ПМТФ, № 5, 1972

УДК 536.24

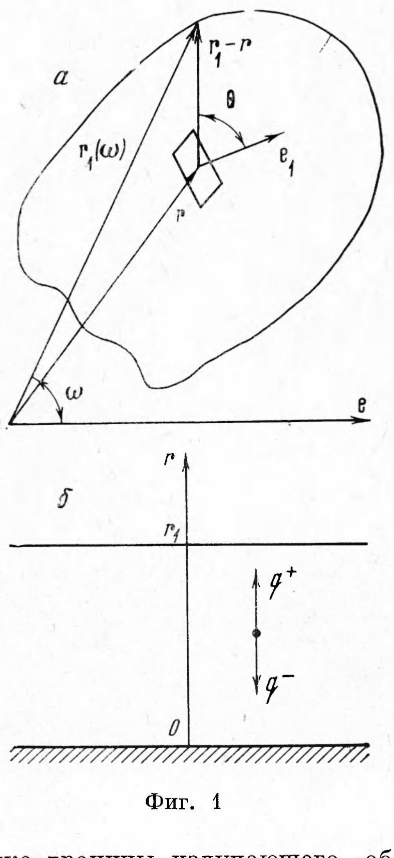
МЕТОД ЭФФЕКТИВНЫХ СЕЧЕНИЙ ДЛЯ УЧЕТА СЕЛЕКТИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ В ГОРЯЧЕМ ГАЗЕ

В. М. Овсянников

(Москва)

Излагается экономичный по времени счета метод решения задач переноса излучения, использующий интегральные характеристики спектра поглощения — эффективные сечения. Произведены расчеты ударного слоя перед телом, обтекаемым гиперзвуковым потоком газа, при наличии интенсивной подачи массы с поверхности. В расчетных примерах машинное время счета сократилось примерно в 120 раз по сравнению с точным расчетом, а погрешность вычисления радиационных потоков не превышает 15—25%.

1. Метод эффективных сечений. Рассмотрим перенос излучения в области, заполненной селективно излучающим и поглощающим горячим газом. Рассеяние не учитываем. В предположении локального термодинамического равновесия испускания излучения радиационный поток и его дивергенция в точке с координатой $\mathbf{r}$ имеют вид



Фиг. 1

$$q(\mathbf{r}) = \int\limits_{(\omega)} d\omega \cos\theta \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\omega)} B_\lambda(T(\mathbf{r}')) \exp[-t_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] N(\mathbf{r}') \sigma_\lambda(\mathbf{r}') dr'$$

$$\operatorname{div} q(\mathbf{r}) = \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda k_\lambda(\mathbf{r}) \Big\{ \int\limits_{(\omega)} d\omega \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\omega)} B_\lambda(T(\mathbf{r}')) \exp[-t_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \times$$
$$\times N(\mathbf{r}') \sigma_\lambda(\mathbf{r}') dr' - 4\pi B_\lambda(T(\mathbf{r})) \Big\} \qquad (1.1)$$

$$t_\lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_\lambda(\mathbf{r}'') dr''$$

Здесь dr'' — дифференциал длины вдоль луча $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, λ — длина волны, $(\Delta\lambda)$ — интервал длин волн, в котором необходимо учитывать излучение, T — температура, N — число частиц в единице объема, ω — пространственный угол, отсчитываемый от начального направления $\mathbf{e}$ (см. фиг. 1, *а*), θ — угол между направлением луча и нормалью $\mathbf{e}_1$ к рассматриваемой площадке, $\mathbf{r}_1(\omega)$ — точка границы излучающего объема, k_λ — приведенный объемный коэффициент поглощения с учетом вынужденного испускания, σ_λ — сечение поглощения, $B_\lambda(T)$ — функция Планка равновесного излучения, π — отношение длины окружности к диаметру.

Для газовых смесей, нагретых до температур 2000—20000° К, сечение поглощения σ_λ является сложной функцией длины волны, содержащей непрерывный спектр, молекулярные полосы, линии атомов и ионов. Сечение поглощения смеси зависит от концентрации компонент, а для каждой компоненты является функцией температуры и других параметров. Интегрирование по длине волны должно проводиться с мелким шагом, поэтому использование формул (1.1) приводит к большим затратам машинного времени.

