Теплофизика и аэромеханика, 2015, том 22, № 3

УДК 532.5.032

Колебания физического маятника с полостью эллиптической формы, заполненной вязкой жидкостью

А.Ю. Боталов[1,2]

[1]*Тюменский филиал Института теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН*

[2]*Тюменский государственный университет*

E-mail: aybotalov@bk.ru

В работе численно исследованы плоские колебания эллиптического сосуда, полностью заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. Определено характерное время затухания колебаний в зависимости от значений параметров системы, найдены значения параметров, при которых это время минимально. Представлены картины течения жидкости в полости.

Ключевые слова: полость с жидкостью, плоские колебания.

Введение

Анализ движения систем, имеющих в своем составе полости, содержащие жидкость, является важным как с практической точки зрения при его применении в исследовании динамики летательных аппаратов, имеющих на борту запас жидкого топлива, так и с теоретической, для лучшего понимания механизмов взаимодействия жидкого наполнителя с подвижными структурами.

Одним из первых подобными задачами занимался Н.Е. Жуковский [1], в своей работе он рассматривал движение тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью. Подробно влияние вязкости жидкости на движение тела исследовалось в работах [2, 3], были получены асимптотические решения линейной задачи движения тела с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью. Для решения задачи в нелинейной постановке требуется решить нелинейную систему уравнений, что возможно при помощи численных методов. В работах [4, 5] авторы приводят результаты численного моделирования задачи о движении сосуда цилиндрической формы, полностью заполненного жидкостью и имеющего вставки в виде радиальных ребер. Работа [6] была посвящена моделированию свободных колебаний под действием силы тяжести сосуда квадратной формы, полностью заполненного вязкой жидкостью.

В настоящей работе представлены результаты численного решения задачи движения физического маятника с полостью в форме эллипса, полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. Найдены зависимость угла отклонения маятника от времени и характерное время затухания колебаний, получены поля скорости жидкости.

Постановка задачи

Рассматриваются плоские колебания сосуда в форме эллипса с малой (a) и большой (b) полуосями, происходящие под действием силы тяжести. В сосуде содержится вязкая несжимаемая жидкость. Масса сосуда считается пренебрежимо малой. Введем неподвижную систему координат с осью η, взятой в направлении, противоположном вектору силы тяжести, с осью ζ, перпендикулярной плоскости колебаний, и осью ξ, дополняющей систему координат до правой тройки. Введем также подвижную систему координат, связанную с телом, как показано на рис. 1, причем ось z направлена по оси ζ. Для описания плоского движения данной системы будут использоваться двумерные уравнения Навье–Стокса, записанные в неинерциальной системе отсчета, уравнение неразрывности и закон сохранения момента импульса. В безразмерной форме эти уравнения примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}+U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial X}+\frac{1}{\mathrm{Re}_\Omega}\Delta U+2V\dot{\varphi}+X\dot{\varphi}^2+Y\ddot{\varphi}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau}+U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}=-\frac{\partial P}{\partial Y}+\frac{1}{\mathrm{Re}_\Omega}\Delta V-2U\dot{\varphi}+Y\dot{\varphi}^2-X\ddot{\varphi}, \tag{3}$$

$$\ddot{\varphi}+A_\Omega\sin\varphi=-A_{fl}\frac{d}{d\tau}\iint\limits_s (XV-YU)\,ds, \tag{4}$$

где $A_\Omega=64\pi^2\Big/\left(3\left[5+(a/b)^2\right]\right)$, $A_{fl}=4\Big/\left(\pi(\mathrm{a}/\mathrm{b})\left[5+(a/b)^2\right]\right)$, $\mathrm{Re}_\Omega=\Omega b^2/(2\pi\nu)$.

Формулы обезразмеривания имеют вид:

$$\tau=t\frac{\Omega}{2\pi},\ U=u\frac{2\pi}{b\Omega},\ V=v\frac{2\pi}{b\Omega},\ P=\frac{4\pi^2p'}{\rho\Omega^2b^2},\ X=\frac{x}{b},\ Y=\frac{y}{b},\ \Omega=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{4b}},$$

здесь t — время, u,v — скорости соответственно в направлении x и y, $\varphi(t)$ — угол отклонения, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, Ω — частота малых колебаний в предположении, что $u=v=0$, давление есть отклонение от гидростатического давления: $\nabla p'=\nabla p+\rho g$.

