

УДК 536.24

## ЭФФЕКТЫ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ ПРИ ТЕПЛОПЕРЕНОСЕ В ПОТОКЕ НА НАКЛОННОЙ ПЛАСТИНЕ

Дж. Палани, Кванг Енг Ким

Университет Инха, 402751 Инчхон, Республика Корея

E-mail: gpalani32@yahoo.co.in

Рассматриваются эффекты вязкой диссипации при естественной конвекции в потоке на полубесконечной наклонной пластине с переменной температурой поверхности. Получены профили скорости и температуры, трение на поверхности и коэффициент теплопередачи. Изучены эффекты, возникающие в потоке, в зависимости от чисел Грасгофа и Прандтля, угла наклона, показателя степени в законе изменения температуры стенки и вязкой диссипации. Показано, что с увеличением числа Прандтля жидкости время установления стационарных состояний увеличивается, кроме того, при увеличении температуры пластины за счет вязкой диссипации происходит увеличение среднего поверхностного трения и уменьшение среднего числа Нуссельта.

**Ключевые слова:** наклонная пластина, нестационарное течение, число Грасгофа, поверхностное трение, эффект вязкой диссипации.

**Введение.** Естественная конвекция широко используется в различных технических устройствах. Интерес к исследованию двумерных свободно-конвективных течений на полубесконечной пластине обусловлен их применением в промышленности. В работе [1] с использованием явной схемы конечных разностей проведено математическое моделирование неустановившегося естественного конвективного потока вдоль полубесконечной вертикальной пластины. В [2] с помощью неявного метода конечных разностей проанализирована задача о нестационарной естественной конвекции на изотермической плоской пластине. В отличие от случаев вертикальных и горизонтальных пластин естественная конвекция вдоль наклонной пластины изучена недостаточно. Решение задачи о естественной конвекции над изотермической наклонной пластиной, полученное с использованием метода возмущения, представлено в работе [3]. В [4] численно решена задача о естественной конвекции над наклонной пластиной с переменной температурой поверхности или при наличии теплового потока. В работе [5] с помощью неявной схемы конечных разностей Крэнка — Никольсона получено решение задачи о неустановившемся пограничном слое естественной конвекции на наклонной пластине с переменной температурой поверхности. Следует отметить, что в работах [1–5] исследовались неустановившиеся свободные конвективные потоки в пренебрежении нагревом за счет вязкой диссипации.

В работе [6] с учетом вязкого диссипативного нагрева в уравнении энергии изучены свободные конвективные потоки на вертикальной плоской пластине в случаях изотермической поверхности и однородного теплового потока на ней. Численный анализ свободного конвективного потока вязкой диссипативной жидкости на вертикальной пластине с учетом вязкого диссипативного нагрева был проведен в работе [7] с использованием неявного метода конечных разностей. В [8] с помощью неявной схемы расчета исследованы нестационарные течения, возникающие при естественной конвекции вязкой диссипативной жидкости на полубесконечной вертикальной пластине. В [9] численно изучено переходное неустановившееся течение вязкой жидкости на полубесконечной изотермической

наклонной пластине. Эффект вязкой диссипации и работа сил давления при естественной конвекции вдоль вертикальной изотермической пластины изучены в работе [10], в которой уравнения пограничного слоя решались прямым численным моделированием без какой-либо аппроксимации. Установившееся ламинарное течение в пограничном слое вдоль вертикальной стационарной нагретой пластины с учетом вязкой диссипации жидкости исследовано в [11] путем численного решения уравнений пограничного слоя. В работе [12] изучен эффект вязкой диссипации при свободно-конвективном течении Дарси в пограничном слое на вертикальной пластине с экспоненциальным температурным распределением в пористой среде, а также аналитически и численно определены характеристики теплопередачи рассмотренных автомодельных течений естественной конвекции.

Учет эффектов вязкой диссипации, наблюдающихся в присутствии сильных гравитационных полей, важен при изучении процессов большого масштаба (например, на больших планетах, в больших массах газа в космосе), а также при исследовании геологических процессов в жидкостях. Как правило, при наличии вязкой диссипации тепловыделение очень мало, и в уравнении энергии им можно пренебречь. Однако в случае, когда сила тяготения или число Прандтля жидкости велики, вязкими диссипативными эффектами нельзя пренебречь. Вязкий диссипативный нагрев важен даже в случае свободных конвективных потоков, когда число Прандтля жидкости велико. Целью данной работы является изучение неустановившегося свободного конвективного потока на полубесконечной наклонной пластине с переменной температурой поверхности с учетом вязкого диссипативного нагрева.

**1. Формулировка задачи.** Рассмотрим двумерное неустановившееся течение несжимаемой вязкой жидкости на полубесконечной наклонной пластине с переменной температурой поверхности с учетом вязкого диссипативного нагрева. В данной работе используются следующие предположения: 1) пластина наклонена под углом  $\varphi$  к горизонтали; 2) ось  $x$  направлена вдоль пластины, ось  $y$  — по нормали вверх к пластине; 3) в момент времени  $t' \leq 0$  (здесь и далее величины со штрихом являются размерными, величины без штриха — безразмерными) температуры пластины и жидкости одинаковы, при  $t' > 0$  температура пластины внезапно начинает расти, что обуславливает появление вблизи пластины свободно-конвективных потоков; 4) в уравнении энергии учитывается эффект вязкой диссипации; 5) все физические свойства жидкости постоянны, за исключением плотности, которая изменяется при изменении температуры, что учтено только в члене, содержащем массовую силу. Схема течения приведена на рис. 1 ( $T'_w$  — температура пластины;  $T'_\infty$  — температура жидкости вдали от пластины).

