УДК 532.516 + 517.958:532.5

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБКЕ С ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ СТЕНКОЙ

А. Е. Медведев

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: medvedev@itam.nsc.ru

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в деформирующейся трубке. Для течения с малыми числами Рейнольдса в трубке (при условии малости деформирования стенок) получены решения нестационарных трехмерных уравнений Навье — Стокса: обобщенное перистальтическое течение и течение при эллиптическом деформировании стенок сосуда. Установлено, что при малом нестационарном деформировании стенок трубки найденные решения удовлетворяют уравнениям и граничным условиям с погрешностью, на порядок меньшей, чем степень деформирования стенок трубки. Показано, что в случае эллиптического деформирования сосуда полученное решение хорошо согласуется с экспериментальными данными.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, уравнения Навье — Стокса, аналитическое решение, течение Пуазейля.

Введение. В настоящее время течение крови в сосудах часто описывается как течение Пуазейля [1]. При этом не учитывается деформирование стенок кровеносных сосудов, вызванное прохождением пульсовой волны и такими патологическими изменениями кровеносного русла, как аневризма (локальное вздутие сосуда) или стеноз (локальное сужение сосуда). Решение, соответствующее перистальтическому течению, недостаточно точно описывает реальные процессы [2, 3]. В работе [4] представлено перистальтическое решение, найденное методом возмущений, однако его асимптотическое разложение приводит к решениям, которые достаточно сложны для использования. Обзор современных работ, посвященных исследованию перистальтического движения, приведен в работе [5]. Известно, что в зависимости от диаметра кровеносного сосуда гладкомышечные элементы располагаются в нем под углом к его оси, составляющим от 30 до 90° [6–8]. Поэтому активное движение стенок сосуда отличается от перистальтического.

В работе [1. Гл. 6] рассматривалось установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости по трубке с медленно меняющимся эллиптическим сечением. В основу анализа положена гидродинамическая теория смазки с медленным изменением площади сечения вдоль трубки. Решение определялось разложением в асимптотические ряды с учетом влияния инерции жидкости на характер течения. Ряд приближенных решений задачи о движении жидкости в трубке с деформирующейся стенкой получен в работах [8, 9].

Целью настоящей работы является получение решений, описывающих течение в сосуде с деформирующимися стенками с заданной степенью точности, а также решений, описывающих течение жидкости в мелких сосудах при нестационарном малом деформировании стенок сосуда.

Уравнения движения. Рассмотрим трехмерное нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) система уравнений имеет вид [10]

$$
\begin{gathered}
\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu\Big(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big),\\
\rho\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + u\,\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}\Big) = -\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mu\Big(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2}\Big),\\
\rho\Big(\frac{\partial w}{\partial t} + u\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r}\,\frac{\partial w}{\partial \varphi} + w\,\frac{\partial w}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\nabla^2 w,\\
\frac{\partial\,(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial\,(rw)}{\partial z} = 0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\mu = \mathrm{const}$ — динамическая вязкость; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность; w, u, v — осевая, радиальная и угловая компоненты вектора скорости соответственно;

$$
\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
$$

Нестационарное движение (деформация) стенки трубки задается уравнением $r = r_w(t, \varphi, z)$. Схема течения в трубке приведена на рис. 1.

Известно, что при малых нагружениях движение сыпучей среды описывается уравнениями, подобными уравнениям Навье — Стокса [11–13]. Поскольку при этом на границе возможно проскальзывание сыпучей среды [12, 13], для описания таких сред введен коэффициент $n < 1$. В этом случае на стенке трубки ($r = r_w(t, \varphi, z)$) ставятся следующие условия для компонент вектора скорости жидкости:

$$
u = \frac{\partial r_w}{\partial t}, \qquad v = n\,\frac{\partial^2 r_w}{\partial t\,\partial \varphi}, \qquad w = n\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(r_w\,\frac{\partial r_w}{\partial z}\Big)
\tag{2}
$$

($n \leqslant 1$ — постоянный коэффициент прилипания среды к стенке). Очевидно, что для вязкой жидкости коэффициент прилипания $n = 1$.