Начальные условия в безразмерном виде:

$$\varphi\big|_{\tau=0}=\varphi_0,\ \dot{\varphi}\big|_{\tau=0}=0,\ U\big|_{\tau=0}=V\big|_{\tau=0}=0.$$

Граничные условия в безразмерном виде:

$$U\big|_\Gamma=V\big|_\Gamma=0.$$

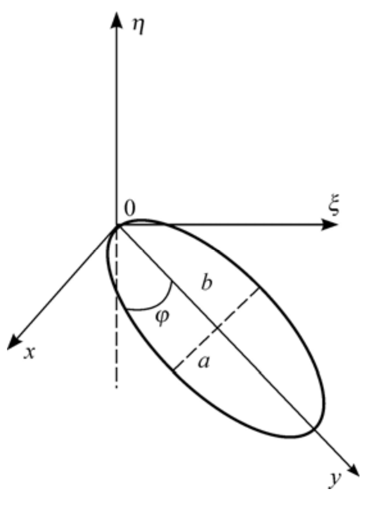

Рис. 1. Исследуемая область.

Численная схема и параметры расчета

Решение системы (1)–(3) находилось методом контрольного объема применительно к модифицированному алгоритму SIMPLER [7, 8], реализованного на структурированной криволинейной расчетной сетке [9]. Число контрольных объемов, на которые разбивалась расчетная область, изменялось от 25×100 до 300×300 в зависимости от значений Re_Ω и отношения малой полуоси к большой (a/b). Для решения уравнения (4) использовался BDF метод (Backward Differentiation Formula) второго порядка точности [10]. Расчеты проводились для параметра Re_Ω, изменяющегося в диапазоне $7\le\mathrm{Re}_\Omega\le5700$, параметра a/b, изменяющегося в диапазоне $0{,}25\le a/b\le1$, и начального угла отклонения $\varphi_0=\pi/2$. Достоверность полученных результатов подтверждается сравнением численного решения с асимптотическим решением линейной задачи, полученным в работе [3].

Анализ полученных результатов

Прежде чем переходить к анализу результатов, приведем сравнение полученного численного решения с асимптотическим решением линейной задачи. В работе [3] получено интегродифференциальное уравнение, описывающее движение тела с полостью, полностью заполненной слабо вязкой жидкостью, при малой амплитуде движения. В случае колебания эллиптического сосуда уравнение будет иметь вид:

$$\ddot{\varphi}+\frac{16}{3\alpha}\pi^2\sin\varphi=-\frac{4}{\alpha\pi^{0,5}\sqrt{\mathrm{Re}_\Omega}}\cdot\frac{\mathrm{a/b}}{1+(\mathrm{a/b})^2}\cdot\frac{d}{dt}\int_0^1\frac{\dot{\varphi}d\tau}{\sqrt{t-\tau}}, \tag{5}$$

где

$$\alpha=1+1/4\left(\left(1-(\mathrm{a/b})^2\right)^2\Big/\left(1+(\mathrm{a/b})^2\right)\right).$$

На рис 2. изображена зависимость угла отклонения маятника от времени. Из рисунка видно, что полученное численное решение хорошо совпадает с асимптотическим по параметру Re_Ω решением линейной задачи.

Остановимся на картинах возникающего течения при колебании маятника. На рис. 3 изображены изолинии функции тока в различные моменты времени, причем отрицательное значение функции тока соответствуют движению жидкости по часовой стрелке, положительное — против. По мере движения маятника в областях, симметрично смещенных в сторону движения маятника относительно линии $x=0$, зарождаются вихри, которые вращаются в сторону, противоположную вращению центрального вихря. Эти вторичные вихри с течением времени растут, захватывают все большую область течения, и по мере их движения направление вращения жидкости меняется на противоположное. Спустя некоторое время вторичные вихри сливаются в один, при этом вся жидкость вращается в одну сторону — в сторону вращения вторичных вихрей.