В методе эффективных сечений интегрирование по λ проводится заранее, отдельно от вычисления поля радиационных потоков. Введем эффективные сечения s, σ, ε

$$s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = s(T(\mathbf{r}'),\ N(\mathbf{r} \div \mathbf{r}'),\ \ \sigma_\lambda(\mathbf{r} \div \mathbf{r}')) =$$

$$= \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T(\mathbf{r}'))\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}')\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}) \exp\left[-\int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'')\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}'')\, dr''\right]$$

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma(T(\mathbf{r}'),\ N(\mathbf{r} \div \mathbf{r}'),\ \sigma_\lambda(\mathbf{r} \div \mathbf{r}')) =$$

$$= \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda\, B_\lambda^\circ(T(\mathbf{r}'))\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}') \exp\left[-\int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'')\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}'')\, dr''\right] \tag{1.2}$$

$$\varepsilon(T,\ N(\mathbf{r} \div \mathbf{r}'),\ \sigma_\lambda(\mathbf{r} \div \mathbf{r}')) = \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T) \left\{1 - \exp\left[-\int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'')\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}'')\, dr''\right]\right\}$$

$$B_\lambda^\circ(T) = B_\lambda(T) / B(T), \quad B(T) = (\sigma^\circ / \pi)\, T^4$$

где σ° — постоянная Стефана — Больцмана. Радиационный поток и его дивергенция (1.1) выражаются через эффективные сечения

$$q(\mathbf{r}) = \int\limits_{(\omega)} d\omega \cos\theta \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\omega)} B(T(\mathbf{r}'))\, \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, N(\mathbf{r}')\, dr'$$

$$\operatorname{div} q(\mathbf{r}) = N(\mathbf{r}) \int\limits_{(\omega)} d\omega \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\omega)} B(T(\mathbf{r}'))\, s(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, N(\mathbf{r}')\, dr' - 4\pi B(T(\mathbf{r}))\, \sigma_p(\mathbf{r})\, N(\mathbf{r})$$

$$\sigma_p(\mathbf{r}) = \sigma_p(T(\mathbf{r}),\ \sigma_\lambda(\mathbf{r})) = \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T(\mathbf{r}))\, \sigma_\lambda(\mathbf{r}) \tag{1.3}$$

Здесь σ_p—среднее сечение поглощения Планка. Сечение поглощения ε будет введено в выражение для радиационного потока в п. 2. В формулах (1.3) интегрирования по длине волны нет, поэтому их применение дает большую экономию времени счета по сравнению с использованием формул (1.1). Информация о спектральной характеристике газа содержится в эффективных сечениях, которые связаны между собой соотношениями

$$\frac{d\varepsilon(T,\ \mathbf{r} \div \mathbf{r}')}{dr'} = N(\mathbf{r}')\, \sigma(T,\ \mathbf{r} \div \mathbf{r}'), \quad \frac{d\sigma(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')}{dr} = -\, N(\mathbf{r})\, s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \tag{1.4}$$

$$\varepsilon(T,\ \mathbf{r} \div \mathbf{r}') = \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} \sigma(T,\ \mathbf{r} \div \mathbf{r}'')\, N(\mathbf{r}'')\, dr'', \quad \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sigma_p(\mathbf{r}') - \int\limits_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} s(\mathbf{r}'', \mathbf{r}')\, N(\mathbf{r}'')\, dr''$$

В общем случае, когда сечение поглощения σ_λ произвольно меняется по координате $\mathbf{r}$, эффективные сечения s, σ, ε представляют собой функционалы, зависящие от функций N и σ_λ на интервале $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и от температуры в точке $\mathbf{r}'$. Для зависимости сечения поглощения от координаты определенного вида эффективные сечения являются функциями и могут быть вычислены заранее.