На оси трубки ($r = 0$) должны выполняться условия

$$
u = v = 0.
$$

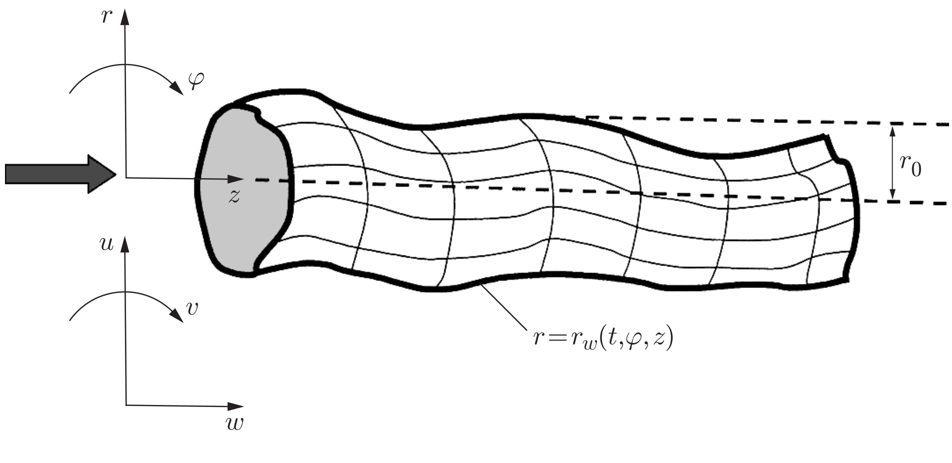


Рис. 1. Схема течения в трубке

Приближенные модели течения. Для малых кровеносных сосудов (мелких артерий и артериол) деформации стенок, очевидно, являются малыми. Течение в таких сосудах подобно течению Пуазейля. При моделировании кровеносных сосудов не всегда требуется высокая точность, так как исходные данные для решения задач о течении крови имеют большую погрешность. Будем искать приближенное решение полной системы уравнений Навье — Стокса (1) при условии малости числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho W r_0/\mu$ (W — характерная продольная скорость) и параметра $\varkappa$, характеризующего степень отклонения формы стенки трубки от цилиндрической или эллиптической.

Далее приведены решения системы уравнений (1) при различных предположениях о структуре течения и законе деформирования стенки сосуда $r = r_w(t, \varphi, z)$.

Обобщенное перистальтическое течение. Перистальтическим решением [2, 3] называется решение, в котором угловая скорость отсутствует ($v = 0$), а давление p линейно зависит только от продольной координаты z. Обычно перистальтическое решение используется при симметричном периодическом деформировании круглой трубы. Ниже предложено обобщение перистальтического решения на случай несимметричного деформирования трубы с эллиптическим сечением.

Представим перистальтическое решение в общем виде

$$
r_w(t,\varphi,z) = r_0\,\frac{1-\varkappa(H+f)}{\sqrt{\Phi}}, \qquad u(t,r,\varphi,z) = -\varkappa\,\frac{r_0}{\sqrt{\Phi}}\,\frac{r}{r_w}\,\frac{\partial H}{\partial t},
$$

$$
v(t,r,\varphi,z) = \varkappa n\,\frac{r}{r_w}\,\frac{r_0}{2}\,\Phi^{-3/2}\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\,\frac{\partial H}{\partial t},
$$

$$
\begin{aligned}
w(t,r,\varphi,z) = -\varkappa p_{10}\,\mathrm{e}^{\varkappa p_{11}(t)}\,\frac{r_0}{4\mu}\Big(1-\frac{r^2}{r_w^2}\Big) - r_0^2 n\Big[1-\frac{r^2}{r_w^2}\Big(1-\frac{\varkappa}{\sqrt{\Phi}}\,\frac{r_w}{r_0}\Big)\Big]\,\frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial z} + {}\\
+ \varkappa^2 n\,\frac{r_0^2}{\Phi}\,\frac{r^2}{r_w^2}\Big(\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z}\Big)\frac{\partial H}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$
p(t,z) = \varkappa p_{10}\,\mathrm{e}^{\varkappa p_{11}(t)}\,\frac{z}{r_0} + p_2(t),
$$

где $\Phi(\varphi) = 1 + A\cos(2\varphi) - B\sin(2\varphi)$ — уравнение эллипса; A, B — постоянные, причем $A^2 + B^2 < 1$; $H(t,z) = N\cos(2\alpha(t,z))$; $\alpha(t,z) = 2\pi\varkappa(z-Ut)/L$; U — скорость перистальтического движения; N, L, p_{10} — произвольные постоянные; $p_{11}(t)$, $p_2(t)$, $f(\varphi,z)$ — произвольные функции. Характерная скорость продольного движения $W = \varkappa p_{10} r_0/(4\mu)$.

