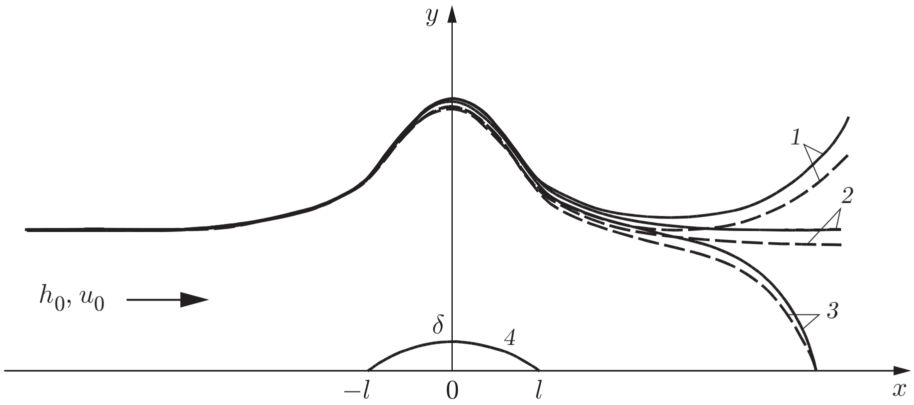

Рис. 2. Сверхкритическое обтекание препятствия (модель (3), $\mathrm{Fr} = 1{,}4$, $\sigma = 0{,}15$, $\theta = 2$, $k = 0$):
сплошные линии — свободная поверхность; штриховые — нижняя граница турбулентного слоя; *1* — подветренные волны ($\delta = 0{,}19h_0$); *2* — возмущение уединенной волны ($\delta = 0{,}2h_0$); *3* — "градиентная катастрофа" ($\delta = 0{,}21h_0$); *4* — препятствие (сегмент цилиндра радиуса $R = 10h_0$)

подветренные волны (кривые *1*), возмущенную уединенную волну (кривые *2*), решение с "градиентной катастрофой" (кривые *3*). Аналогом симметричного течения, найденного по модели (6) без турбулентного слоя (кривая *1* на рис. 1), является течение, которому соответствует кривая *2*.

Как отмечено выше, одной из причин разрушения гладких решений над ровным дном является обращение в нуль величины Δ. Введение в поток локального препятствия позволяет получить гладкие решения бóльшей амплитуды, чем в канале с ровным дном. Тем не менее, как и в горизонтальном канале, при сверхкритическом обтекании локального препятствия существует критическое значение числа Фруда Fr^* такое, что при $\mathrm{Fr} > \mathrm{Fr}^*$ решение должно содержать гидравлический прыжок, соответствующий в данной модели обрушению волны с возникновением "вальца" на ее гребне. Если в качестве критерия обрушения волны принять обращение в нуль функции Δ на переднем фронте локального возмущения потока препятствием (кривая *2* на рис. 2), то критическое значение Fr^* для заданного препятствия может быть найдено численно. Если длина препятствия l мала по сравнению с глубиной канала h_0, то можно пренебречь вовлечением жидкости в верхний турбулентный слой над препятствием. В этом случае $\sigma = 0$ и уравнения (3) могут быть сведены к одному уравнению для глубины h после исключения переменных η, v, u из соотношений

$$\begin{gathered} \eta v = \eta_1 v_1 = Q^+, \qquad hu = h_1 u_1 = Q^-, \\ v^2/2 + g(h + \eta + z) = v_1^2/2 + g(h_1 + \eta_1) = J^+. \end{gathered} \tag{21}$$

Заметим, что

$$\eta_x = g\eta(h_x + z_x)/\Delta, \tag{22}$$

и в силу (21), (22) симметричное относительно начала координат решение системы (3) при $\sigma = 0$ может быть построено аналогично решению задачи (7), (8) в случае, когда Δ не обращается в нуль. Такое решение приближенно описывает профиль уединенной волны над локальным препятствием. Структура решения (3) еще больше упрощается при учете воздействия препятствия малой протяженности и использовании гипотезы о сосредоточенном влиянии локального изменения формы дна на поток. При этом решение строится в классе кусочно-гладких функций аналогично (9). Так как $l \ll h_0$, то граничные условия задаются в виде

$$h_x\big|_{x=0-0} = -h_x\big|_{x=0+0} = f(h, A),$$

где f — заданная функция; A — площадь сечения препятствия. Таким образом, профиль волны, переводящей течение из сверхкритического в докритическое в окрестности локального изменения глубины канала, получается склейкой решений (3) над ровным дном с соответствующей асимптотикой на больших расстояниях от препятствия. Отметим также, что в каждом из перечисленных выше приближений волны предельной амплитуды находятся из условия обращения функции Δ в нуль в какой-либо точке на фронте волны.

Заключение. Существование волн предельной амплитуды в стационарных течениях тяжелой жидкости в точной постановке (задача Коши — Пуассона) является следствием интеграла Бернулли, примененного к поверхностному слою [13]. Для различных модификаций уравнений мелкой воды этот подход неприменим в силу соответствующих гипотез о распределении горизонтальной компоненты скорости в потоке. Введение в модель тонкого поверхностного слоя позволяет дать математическое описание процесса разрушения гладких волн конечной амплитуды для широкого класса уравнений мелкой воды (первое и второе приближения). Следующий этап исследований состоит в использовании уравнений (3) для построения математической модели обрушивающихся волн, в частности, для определения внутренней структуры течения в турбулентном боре.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. **Green A. E., Naghdi P. M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. 1976. V. 78. P. 237–246.
3. **Железняк М. И., Пелиновский Е. Н.** Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. науч. тр. / АН СССР. Ин-т прикл. физики. 1985. С. 8–33.
4. **Battjes J. A., Sakai T.** Velocity field in a steady breaker // J. Fluid Mech. 1999. V. 380. P. 257–278.
5. **Hornung H. G., Willert C., Turner S.** The flow field downstream of a hydraulic jump // J. Fluid Mech. 1995. V. 287. P. 299–316.
6. **Svendsen I. A., Veeramony J., Bakunin J., Kirby J. T.** The flow in weak turbulent hydraulic jumps // J. Fluid Mech. 2000. V. 418. P. 25–57.
7. **Longuet-Higgins M. S., Turner J. S.** An “entraining plume” model of a spilling breaker // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. P. 1–20.
8. **Svendsen I. A., Madsen P. A.** A turbulent bore on a beach // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 73–96.
9. **Ляпидевский В. Ю.** Структура турбулентного бора в однородной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 56–68.
10. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
11. **Naghdi P. M., Vongsarnpigoon L.** The downstream flow beyond an obstacle // J. Fluid Mech. 1986. V. 162. P. 223–236.
12. **Serre F.** Contribution à l’étude des écoulements permanents et variables dans les canaux // La Houille Blanche. 1953. V. 8, N 3. P. 374–388.

13. **Vanden-Broeck J.-M.** Free surface flow over an obstruction in a channel // Phys. Fluids. 1987. V. 30, N 8. P. 2315–2317.
14. **Shen S.** Forced solitary waves and hydraulic falls in two-layer flow over topography // J. Fluid Mech. 1992. V. 232. P. 583–612.
15. **Xu Z., Shi F., Shen S.** A numerical calculation of forced supercritical soliton in single-layer flow // J. Ocean Univ. (Qingdao). 1994. V. 24, N 3. P. 309–319.
16. **Miles J. W.** Stationary transcritical channel flow // J. Fluid Mech. 1986. V. 162. P. 489–499.

Поступила в редакцию 14/VII 2005 г.