С использованием обычного приближения Буссинеска течение описывается уравнениями пограничного слоя

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t'} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} \int_y^\infty (T' - T'_\infty) dy + g\beta \sin \varphi (T' - T'_\infty) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + v \frac{\partial T'}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

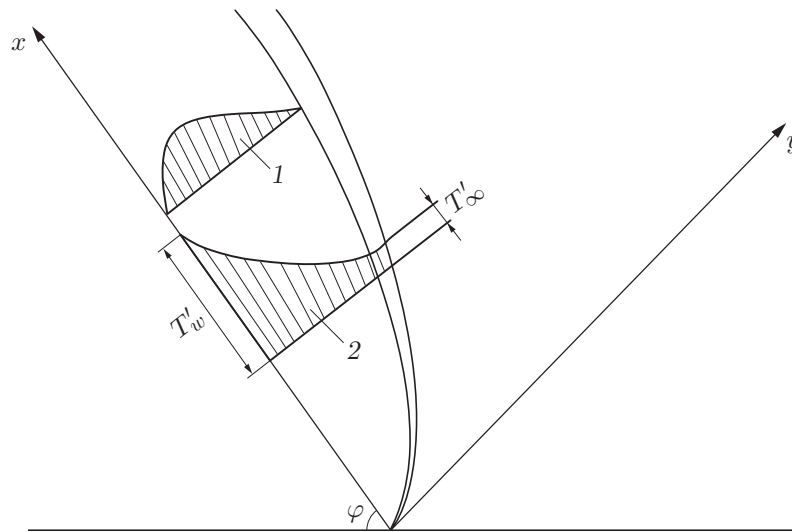


Рис. 1. Схема течения:

1 — гидродинамический пограничный слой; 2 — тепловой пограничный слой

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}
 t' \leq 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T' = T'_\infty & \quad \forall y, \\
 t' > 0: & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T'_w(x) = T'_\infty + ax^n & \quad \text{при } y = 0, \\
 & \quad u = 0, \quad T' = T'_\infty & \quad \text{при } x = 0, \\
 & \quad u \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty & \quad \text{при } y \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $x, y$  — пространственные координаты вдоль пластины и по нормали к ней соответственно;  $u, v$  — составляющие скорости в направлениях осей  $x, y$  соответственно;  $\rho$  — плотность;  $T'$  — температура;  $g$  — ускорение свободного падения;  $C_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $\beta$  — коэффициент объемного теплового расширения;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\mu$  — динамическая вязкость;  $a$  — константа;  $n$  — показатель степени в законе изменения температуры стенки;  $\alpha$  — теплопроводность.

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned}
 X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L} \text{Gr}^{1/4}, \quad U = \frac{uL}{\nu} \text{Gr}^{-1/2}, \quad V = \frac{vL}{\nu} \text{Gr}^{-1/4}, \\
 t = \frac{\nu t'}{L^2} \text{Gr}^{1/2}, \quad T = \frac{T' - T'_\infty}{T'_w(L) - T'_\infty}, \quad \text{Gr} = \frac{g\beta L^3(T'_w(L) - T'_\infty)}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}
 \end{aligned}$$

(Gr, Pr — числа Грасгофа и Прандтля;  $L$  — длина пластины).

Локальное поверхностное трение  $\tau_x$  и среднее поверхностное трение  $\tau_L$  определяются по формулам

$$\begin{aligned}
 \tau_x = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}, \quad \bar{\tau}_L = \frac{1}{L} \int_0^L \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} dx, \\
 \text{Nu}_x = -\frac{x}{T'_w - T'_\infty} \left( \frac{\partial T'}{\partial Y} \right) \Big|_{y=0}, \quad \bar{\text{Nu}}_L = -\int_0^L \frac{1}{T'_w - T'_\infty} \left( \frac{\partial T'}{\partial Y} \right) \Big|_{y=0} dx,
 \end{aligned}$$

где  $\text{Nu}_x$  — локальное число Нуссельта;  $\text{Nu}_L$  — среднее число Нуссельта.

Уравнения (1), (2) можно записать в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} &= \text{Gr}^{-1/4} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial X} \int_Y^\infty T dY + T \sin \varphi + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varepsilon = g\beta L/C_p$  — коэффициент вязкой диссипации, равный отношению кинетической энергии потока к количеству теплоты, переданной жидкости. Соответствующие начальные и граничные условия в безразмерной форме можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} t \leq 0: \quad U &= 0, \quad V = 0, \quad T = 0 \quad \forall y, \\ t > 0: \quad U &= 0, \quad V = 0, \quad T = X^n \quad \text{при } Y = 0, \\ &U = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } X = 0, \\ &U \rightarrow 0, \quad T \rightarrow 0 \quad \text{при } Y \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражения для локального и среднего поверхностного трения, числа Нуссельта также запишем в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \tau_X &= \text{Gr}^{3/4} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}, \quad \bar{\tau} = \text{Gr}^{3/4} \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0} dX, \\ \text{Nu}_X &= -X \text{Gr}^{1/4} \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}, \quad \bar{\text{Nu}} = -\text{Gr}^{1/4} \int_0^1 \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0} dX. \end{aligned} \quad (5)$$