Несимметричность деформирования трубы определяется функцией $f(\varphi,z)$, при $\partial f/\partial\varphi \equiv 0$ деформирование трубы является симметричным. Эллиптичность сечения трубы определяется функцией $\Phi(\varphi)$, при $\Phi(\varphi) \equiv 1$ сечение трубы представляет собой круг. При этом решение (3) переходит в решение для перистальтического течения с угловой скоростью $v = 0$.

Решение (3) обеспечивает точное выполнение граничных условий (2).

Поперечная и угловая скорости в решении (3) имеют третий порядок малости по параметру $\varkappa$, т. е. $u \sim O(\varkappa^3)$, $v \sim O(\varkappa^3)$.

С точностью до членов порядка $O(\varkappa^3)$ деформация стенки r_w равна

$$
r_w(t,\varphi,z) \approx r_0\frac{1-[N+f(\varphi,z)]\varkappa}{\sqrt{\Phi(\varphi)}} + O(\varkappa^3).
$$

Известное перистальтическое решение [2, 3] получено для другой функции деформации стенки сосуда:

$$
r_w(t,\varphi,z) = r_0[1-\varkappa H(t,z)] \approx r_0(1-\varkappa) + O(\varkappa^3),
$$

где $H(t,z) = \cos(2\pi\varkappa(z-Ut)/r_0)$.

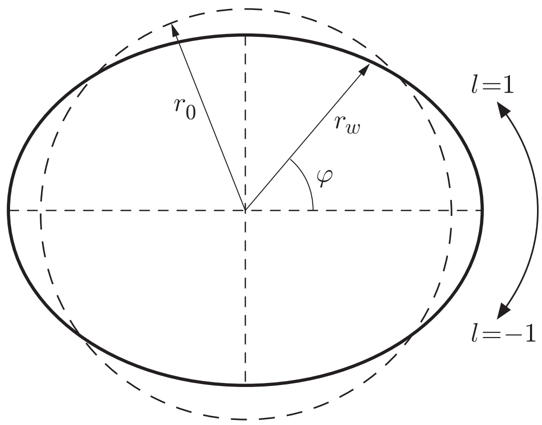


Рис. 2. Схема деформирования стенки сосуда эллиптическим шаблоном: сплошная линия — эллипс с длиной полуоси r_w (см. (4)), штриховая — окружность радиусом r_0

Течение с дифференциальным переносом масс (модель эллиптического деформирования трубки). Рассмотрим медленное ползучее течение с малым числом Рейнольдса $\mathrm{Re} \sim O(\varkappa^2)$. Стенка сосуда деформируется следующим образом: на трубку надевается эллиптический шаблон, который вращается с постоянной скоростью; сама трубка не вращается, имеет место только эллиптическое деформирование стенок трубки с постоянной угловой скоростью. Частицы жидкости в поперечном сечении совершают сложное движение, при этом происходит дифференциальный перенос масс [12, 13]. Результаты экспериментов по такому нагружению сыпучих сред (песка) и вязких жидкостей (глицерина и меда) приведены в [12].

Эллиптическое деформирование стенки сосуда представим в виде функции

$$r_w = r_0\{1 + \varkappa[(m/2)\cos(2\alpha)]\}, \tag{4}$$

где $\alpha(t,\varphi) = \varphi + \varphi_0 - 2\pi l t/t_0$; φ_0 — начальное положение эллиптического шаблона; t_0 — время, в течение которого эллиптический шаблон совершает один оборот; m — постоянная; l — параметр ($l = 1$ при вращении эллиптического шаблона против часовой стрелки, $l = -1$ при его вращении по часовой стрелке). Длины большой и малой полуосей эллипса равны $r_{w\max} = r_0(1+\varkappa m/2)$, $r_{w\min} = r_0(1-\varkappa m/2)$ соответственно. Схема деформирования эллиптического шаблона приведена на рис. 2.