Пусть сечение поглощения является функцией длины волны и температуры вида

$$\sigma_\lambda(T) = \sum_{k=1}^{\varkappa} \psi_k(T) S_k(\lambda) \tag{1.5}$$

Например, если сечение поглощения σ_λ задано при температурах $T_1, \ldots, T_\varkappa$, а для получения значений σ_λ при промежуточных температурах $T_k < T < T_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, \varkappa - 1)$ используется линейная интерполяция по значениям $\sigma_\lambda(T_k)$ и $\sigma_\lambda(T_{k+1})$, то

$$S_k(\lambda) = \sigma_\lambda(T_k) \quad (k = 1, \ldots, \varkappa) \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} \psi_k = (T_{k+1} - T) / (T_{k+1} - T_k) \quad \text{для} \quad T_k \leqslant T < T_{k+1} \\ \psi_k = (T - T_{k-1}) / (T_k - T_{k-1}) \quad \text{для} \quad T_{k-1} < T < T_k \\ \psi_k = 0 \quad \text{для} \quad T \leqslant T_{k-1}, \quad T \geqslant T_{k+1} \quad (k = 2, \ldots, \varkappa - 1) \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} \psi_1 = (T_2 - T)/(T_2 - T_1) \text{ для } T_1 < T < T_2, \\ \psi_1 = 1 \text{ для } T \leqslant T_1, \ \psi_1 = 0, \text{ для } T \geqslant T_2 \\ \psi_\varkappa = (T - T_{\varkappa-1})/(T_\varkappa - T_{\varkappa-1}) \quad \text{для} \quad T_{\varkappa-1} < T, \\ \psi_\varkappa = 0 \quad \text{для} \quad T \leqslant T_{\varkappa-1}, \ \psi_\varkappa = 1 \text{ для } T \geqslant T_\varkappa \end{gathered} \tag{1.8}$$

Введем функции $n_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, равные числу частиц, наделенных сечением поглощения $\sigma_\lambda(T_k)$, на луче $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ с единичным поперечным сечением

$$n_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \psi_k(T(\mathbf{r}'')) dr''$$

$$t_\lambda(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}'} N(\mathbf{r}'') \sigma_\lambda(T(\mathbf{r}'')) dr'' = \sum_{k=1}^{\varkappa} S_k(\lambda) n_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

Выражения для $q(\mathbf{r})$, $\operatorname{div} q(\mathbf{r})$ (1.3) и эффективных сечений (1.2) примут вид

$$q(\mathbf{r}) = \int_{(\omega)} d\omega \cos\theta \sum_{k=1}^{\varkappa} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\omega)} B(T(\mathbf{r}')) \sigma_k(T(\mathbf{r}'), n_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \ldots, n_\varkappa(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) dn_k(r') \tag{1.9}$$

$$\operatorname{div} q(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\varkappa} N(\mathbf{r}) \psi_k(T(\mathbf{r})) \Big\{ \int_{(\omega)} d\omega \sum_{i=1}^{\varkappa} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_1(\omega)} dn_i(\mathbf{r}') B(T(\mathbf{r}')) \times$$

$$\times s_{ki}(T(\mathbf{r}'), n_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \ldots, n_\varkappa(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) - 4\pi B(T(\mathbf{r})) \sigma_k(T(\mathbf{r}), 0, \ldots, 0) \Big\},$$

$$dn_k(\mathbf{r}') = N(\mathbf{r}') \psi_k(T(\mathbf{r}')) dr'$$

$$\begin{gathered} s_{ki}(T, n_1, \ldots, n_\varkappa) = \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T) S_k(\lambda) S_i(\lambda) \exp\Big(-\sum_{j=1}^{\varkappa} S_j(\lambda) n_j\Big) \\ \sigma_k(T, n_1, \ldots, n_\varkappa) = \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T) S_k(\lambda) \exp\Big(-\sum_{j=1}^{\varkappa} S_j(\lambda) n_j\Big) \\ \varepsilon(T, n_1, \ldots, n_\varkappa) = \int_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T) \Big[1 - \exp\Big(-\sum_{j=1}^{\varkappa} S_j(\lambda) n_j\Big)\Big] \end{gathered} \tag{1.10}$$

Для однородного газа, с σ_λ не зависящим от температуры, $n_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ представляет собой число частиц на отрезке $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ луча с единичным поперечным сечением. Если температура T в рассматриваемой области постоянна, то $\varepsilon(T, n_1)$ представляет собой степень черноты конуса с единичным телесным углом, для которого луч с единичным поперечным сечением, направленный вдоль высоты, содержит n_1 частиц. Эффективное сечение $\sigma(T, n_1)$ согласно первому соотношению (1.4) равно изменению степени черноты указанного конуса при изменении n_1 на единицу. При $n_1 = 0$ значение $\sigma(T, 0)$ равно среднему сечению поглощения Планка.