**2. Численный метод.** Двумерные нелинейные неустановившиеся связанные интегродифференциальные уравнения (3) в частных производных с начальными и граничными условиями (4) решались с использованием неявной схемы конечных разностей Крэнка — Никольсона:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k + U_{i,j-1}^{k+1} - U_{i-1,j-1}^{k+1} + U_{i,j-1}^k - U_{i-1,j-1}^k}{4\Delta X} + \\ + \frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j-1}^{k+1} + V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k}{2\Delta Y} = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i-1,j}^{k+1} + U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k}{2\Delta X} + \\ + V_{i,j}^k \frac{U_{i,j+1}^{k+1} - U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k}{4\Delta Y} = \text{Gr}^{-1/4} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial X} \int_Y^\infty T dY + \\ + \sin \varphi \frac{1}{2} (T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j}^k) + \frac{U_{i,j-1}^{k+1} - 2U_{i,j}^{k+1} + U_{i,j+1}^{k+1} + U_{i,j-1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j+1}^k}{2(\Delta Y)^2}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i-1,j}^{k+1} + T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2\Delta X} + V_{i,j}^k \frac{T_{i,j+1}^{k+1} - T_{i,j-1}^{k+1} + T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{4\Delta Y} = \\
& = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_{i,j-1}^{k+1} - 2T_{i,j}^{k+1} + T_{i,j+1}^{k+1} + T_{i,j-1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j+1}^k}{2(\Delta Y)^2} + \\
& \quad + \varepsilon \left( \frac{U_{i,j+1}^{k+1} - U_{i,j-1}^{k+1} + U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k}{4\Delta Y} \right)^2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Здесь нижние индексы  $i, j$  соответствуют точкам сетки вдоль осей  $x, y$ , верхний индекс  $k$  — точке сетки вдоль направления  $t$ .

Опишем решение данных уравнений методом Крэнка — Никольсона. Область интегрирования представляет собой прямоугольник со сторонами  $X_{\max} = 1$  и  $Y_{\max} = 24$ , где  $Y_{\max}$  соответствует значению  $Y = \infty$  (эта граница области интегрирования находится на большом расстоянии от теплового и гидродинамического пограничных слоев). Было выбрано значение  $Y = 24$ , так чтобы были удовлетворены последние два граничных условия в (4). При  $t = 0$  значения  $U, V, T$  известны из начальных условий во всех точках сетки. Вычисление значений  $U, V, T$  на временном слое  $k + 1$  с использованием значений на предыдущем слое  $k$  выполняется следующим образом. Во внутренних узловых точках расчетной области уравнение конечных разностей (8) представляет собой тридиагональную систему уравнений, которая решается с помощью алгоритма Томаса (см. [13]). Таким образом, значения  $T$  вычисляются в каждой узловой точке на  $(k + 1)$ -м временном слое. После подстановки значений  $T$  на  $(k + 1)$ -м временном слое в уравнение (7) аналогично находятся значения  $U$  на  $(k + 1)$ -м слое. Таким образом, значения  $T$  и  $U$  известны. Наконец, с использованием уравнения (6) вычисляются значения  $V$  в каждой узловой точке на  $(k + 1)$ -м временном слое. Вычисления выполняются до тех пор, пока не будет достигнуто стационарное состояние. Стационарное решение считается достигнутым, когда абсолютная разность значений  $U$ , так же как и значений  $T$ , на двух последовательных временных шагах во всех точках сетки меньше  $10^{-5}$ . Выбраны следующие шаги сетки:  $\Delta X = 0,05$ ,  $\Delta Y = 0,25$ ; временной шаг  $\Delta t = 0,01$ . При уменьшении в два раза шагов сетки в каждом из направлений  $X, Y$  и одновременно в обоих направлениях результаты расчетов различались в четвертом десятичном разряде.

С использованием пятиточечной аппроксимации оценивались производные в уравнениях (5), затем с помощью замкнутой формулы интегрирования Ньютона — Котеса вычислялись интегралы.

Аппроксимация Крэнка — Никольсона является согласованной и безусловно устойчивой, а следовательно, сходящейся.

**3. Результаты расчетов и их обсуждение.** Сравнение полученных результатов расчетов с данными работы [8] показало, что они удовлетворительно согласуются. В результате проведенного численного исследования установлено, что на начальном отрезке времени в непосредственной близости от передней кромки на наклонной пластине имеет место отрыв пограничного слоя. На ранней стадии переходного режима отрыв перемещается вдоль пластины от ее передней кромки на определенную высоту за счет действия тангенциальной составляющей силы плавучести, а также нормальной компоненты силы плавучести, которая вблизи передней кромки увеличивается. С уменьшением угла наклона тангенциальная составляющая силы плавучести также уменьшается. Следовательно, при установившемся движении, когда угол наклона пластины уменьшается, отрыв движется в направлении к передней кромке. Это явление наблюдалось ранее при изучении задачи об установившемся естественном конвективном течении на наклонной пластине.