При эллиптическом деформировании трубки решение имеет вид

$$\begin{gathered}
r_w(t,\varphi,z) = r_0\Big\{1 + \varkappa\Big[\frac{m}{2}\cos(2\alpha) - f\Big]\Big\},\\
u(t,r,\varphi,z) = 2\pi l\varkappa m\,\frac{r}{t_0}\Big[2(2n-1)\ln\Big(\frac{r}{r_w}\Big) + \frac{r_0}{r_w}\Big]\sin(2\alpha),\\
v(t,r,\varphi,z) = 4\pi l\varkappa m\,\frac{r}{t_0}\Big[(2n-1)\ln\Big(\frac{r}{r_w}\Big) + n\,\frac{r_0}{r_w}\Big]\cos(2\alpha),\\
w(t,r,\varphi,z) = -\varkappa p_1(t)\,\frac{r_0}{4\mu}\Big(1 - \frac{r^2}{r_w^2}\Big) - 2\pi n l\varkappa^2 m\,\frac{r_0^2}{t_0}\,\frac{r^2}{r_w^2}\,\sin(2\alpha)\,\frac{\partial f}{\partial z},\\
p(t,r,\varphi,z) = \varkappa p_1(t)\,\frac{z}{r_0} + p_2(t) + 16\pi(2n-1)lm\,\frac{\mu}{t_0}\sin(2\alpha)G(r;\varkappa),
\end{gathered} \tag{5}$$

где $f(\varphi,z)$ — произвольная функция, обусловливающая искажение эллиптической формы шаблона; $p_1(t)$, $p_2(t)$ — произвольные функции. Характерная скорость продольного движения равна $W = \varkappa p_1(t) r_0/(4\mu)$.

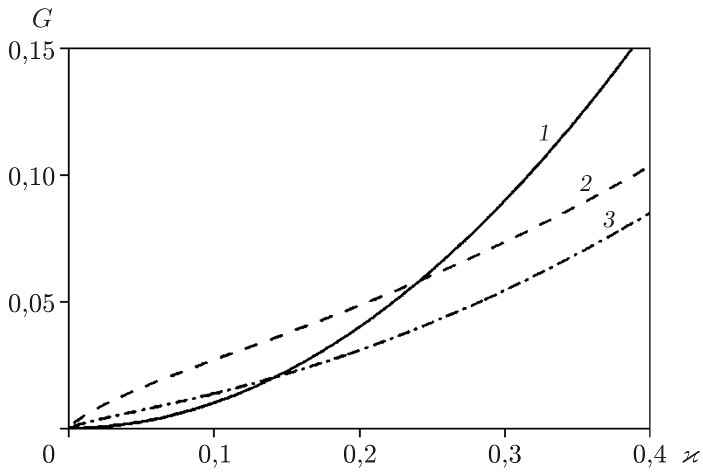


Рис. 3. Зависимость функции G от параметра $\varkappa$:
1 — $G = \varkappa^2$; *2, 3* — $G = \varkappa \ln(1/\varkappa^h + \varkappa/2)$ (*2* — $h = 0{,}1$, *3* — $h = 0{,}04$)

Функция $G(r; \varkappa)$ имеет вид

$$G(r; \varkappa) = \varkappa \ln\Big(\frac{r}{r_0}\,\frac{a}{\varkappa^h} + b\varkappa\Big), \tag{6}$$

где $0 < h < 1$ — показатель степени; $a > 0$, $b > 0$ — произвольные положительные параметры. Функция G (6) обладает свойствами

$$G(0; \varkappa) = \varkappa \ln(b\varkappa), \qquad \lim_{\varkappa \to +0} G(r; \varkappa) = 0.$$

На рис. 3 приведена зависимость функции G от параметра $\varkappa$ при $a = 1$, $b = 0{,}5$ и $h = 0{,}10$; $0{,}04$. Видно, что при больших значениях $\varkappa$ значение функции $G(r_0; \varkappa)$ меньше $\varkappa^2$, при малых значениях $\varkappa$ значение функции $G(r_0; \varkappa)$ больше $\varkappa^2$. Из рис. 3 следует, что при заданном значении $\varkappa_*$ можно подобрать значение параметра h_*, при котором будет выполняться неравенство $G(r_0; \varkappa_*) < \varkappa_*^2$.

На оси трубки скорости u и v равны нулю. На стенке трубки граничные условия (2) для решения (5) выполняются точно.

Решение (5) удовлетворяет третьему и четвертому уравнениям (1) с точностью до $O(\varkappa^2)$. Для первого уравнения системы (1) погрешность решения (5) пропорциональна величине $dG(r; \varkappa)/dr - \varkappa/r$, для второго уравнения системы (1) погрешность этого решения порядка $G(r; \varkappa)/r$. Согласно (6) можно подобрать параметр h, так чтобы погрешность решения (5) для первого и второго уравнений системы (1) была порядка $O(\varkappa^2)$.