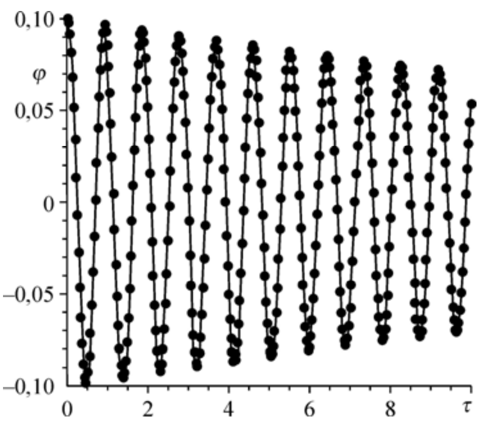

Рис. 2. Зависимость угла отклонения маятника от времени при $\varphi_0=0{,}1$, $\mathrm{Re}_\Omega=1140$ и $a/b=0{,}5$. Символы — численное решение, линия — асимптотическое решение.

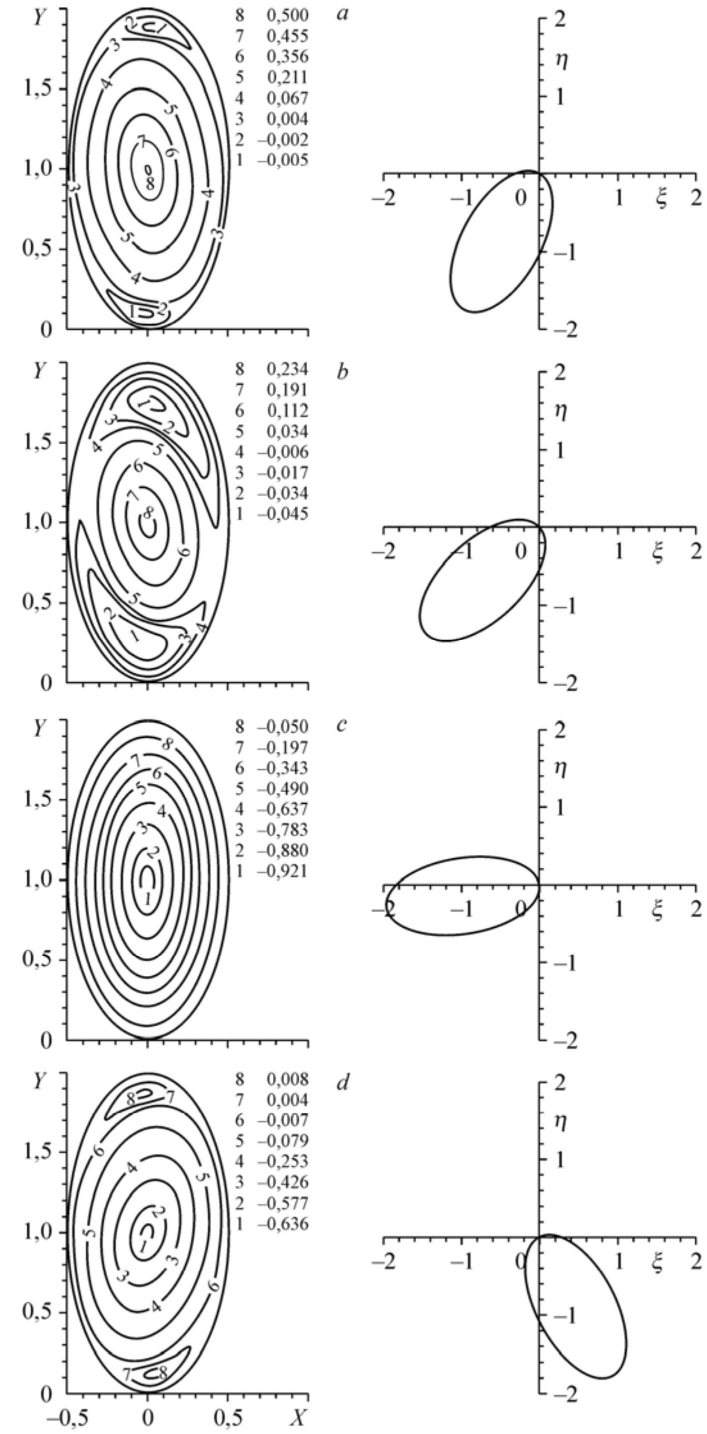

Рис. 3. Изолинии функции тока при $\varphi_0 = \pi / 2$, $\mathrm{Re}_\Omega = 10$ и a / b = 0,5.
τ = 0,34 (*a*), 0,38 (*b*), 0,6 (*c*) 0,9 (*d*).