На рис. 2, 3 показаны профили переходной скорости и температуры, на которых имеет место временной максимум. Это явление наблюдалось при исследовании задачи переход-

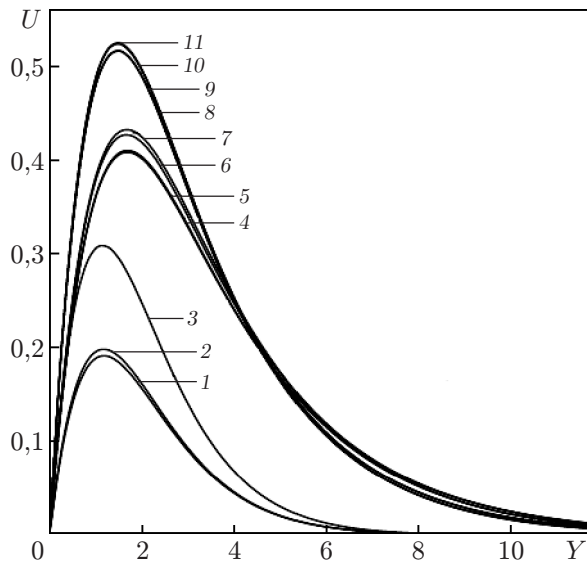


Рис. 2

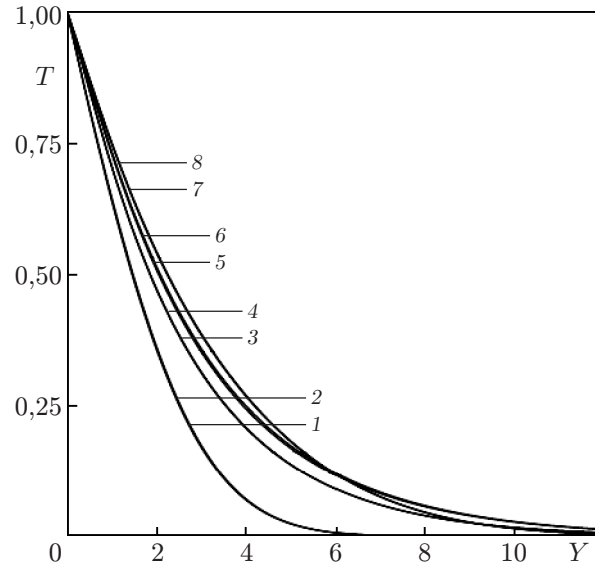


Рис. 3

Рис. 2. Профили скорости переходного процесса при  $X = 1$ ,  $Pr = 0,2$ ,  $n = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  и различных значениях  $Gr$ ,  $\varphi$ :

1, 2 —  $\varphi = 30^\circ$ ,  $t = 1$  (1 —  $Gr = 10^7$ , 2 —  $Gr = 10^6$ ); 3 —  $\varphi = 60^\circ$ ,  $t = 1$ ,  $Gr = 10^6$ ; 4, 5 —  $\varphi = 30^\circ$ ,  $Gr = 10^7$  (4 —  $t = 7,64$  (стационарное состояние), 5 —  $t = 5,62$ ); 6, 7 —  $\varphi = 30^\circ$ ,  $Gr = 10^5$  (6 —  $t = 7,16$  (стационарное состояние), 7 —  $t = 5,15$ ); 8, 9 —  $\varphi = 60^\circ$ ,  $Gr = 10^7$  (8 —  $t = 6,5$  (стационарное состояние), 9 —  $t = 4,87$ ); 10, 11 —  $\varphi = 60^\circ$ ,  $Gr = 10^6$  (10 —  $t = 6,41$  (стационарное состояние), 11 —  $t = 4,65$ )

Рис. 3. Профили неустановившейся температуры при  $X = 1$ ,  $Pr = 0,2$ ,  $n = 1$ ,  $\varepsilon = 1$  и различных значениях  $Gr$ ,  $\varphi$ :

1, 2 —  $Gr = 10^6$ ,  $t = 0,5$  (1 —  $\varphi = 60^\circ$ , 2 —  $\varphi = 30^\circ$ ); 3, 4 —  $\varphi = 60^\circ$  (3 —  $Gr = 10^6$ ,  $t = 6,41$  (стационарное состояние), 4 —  $Gr = 10^7$ ,  $t = 6,5$  (стационарное состояние)); 5, 6 —  $\varphi = 30^\circ$  (5 —  $Gr = 10^6$ ,  $t = 7,16$  (стационарное состояние), 6 —  $Gr = 10^7$ ,  $t = 7,64$  (стационарное состояние)); 7, 8 —  $\varphi = 30^\circ$  (7 —  $Gr = 10^6$ ,  $t = 2,08$ , 8 —  $Gr = 10^7$ ,  $t = 2,1$ )

ной естественной конвекции на вертикальной плоской пластине. При увеличении угла  $\varphi$  нормальная компонента силы плавучести, обуславливающая движение жидкости вдоль пластины, вблизи передней кромки уменьшается. При этом время достижения установившегося состояния также уменьшается. Так как с увеличением  $\varphi$  касательная сила плавучести доминирует вниз по потоку и увеличивается, скорость течения возрастает.

Замечено, что с увеличением числа Грасгофа скорость течения уменьшается, а температура возрастает. При этом разность между максимальными значениями скорости и температуры и значениями, соответствующими установившемуся состоянию, уменьшается.

Вычислено время, необходимое для достижения установившегося состояния, при различных значениях параметра диссипации, показателя  $n$  и числах Прандтля жидкостей  $Pr = 0,20; 0,71; 7,00; 100,00$ .