Погрешность, с которой решение (5) удовлетворяет уравнениям (1), пропорциональна $1/r$. Поэтому решение (5) удовлетворяет уравнениям (1) с точностью до $O(\varkappa^2)$ только при $r > 1/\varkappa$.

Заметим, что радиальная u и угловая v скорости не зависят от вязкости жидкости и являются величинами первого порядка малости по параметру $\varkappa$.

Рассмотрим более подробно движение жидкости, описываемое решением (5). Продольное движение жидкости в сосуде описывается известным решением Пуазейля (уравнением для продольной скорости w) с дополнительным слагаемым, пропорциональным квадрату малого параметра $\varkappa$ и производной от функции $f(\varphi, z)$. Движение жидкости в поперечном сечении сосуда имеет более сложный характер. В процессе деформирования стенки сосуда (4) все точки среды движутся по замкнутым траекториям с различными периодами вращения вокруг центра эллипса. В работе [12] этот эффект называется эффектом дифференциального вращения, или эффектом направленного переноса масс.

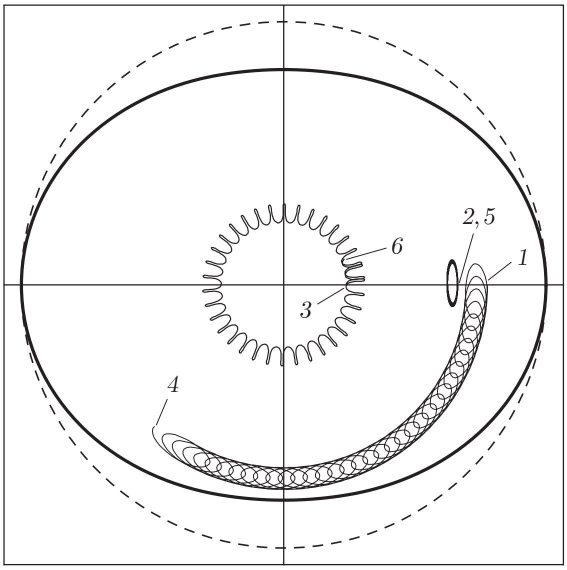


Рис. 4. Траектории движения трех точек в течение 17 оборотов эллиптического шаблона:

1–3 — начальное положение точек, *4–6* — конечное положение точек; штриховая линия — окружность радиусом $r_{w\,\max}$, сплошная линия — эллиптический шаблон

Движение точки $\{r_*(t), \varphi_*(t)\}$ с начальными координатами $\{r_*(0), \varphi_*(0)\}$ описывается системой уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{dr_*(t)}{dt} &= 2\pi l\varkappa m\,\frac{r_*}{t_0}\Big[2(2n-1)\ln\Big(\frac{r_*}{r_w(t,\varphi_*,z)}\Big) + \frac{r_0}{r_w(t,\varphi_*,z)}\Big]\sin\left(2\alpha(t,\varphi_*)\right),\\
\frac{d\varphi_*(t)}{dt} &= 4\pi l\varkappa m\,\frac{1}{t_0}\Big[(2n-1)\ln\Big(\frac{r_*}{r_w(t,\varphi_*,z)}\Big) + n\,\frac{r_0}{r_w(t,\varphi_*,z)}\Big]\cos\left(2\alpha(t,\varphi_*)\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

При вращении эллиптического шаблона происходит интенсивное перемешивание жидкости (рис. 4). На рис. 4 представлены траектории движения трех точек при вращении эллиптического шаблона по часовой стрелке (17 оборотов). Значение произведения $\varkappa m = 0{,}2$, средний радиус $r_0 = 1$, угловая скорость вращения шаблона $1/t_0 = 1$. Функция дополнительной деформации стенки сосуда имеет вид $f(\varphi, z) = 0$. Начальный угол поворота для всех трех точек равен $\varphi_*(0) = 0$, начальная координата точек *1, 2, 3* равна $r_*(0) = 0{,}95 r_{w\,\min}$; $0{,}81 r_{w\,\min}$; $0{,}29 r_{w\,\min}$ соответственно. Точка *1* мигрирует по часовой стрелке (общее направление смещения совпадает с направлением вращения шаблона) до положения *4*, а точка *2* совершает эллиптическое вращение вокруг начального положения (ее конечное положение *5* совпадает с начальным). Точка *3* перемещается против часовой стрелки и совершает оборот вокруг центра. На втором обороте ее траектория не совпадает с траекторией на первом обороте (конечное положение точки — положение *6*). Один виток точки совершают за половину оборота эллиптического шаблона. Поэтому в работе [12] половина оборота циклического шаблона называется циклом нагружения. В результате вращения эллиптического шаблона в среде накапливаются “остаточные” смещения. Смещение точек происходит по направлению и против направления движения часовой стрелки. Точки, расположенные ближе к стенке, смещаются по часовой стрелке. Точки, лежащие ближе к центру, смещаются на меньшее расстояние и в некоторый момент начинают смещаться против часовой стрелки. Чем ближе к центру находится точка, тем больше ее угловое смещение, т. е. вблизи центра и стенки скорость углового смещения