Для характеристики оптических свойств газа достаточно знать одну из трех функций: s, σ, ε, а остальные получать используя соотношения (1.4). Однако, чтобы избежать погрешностей, связанных с преобразованием функции, заданной в дискретных точках, надо вычислять каждое эффективное сечение по формулам (1.10).

Число функций от длины волны $S_k(\lambda)$, использующихся для построения оптической модели (1.5) однородного газа, назовем порядком приближения $\varkappa$ метода эффективных сечений. Первое приближение метода было предложено в работах Томсона, Пеннера, изложено в книге [1] и использовалось в ряде работ для расчета плоского излучающего слоя.

2. Плоский слой. Рассмотрим плоский слой газа с одномерным распределением температуры. Начало координат лежит на границе слоя (см. фиг. 1, *б*). Выражения для радиационного потока q, его дивергенции и односторонних потоков q^+, q^-

$$q(r) = q^+(r) - q^-(r)$$

$$q^+(r) = \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda \int\limits_0^r B_\lambda(T(r'))\, 2E_2[t_\lambda(r', r)]\, N(r')\, \sigma_\lambda(r')\, dr'$$

$$q^-(r) = \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda \int\limits_r^{r_1} B_\lambda(T(r'))\, 2E_2[t_\lambda(r, r')]\, N(r')\, \sigma_\lambda(r')\, dr'$$

$$\operatorname{div} q(r) = \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda\, k_\lambda(r) \left\{ \int\limits_0^{r_1} \pi B_\lambda(T(r'))\, 2E_1[t_\lambda(r, r')]\, N(r')\, \sigma_\lambda(r')\, dr' - 4\pi B_\lambda(T(r)) \right\}$$

в предположении (1.5) примут вид

$$\begin{aligned} q^-(r) &= \pi B(T(r))\, \varepsilon^*(T(r), n_1(r, r+\delta), \ldots, n_\varkappa(r, r+\delta)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \int\limits_{r+\delta}^{r_1} \pi B(T(r'))\, \sigma_k^*(T(r'), n_1(r, r'), \ldots, n_\varkappa(r, r'))\, dn_k(r') \\ q^+(r) &= \pi B(T(r))\, \varepsilon^*(T(r), n_1(r-\delta, r), \ldots, n_\varkappa(r-\delta, r)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \int\limits_0^{r-\delta} \pi B(T(r'))\, \sigma_k^*(T(r'), n_1(r, r'), \ldots, n_\varkappa(r, r'))\, dn_k(r') \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} q(r) = &- 2\pi B(T(r))\, N(r) \sum_{k=1}^{\varkappa} \psi_k(T(r))\, \sigma_k^*(T(r), n_1(r, r+\delta), \ldots, n_\varkappa(r, r+\delta)) \\ &+ N(r) \left\{ \int\limits_0^{r-\delta} \pi B(T(r')) \sum_{k=1}^{\varkappa} \psi_k(T(r)) \sum_{i=1}^{\varkappa} s_{ki}^*(T(r'), n_1(r, r'), \ldots \right. \\ &\ldots, n_\varkappa(r, r'))\, dn_i(r') + \int\limits_{r+\delta}^{r_1} \pi B(T(r')) \sum_{k=1}^{\varkappa} \psi_k(T(r)) \sum_{i=1}^{\varkappa} s_{ki}^*(T(r'), n_1(r, r'), \ldots \\ &\ldots, n_\varkappa(r, r'))\, dn_i(r') \end{aligned} \tag{2.2}$$

Эффективные сечения в плоском случае равны

$$
\begin{aligned}
s_{ki}^*(T, n_1, \ldots, n_\varkappa) &= \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T)\, S_k(\lambda)\, S_i(\lambda)\, 2E_1\left(\sum_{j=1}^{\varkappa} S_j(\lambda)\, n_j\right) \\
\sigma_k^*(T, n_1, \ldots, n_\varkappa) &= \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T)\, S_k(\lambda)\, 2E_2\left(\sum_{j=1}^{\varkappa} S_j(\lambda)\, n_j\right) \qquad (2.3) \\
\varepsilon^*(T, n_1, \ldots, n_\varkappa) &= \int\limits_{(\Delta\lambda)} d\lambda B_\lambda^\circ(T)\left[1 - 2E_3\left(\sum_{j=1}^{\varkappa} S_j(\lambda)\, n_j\right)\right]
\end{aligned}
$$

Здесь E_1, E_2, E_3 — интегральные показательные функции первого, второго и третьего порядка.