На рис. 4,а, 5,а показаны профили скорости для установившегося состояния при  $X = 1$ ,  $n = 0,5; 1,0$ ,  $\varepsilon = 1, 2, 3$  и различных значениях  $Pr$ . Видно, что при всех числах Прандтля с увеличением вязкого диссипативного нагрева стационарная скорость увеличивается. Из рис. 4,а, 5,а следует, что с увеличением числа Прандтля установившаяся скорость умень-

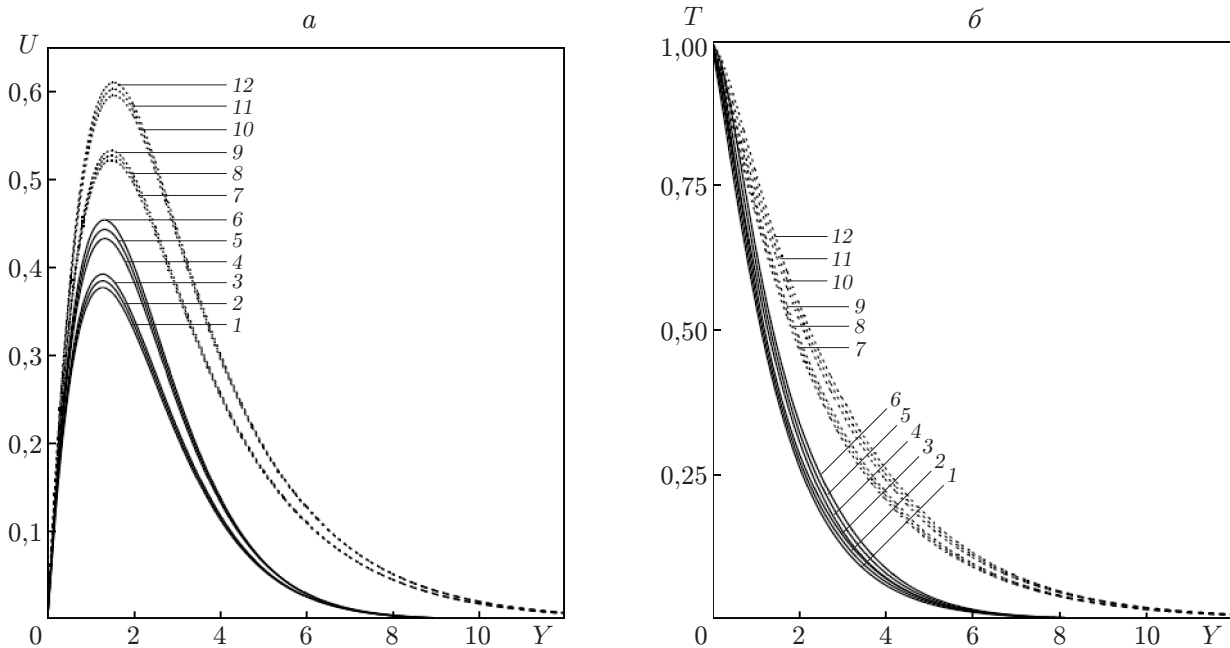


Рис. 4. Профили скорости (а) и температуры (б) в случае установившегося состояния при  $X = 1$ ,  $Gr = 10^6$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $Pr = 0,20$ ;  $0,71$  и различных значениях  $n$ ,  $\varepsilon$ : пунктирные линии —  $Pr = 0,2$ , сплошные —  $Pr = 0,71$ ; 1-3 —  $n = 1$  (1 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 6,9$ , 2 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 7,02$ , 3 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 7,14$ ); 4-6 —  $n = 0,5$  (4 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 5,97$ , 5 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 5,99$ , 6 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 5,99$ ); 7-9 —  $n = 1$  (7 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 6,41$ , 8 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 6,4$ , 9 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 6,38$ ); 10-12 —  $n = 0,5$  (10 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 5,86$ , 11 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 5,83$ , 12 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 5,79$ )