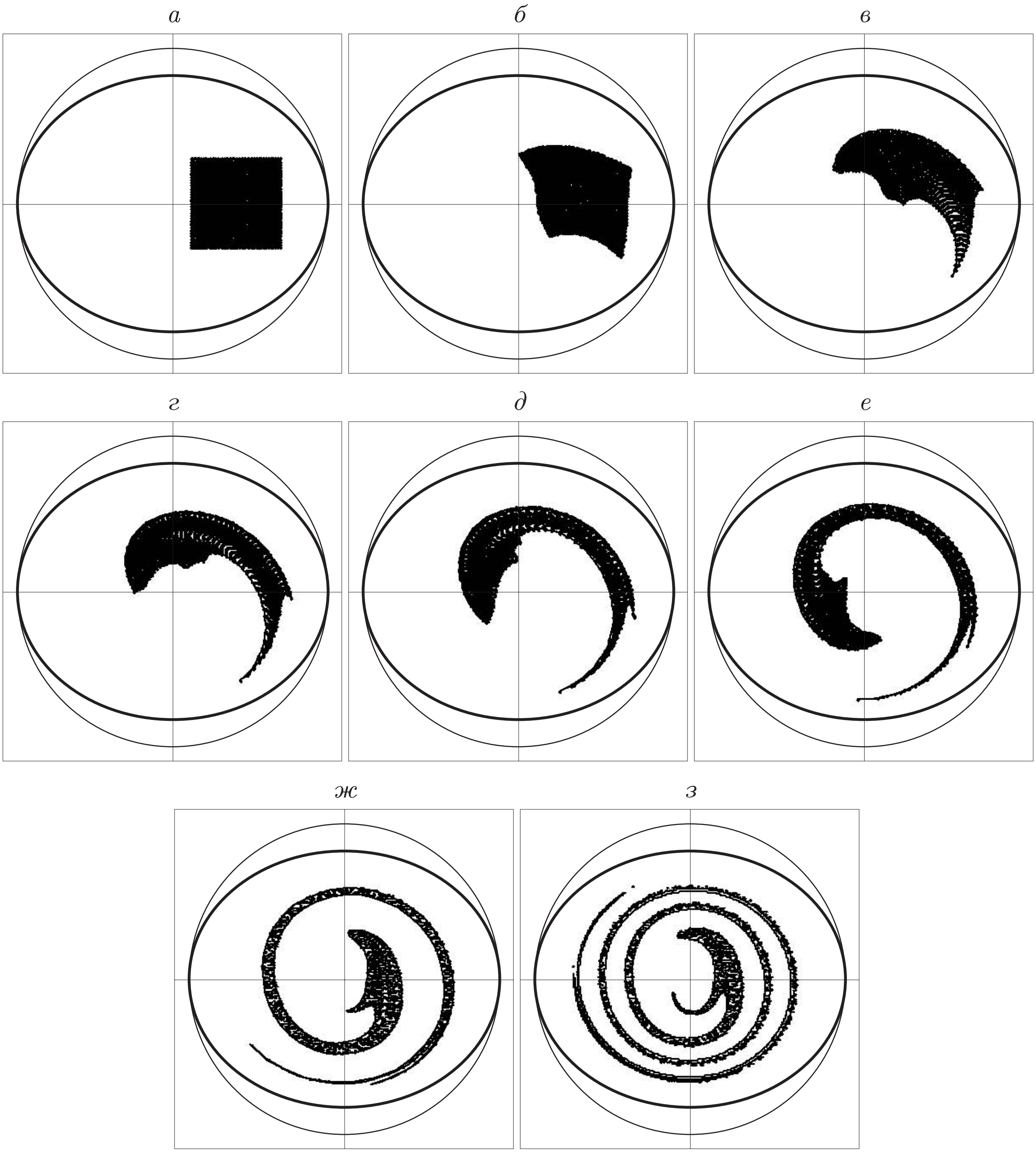
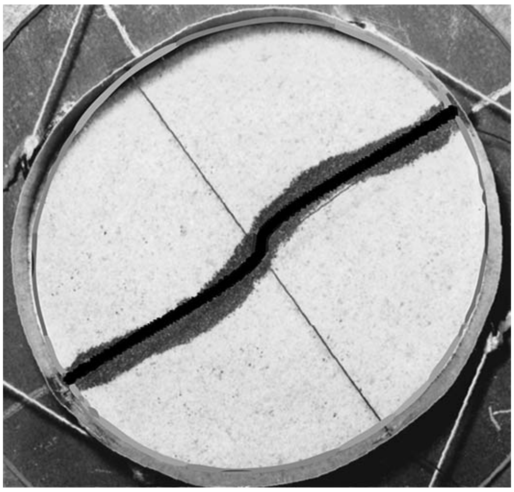
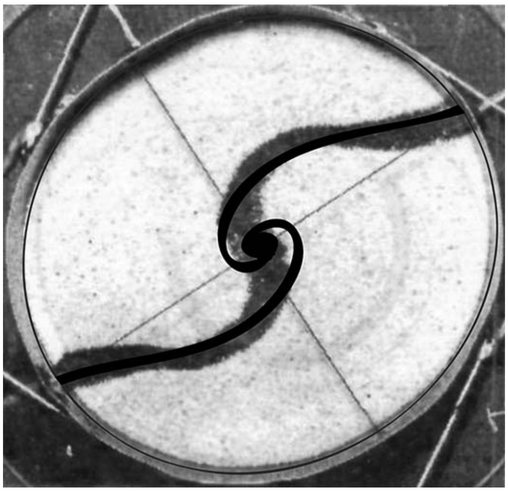