Далее процесс периодически повторяется. Смена направления вращения жидкости каждые полпериода сопровождается возникновением вторичных вихревых структур. При a / b = 1 (случай полости в форме кругового цилиндра) вторичные вихревые течения отсутствуют. Из этого факта следует, что смена направления вращения жидкости в полости, совершающей вращательные колебания, сопровождается вихревым течением только при отклонении формы полости от цилиндрической.

Как показано в работе [6], наличие жидкой массы в колеблющемся маятнике приводит к изменению периода и амплитуды колебаний по сравнению со случаем абсолютно твердого тела. Диссипативные силы, возникающие в движущейся жидкости, приводят к уменьшению амплитуды колебания сосуда, причем время затухания зависит как от значения Re_Ω, так и от величины начального отклонения (φ_0) и отношения малой полуоси к большой (a/b). Не приводя расчетов, можно сделать выводы о качественном поведении зависимости характерного времени затухания колебаний от параметров задачи. Так, зависимость характерного времени затухания от Re_Ω является немонотонной. Это следует из рассмотрения предельных случаев большого и малого значений Re_Ω. При большом значении параметра Re_Ω получаем приближение идеальной жидкости, диссипация очень мала и колебания затухают медленно. При малом Re_Ω — приближение твердого тела, диссипация также очень мала. Следовательно, где-то между этими предельными случаями есть значение Re_Ω, при котором диссипация будет максимальной, а характерное время затухания минимальным. При увеличении значения параметра a/b от 0 до 1 скорость диссипации энергии растет, а характерное время затухания уменьшается вследствие увеличения массы жидкости, вовлекаемой в движение при колебании эллиптической полости.

На рис. 4 показан график зависимости характерного времени затухания колебаний от значения Re_Ω. Пусть характерное время затухания определено как время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в тысячу раз. Из рисунка видна немонотонность данной зависимости. В результате расчетов найдены значения параметра Re_Ω, при которых время затухания минимально для случаев $\varphi_0 = \pi/2$ и $a/b = 0{,}25,\ 0{,}5,\ 0{,}75$: при $a/b = 0{,}25$ — $\mathrm{Re}_\Omega = 37$, при $a/b = 0{,}5$ — $\mathrm{Re}_\Omega = 10$ и при $a/b = 0{,}75$ — $\mathrm{Re}_\Omega = 5$; время затухания равно $\tau = 129{,}4,\ 37{,}46,\ 21{,}05$ соответственно. Из этих данных видно, что увеличение отношения малой и большой полуосей (a/b) приводит к уменьшению Re_Ω, при котором время затухания минимально, и к уменьшению времени затухания.

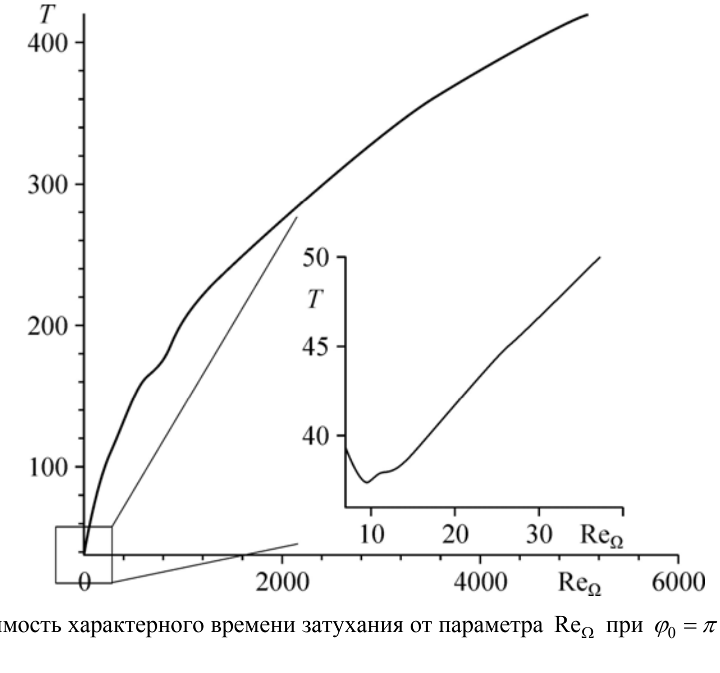

Рис. 4. Зависимость характерного времени затухания от параметра Re_Ω при $\varphi_0 = \pi/2$ и $a/b = 0{,}5$.