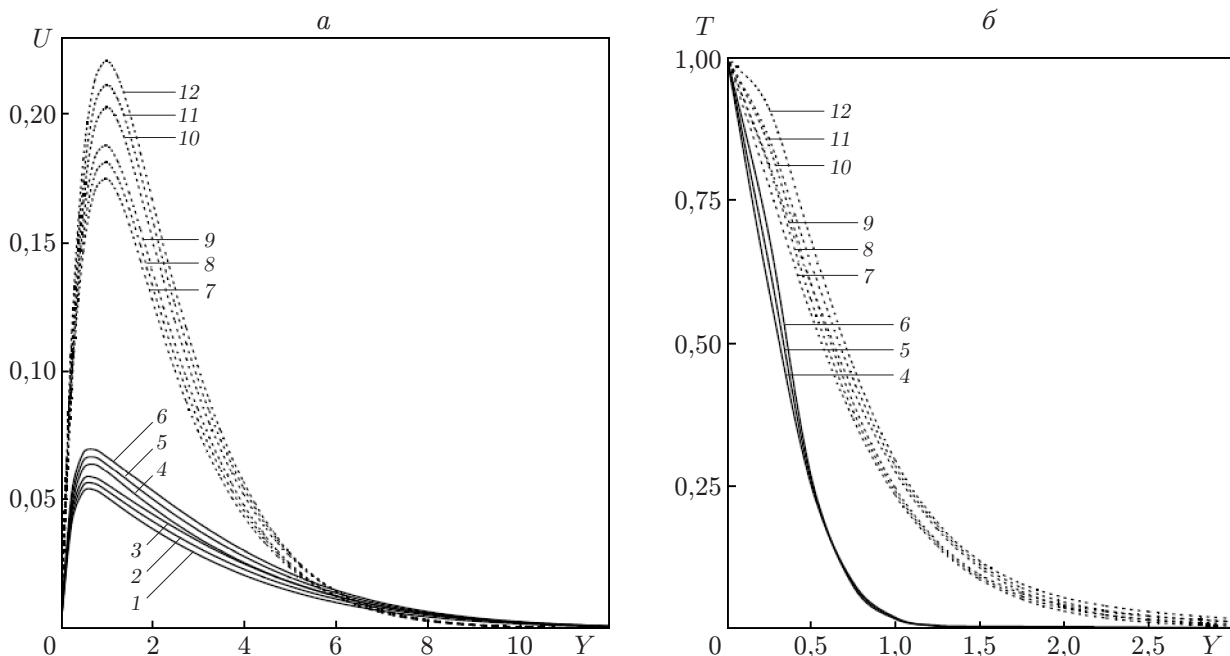


Рис. 5. Профили скорости (а) и температуры (б) в случае установившегося состояния при  $X = 1$ ,  $Gr = 10^6$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ,  $Pr = 7$ ,  $100$  и различных значениях  $n$ ,  $\varepsilon$ : пунктирные линии —  $Pr = 7$ , сплошные —  $Pr = 100$ ; 1-3 —  $n = 1$  (1 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 19,02$ , 2 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 20,9$ , 3 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 22,48$ ); 4-6 —  $n = 0,5$  (4 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 18,9$ , 5 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 19,86$ , 6 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 20,46$ ); 7-9 —  $n = 1$  (7 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 10,92$ , 8 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 11,14$ , 9 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 11,31$ ); 10-12 —  $n = 0,5$  (10 —  $\varepsilon = 1$ ,  $t = 10,29$ , 11 —  $\varepsilon = 2$ ,  $t = 10,42$ , 12 —  $\varepsilon = 3$ ,  $t = 10,5$ )

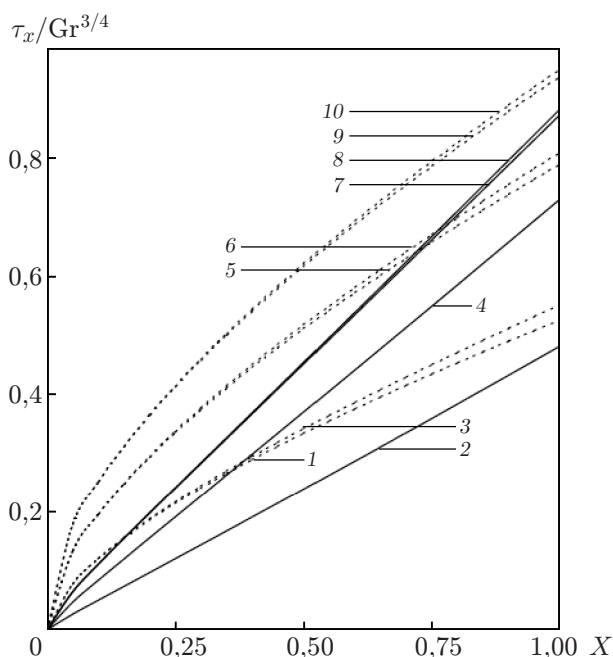


Рис. 6

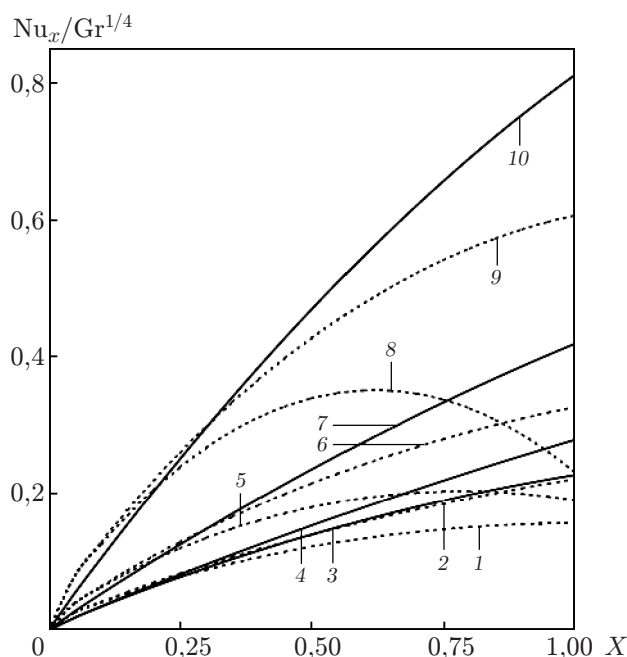


Рис. 7

Рис. 6. Распределение локального поверхностного трения по пластине ( $Gr = 10^6$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ): пунктирные линии —  $n = 0,5$ , сплошные —  $n = 1$ ; 1-3 —  $Pr = 7$  (1 —  $\varepsilon = 1$ , 2, 3 —  $\varepsilon = 2$ ); 4-6 —  $Pr = 0,71$  (4, 5 —  $\varepsilon = 1$ , 6 —  $\varepsilon = 2$ ); 7-10 —  $Pr = 0,2$  (7, 8 —  $\varepsilon = 1$ , 9, 10 —  $\varepsilon = 2$ )

Рис. 7. Распределение локального числа Нуссельта по пластине ( $Gr = 10^6$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ): пунктирные линии —  $n = 0,5$ , сплошные —  $n = 1$ ; 1-4 —  $Pr = 0,2$  (1, 2 —  $\varepsilon = 2$ , 3, 4 —  $\varepsilon = 1$ ); 5-7 —  $Pr = 0,71$  (5 —  $\varepsilon = 2$ , 6, 7 —  $\varepsilon = 1$ ); 8-10 —  $Pr = 7$  (8 —  $\varepsilon = 2$ , 9, 10 —  $\varepsilon = 1$ )

шается, при этом время, необходимое для достижения стационарных состояний, увеличивается. Вязкий диссипативный нагрев оказывает влияние на время достижения установившегося состояния только при очень больших значениях числа Прандтля жидкости.