Рис. 5. Изменение формы квадратной области при вращении эллиптического шаблона по часовой стрелке:
а — $N_{ell} = 0$; *б* — $N_{ell} = 1$; *в* — $N_{ell} = 3$; *г* — $N_{ell} = 5$; *д* — $N_{ell} = 7$; *е* — $N_{ell} = 10$; *ж* — $N_{ell} = 17$; *з* — $N_{ell} = 34$

а



б



в

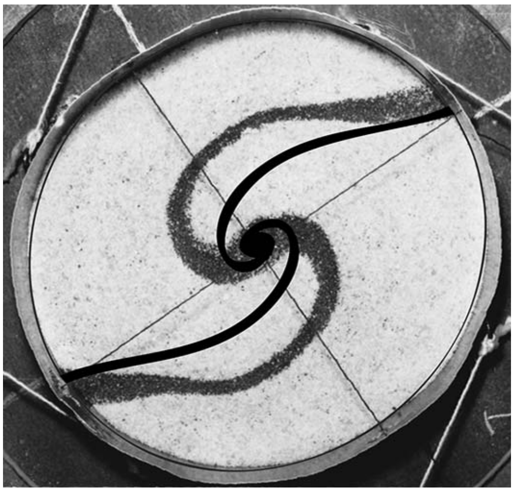


Рис. 6. Экспериментальные (серые линии) и расчетные (черные линии) картины деформирования сухого кварцевого песка после 3 (*а*), 10 (*б*) и 20 (*в*) циклов нагружения

точек наибольшая, но эти смещения происходят в противоположных направлениях. Из уравнений (7), в которые вязкость жидкости не входит, следует, что скорость смещения точек не зависит от вязкости жидкости.

На рис. 5 показана деформация первоначально квадратной области при вращении эллиптического шаблона. Параметры геометрии области и шаблона такие же, как на рис. 4. Максимальное количество оборотов шаблона N_{ell} равно 34. При вращении шаблона по часовой стрелке выделенный квадрат (см. рис. 5) растягивается как по часовой стрелке, так и против нее. При увеличении числа оборотов шаблона квадрат закручивается вокруг центра, вырождаясь в спиралевидную структуру. При этом деформации неограниченно увеличиваются. Скорость роста деформаций зависит от геометрических размеров и скорости вращения эллипса нагружения, но не зависит от вязкости.

Проведено сравнение полученного решения с результатами экспериментов [12] по сложному дифференциальному нагружению сыпучих сред. Известно, что при некоторых условиях нагружения сыпучие среды ведут себя как вязкая несжимаемая жидкость [11–13].