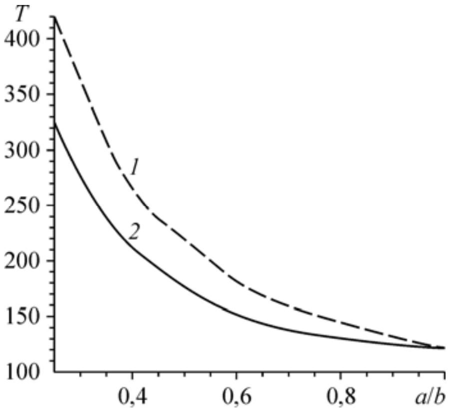

Рис. 5. Зависимость характерного времени затухания от параметра a/b при $\varphi_0 = \pi/2$ и $\mathrm{Re}_\Omega = 1140$. Численное (*1*), асимптотическое (*2*) решения.

На рис. 5 показан график зависимости характерного времени затухания от отношения малой полуоси к большой при $\mathrm{Re}_\Omega = 1140$. Также изображена зависимость времени затухания колебаний от a/b, полученная путем решения линейного интегродифференциального уравнения (5). Из рисунка видно, что по мере уменьшения величины a/b растет разница между численным и асимптотическим решением. Это связано с тем, что при уменьшении a/b течение жидкости становится все более нелинейным, интенсивность вторичных вихревых течений растет. При $a/b \to 1$ интенсивность вторичных вихрей падает до нуля, и численное решение становится очень близким к асимптотическому.

Заключение

В результате расчетов была найдена численная зависимость угла отклонения маятника с эллиптической полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью, от времени при различных значениях параметров Re_Ω и a/b. Найдено характерное время затухания колебаний для различных значений Re_Ω и a/b, и так как это время является немонотонной функцией параметра Re_Ω, были найдены значения Re_Ω, при которых оно минимально: $\mathrm{Re}_\Omega = 37$ при $a/b = 0{,}25$, $\mathrm{Re}_\Omega = 10$ при $a/b = 0{,}5$ и $\mathrm{Re}_\Omega = 5$ при $a/b = 0{,}75$; характерное время затухания $\tau = 129{,}4,\ 37{,}46,\ 21{,}05$ соответственно. Также найдены поля течения жидкости в полости и продемонстрирован эффект генерации и диффузии вихрей в полости формы, отличной от цилиндрической.

Список литературы

1. **Жуковский Н.Е.** О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Избранные сочинения. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. С. 31–152.
2. **Черноусько Ф.Л.** Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 6. С. 1049–1070.
3. **Черноусько Ф.Л.** Движение тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью, при больших числах Рейнольдса // Прикл. математика и механика. 1966. Т. 30, № 3. С. 476–494.
4. **Богоряд И.Б., Лаврова Н.П.** Численное моделирование вращения твердого тела с заполненной жидкостью полостью, имеющей радиальные ребра // Прикл. механика и техническая физика. 2007. Т. 48, № 2. С. 135–139.
5. **Богоряд И.Б., Лаврова Н.П.** Численная модель течения жидкости во вращающемся цилиндре с упругими радиально расположенными ребрами // Прикл. механика и техническая физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 59–64.
6. **Боталов А.Ю., Зубков П.Т.** Колебания маятника с полостью, полностью заполненной вязкой несжимаемой жидкостью // Тепловые процессы в технике. 2012. Т. 4, № 10. С. 449–454.
7. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
8. **Губайдуллин А.А., Зубков П.Т., Свиридов Е.М.** Термоакустические волны, возникающие при нагреве совершенного вязкого газа // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42, № 5. С. 753–759.
9. **Кудинов П.И.** Численное моделирование гидродинамики и теплообмена в задачах с конвективной неустойчивостью и неединственным решением: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Днепропетровск, 1999. 229 с.
10. **Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 512 с.

Статья поступила в редакцию 18 июня 2014 г.