На рис. 4,б, 5,б показаны профили температуры для установившегося состояния при  $X = 1$  и различных значениях числа Прандтля жидкости, показателя  $n$  и параметра вязкой диссипации  $\varepsilon$ . Видно, что с увеличением вязкого диссипативного нагрева температура увеличивается независимо от числа Прандтля жидкости. Из рис. 4,б, 5,б также следует, что с увеличением значений  $Pr$  и  $n$  температура уменьшается.

Распределение локального поверхностного трения показано на рис. 6. Видно, что с увеличением  $Pr$  локальное пристенное сдвиговое напряжение уменьшается, поскольку уменьшается скорость течения. Кроме того, с увеличением  $n$  локальное поверхностное трение уменьшается, так как вблизи пластины градиент скорости уменьшается (см. рис. 4,а). С увеличением вязкого диссипативного нагрева локальное поверхностное трение возрастает.

На рис. 7 представлено распределение локального числа Нуссельта. Видно, что с увеличением значения  $n$  число Нуссельта увеличивается, однако вблизи передней кромки оно уменьшается. Кроме того, локальное число Нуссельта увеличивается с увеличением  $Pr$ . На рис. 7 также видно, что увеличение вязкого диссипативного нагрева вызывает уменьшение локального числа Нуссельта.

Средние значения поверхностного трения и числа Нуссельта приведены на рис. 8, 9 соответственно. С увеличением  $n$  среднее поверхностное трение уменьшается. Это обуслов-



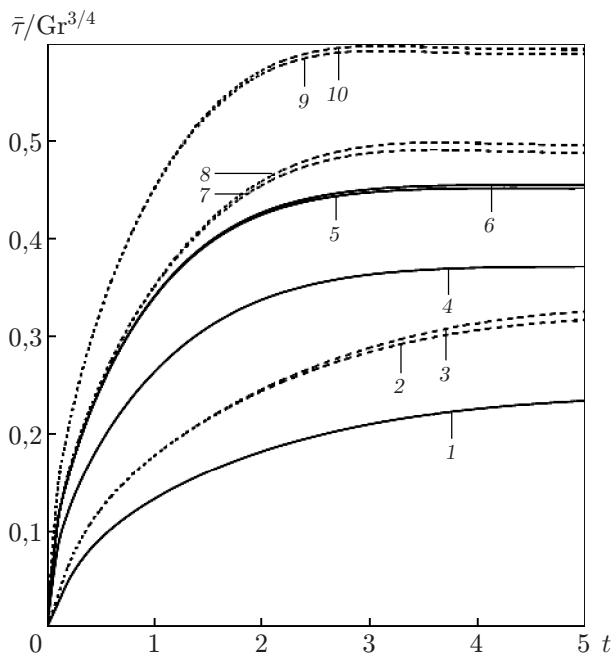


Рис. 8

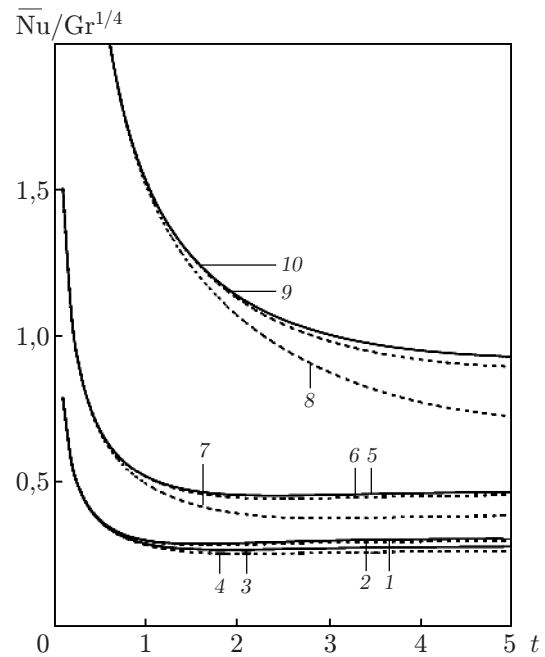


Рис. 9

Рис. 8. Распределение среднего поверхностного трения по пластине ( $Gr = 10^6$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ): пунктирные линии —  $n = 0,5$ , сплошные —  $n = 1$ ; 1 —  $Pr = 7$ ,  $\varepsilon = 1$ ; 2, 3 —  $Pr = 7$  (2 —  $\varepsilon = 1$ , 3 —  $\varepsilon = 2$ ); 4 —  $Pr = 0,71$ ,  $\varepsilon = 1$ ; 5, 6 —  $Pr = 0,2$  (5 —  $\varepsilon = 1$ , 6 —  $\varepsilon = 2$ ); 7, 8 —  $Pr = 0,71$  (7 —  $\varepsilon = 1$ , 8 —  $\varepsilon = 2$ ); 9, 10 —  $Pr = 0,2$  (9 —  $\varepsilon = 1$ , 10 —  $\varepsilon = 2$ )