При этом движение сыпучей среды описывается уравнениями Навье — Стокса (1). В работе [12] приведены результаты экспериментов по эллиптическому деформированию сухого кварцевого песка при следующих параметрах деформирования: $r_0 = 20{,}03$ мм, $\varkappa m = 0{,}0947$, $t_0 = 1{,}26$ с$^{-1}$. Результаты нагружения представлены на рис. 6. Перед началом вращения шаблона черным песком была выделена полоса, расположенная под углом $\varphi_0 = 33^\circ$ к горизонтальной оси. Эллиптический шаблон вращался против часовой стрелки ($l = 1$).

При нагружении песка происходит проскальзывание на стенке, поэтому в расчетах параметр прилипания $n = 0{,}35$. Среда движется только в горизонтальной плоскости, деформация точек выделенной полосы описывается уравнениями (7). Сравнение экспериментальных и расчетных данных показывает, что они хорошо согласуются при малом количестве циклов нагружения (см. рис. 6,*а,б*). После 20 циклов нагружения различие расчетных и экспериментальных данных значительное (см. рис. 6,*в*). Это обусловлено тем, что сыпучие среды описываются уравнениями типа уравнений Навье — Стокса в приближении малых деформаций [11], с увеличением числа циклов нагружения деформации увеличиваются. Кроме того, при интегрировании уравнений (7) при большом количестве циклов нагружения точность решения ухудшается.

Заключение. Рассмотрено течение вязкой несжимаемой жидкости в деформирующейся трубке. Для течения при малых числах Рейнольдса в трубке (при условии малости деформирования стенок) получены решения нестационарных трехмерных уравнений Навье — Стокса: обобщенное перистальтическое течение и течение при эллиптическом деформировании стенок трубки.

Получено перистальтическое решение в трубке с эллиптическим сечением при несимметричном деформировании стенок и ненулевой угловой скорости течения. Данное решение расширяет класс перистальтических решений, при этом сохраняется второй порядок точности решения при первом порядке малости возмущений стенок сосуда.

Получено приближенное решение, описывающее течение в трубке при эллиптическом деформировании стенки сосуда. Установлено, что движение в трубке не зависит от вязкости жидкости, а определяется только скоростью вращения шаблона и степенью “сжатия” эллиптического шаблона. Результаты сравнения полученного решения с экспериментальными данными показывают, что при небольшом количестве циклов нагружения оно достаточно точно описывает поведение среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Педли Т.** Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983.
2. **Регирер С. А.** О движении жидкости в трубке с деформирующейся стенкой // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 4. С. 202–204.
3. **Регирер С. А.** Квазиодномерная теория перистальтических течений // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 5. С. 89–97.
4. **Yin F. C. P., Fung Y. C.** Peristaltic waves in circular cylindrical tubes // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. P. 579–587.
5. **Takagi D., Balmforth N. J.** Peristaltic pumping of rigid objects in an elastic tube // J. Fluid Mech. 2011. V. 672. P. 219–244.
6. **Багаев С. Н., Захаров В. Н., Маркель А. Л. и др.** Об оптимальном строении стенки кровеносных сосудов // Докл. АН. 2004. Т. 398, № 3. С. 331–334.
7. **Медведев А. Е., Самсонов В. И., Фомин В. М.** О рациональной структуре кровеносных сосудов // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 3. С. 24–30.

8. **Медведев А. Е., Самсонов В. И., Фомин В. М.** Математическое моделирование течения крови в сосудах // Система кровообращения и артериальная гипертония: биофизические и генетико-физиологические механизмы, математическое и компьютерное моделирование / Отв. ред. Л. Н. Иванова, А. М. Блохин, А. Л. Маркель. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. Гл. 3. С. 80–105.
9. **Медведев А. Е.** Трехмерное движение вязкой несжимаемой жидкости в узкой трубке // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 28–32.
10. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. 5-е изд. М.: Наука, 1978.
11. **Гольдштик М. А.** Процессы переноса в зернистом слое. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1984.
12. **Ревуженко А. Ф.** Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2000.
13. **Краус Е. И., Лавриков С. В., Медведев А. Е. и др.** Моделирование эффекта дифференциального вращения при сложном нагружении сыпучих сред // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 139–149.

Поступила в редакцию 12/V 2010 г.,
в окончательном варианте — 14/XII 2012 г.