Рис. 9. Распределение среднего числа Нуссельта по пластине ( $Gr = 10^6$ ,  $\varphi = 60^\circ$ ): пунктирные линии —  $n = 0,5$ , сплошные —  $n = 1$ ; 1–4 —  $Pr = 0,2$  (1, 2 —  $\varepsilon = 1$ , 3, 4 —  $\varepsilon = 2$ ); 5–7 —  $Pr = 0,71$  (5, 6 —  $\varepsilon = 1$ , 7 —  $\varepsilon = 2$ ); 8–10 —  $Pr = 7$  (8 —  $\varepsilon = 2$ , 9, 10 —  $\varepsilon = 1$ )

лено тем, что вблизи пластины градиент скорости уменьшается. Среднее поверхностное трение увеличивается со временем, асимптотически выходя на постоянное значение. Увеличение вязкого диссипативного нагрева вызывает увеличение среднего поверхностного трения. С увеличением числа Прандтля среднее поверхностное трение уменьшается.

Из рис. 9 следует, что в начальный период при изменении  $n$  среднее число Нуссельта не меняется. Это означает, что первоначально теплопередача осуществляется только за счет теплопроводности. В начальный период времени конвекции среднее число Нуссельта незначительно уменьшается, а затем увеличивается с увеличением  $n$ . Также из рис. 9 следует, что среднее число Нуссельта уменьшается с увеличением вязкого параметра диссипации независимо от числа Прандтля. Кроме того, среднее число Нуссельта увеличивается с увеличением  $Pr$ .

**Заключение.** Рассмотрено неустановившееся естественное конвективное течение на полубесконечной наклонной пластине с переменной температурой поверхности с учетом вязкого диссипативного нагрева в уравнении энергии. Дифференциальные уравнения течения преобразованы в систему безразмерных уравнений, которые решены численно с использованием неявного метода конечных разностей. Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы. С увеличением угла  $\varphi$  время достижения установившегося состояния уменьшается. С увеличением значения числа Грасгофа разность между максимальными значениями скорости и температуры и значениями, соответствующими установившемуся состоянию, уменьшается. С увеличением вязкого диссипативного нагрева

скорость установившегося течения увеличивается для всех чисел Прандтля. При больших значениях числа Прандтля увеличение параметра вязкой диссипации приводит к увеличению времени достижения установившегося состояния. С увеличением вязкого диссипативного нагрева температура увеличивается независимо от числа Прандтля жидкости. Увеличение вязкого диссипативного нагрева вызывает повышение локального поверхностного трения. С увеличением вязкого параметра диссипации среднее число Нуссельта уменьшается независимо от числа Прандтля.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Hellums J. D., Churchill S. W.** Transient and steady state, free and natural convection, numerical solutions. Pt 1. The isothermal vertical plate // *AIChE J.* 1962. V. 8, iss. 5. P. 690–692.
2. **Soundalgekar V. M., Ganesan P.** Finite difference analysis of transient free convection on an isothermal vertical at plate // *Region. J. Energy Heat Mass Transfer.* 1981. V. 13. P. 219–224.
3. **Kierkus W. T.** An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about an inclined isothermal plate // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1968. V. 11. P. 241–253.
4. **Chen T. S., Tien H. C., Armaly B. F.** Natural convection on horizontal, inclined and vertical plates with variable surface temperature or heat ux // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 1986. V. 29. P. 1465–1478.
5. **Ekambavannan K., Ganesan P.** Finite difference solution of unsteady natural convection boundary layer flow over an inclined plate with variable surface temperature // *Wärme- und Stoffübertrag.* 1994. Bd 30. S. 63–69.
6. **Gebhart B.** Effects of viscous dissipation in natural convection // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 14. P. 225–232.
7. **Soundalgekar V. M., Lahurikar R. M., Pohanerkar S. G.** Transient free convection flow of an incompressible viscous dissipative fluid // *Heat Mass Transfer.* 1997. V. 32, N 4. P. 301–305.
8. **Soundalgekar V. M., Jaiswal B. S., Uplekar A. G., Takhar H. S.** Transient free convection flow of viscous dissipative fluid past a semi-infinite vertical plate // *J. Appl. Mech. Engng.* 1999. V. 4, N 2. P. 203–218.
9. **Ganesan P., Palani G.** Transient free convection flow of viscous dissipative fluid past a semi-infinite inclined plate // *J. Appl. Mech. Engng.* 2003. V. 8, N 3. P. 395–402.
10. **Pantokratoras A.** Effect of viscous dissipation and pressure stress work in natural convection along a vertical isothermal plate. New results // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2003. V. 46. P. 4979–4983.
11. **Pantokratoras A.** Effect of viscous dissipation in natural convection along a heated vertical plate // *Appl. Math. Modelling.* 2005. V. 29. P. 553–564.
12. **Magyari E., Rees D. A. S.** Effect of viscous dissipation on the Darcy free convection boundary-layer flow over a vertical plate with exponential temperature distribution in a porous medium // *Fluid Dynamics Res.* 2006. V. 38. P. 405–429.
13. **Carnahan B.** Applied numerical methods / B. Carnahan, H. A. Luther, J. O. Wilkes. N. Y.: John Wiley and Sons, 1969.

*Поступила в редакцию 21/IV 2009 г.*