При выводе формул (2.1), (2.2) предполагалось, что температура достаточно плавно меняется по координате r, так что в точках, отстоящих друг от друга на расстояние δ, функция Планка $B_\lambda(T)$ в пределах допустимой погрешности может считаться не зависящей от координаты. В формулах для q^-, q^+ (2.1) первый член в правой части равенств представляет собой излучение от изотермического плоского слоя толщиной δ. Использование ε^* в (2.1) и σ_k^* ($k = 1, \ldots, \varkappa$) в (2.2) позволяет сократить объем таблиц эффективных сечений, необходимых для решения задачи. В формулах (1.9) эффективные сечения необходимо знать для значений n_k, соответствующих интервалам от 0 до максимального размера области, который обозначим через d. В формулах (2.1), (2.2) употребляются эффективные сечения для значений n_k, соответствующих меньшим интервалам от δ до d. Обычно в задачах переноса излучения отношение d / δ составляет $10 \div 40$, поэтому эффективные сечения необходимо знать при изменении n_k примерно в $10 \div 40$ раз.

Соотношения (1.4) для плоского слоя в предположении (1.5) принимают вид

$$
\partial\varepsilon^* / \partial n_k = \sigma_k^*, \quad \partial\sigma_k^* / \partial n_i = -s_{ki}^*
$$

$$
\sigma_k^* = \left[\sigma_k^*(T, 0, \ldots, 0) - \sum_{i=1}^{\varkappa} \int\limits_0^{n_i} s_{ik}^*\, dn_i\right], \varepsilon^* = \sum_{k=1}^{\varkappa} \int\limits_0^{n_k} \sigma_k^*\, dn_k \quad (k = 1, \ldots, \varkappa)
$$

3. Многокомпонентная смесь. Пусть смесь содержит $\varkappa$ компонент с молярной концентрацией x_k ($k = 1, \ldots, \varkappa$). Зависимость от температуры сечения поглощения каждой компоненты $\sigma_{\lambda k}$ ($k = 1, \ldots, \varkappa$) представим в виде

$$
\sigma_{\lambda k}(T) = \varphi_k(T) S_k(\lambda)
$$

т. е. воспользуемся предположением первого приближения метода эффективных сечений для однородного газа. Пусть сечение поглощения смеси вычисляется по формуле

$$
\sigma_\lambda(T, x_1, \ldots, x_\varkappa) = \sum_{k=1}^{\varkappa} x_k \sigma_{\lambda k}(T)
$$

Если число частиц, наделенных сечением поглощения $S_k(\lambda)$, на луче (r, r') с единичным поперечным сечением вычислять как

$$
n_k(r, r') = \int\limits_r^{r'} N(r'')\, x_k(r'')\, \varphi_k(T(r''))\, dr'' \quad (k = 1, \ldots, \varkappa)
$$

то радиационный поток и его дивергенцию в многокомпонентной смеси можно вычислять по формулам $\varkappa$-го приближения однородного газа (1.9), (1.10) в пространственном и (2.1)—(2.3) в плоском случаях, если в них положить $\psi_k = x_k \varphi_k(T)$

4. Численные расчеты ударного слоя. Были вычислены эффективные сечения для непрерывного спектра воздуха в первом и втором приближениях. Коэффициенты поглощения брались из книги [2].

В табл. 1 приведены эффективные сечения воздуха в первом приближении для плоского слоя в форме $a \cdot 10^b$.

Сечение поглощения считалось не зависящим от температуры и равным сечению поглощения при температуре 12000° K и давлении 1 *атм*.

Таблица 1

$10^{-18} n_1$, $см^{-2}$	T, °K										
	9000		10000		11000		12000		13000		
	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	
10^{-2}	0.572	—2	0.235	—1	0.740	—1	0.190	0	0.421	0	
10^{1}	0.169	—2	0.626	—2	0.181	—1	0.436	—1	0.909	—1	
1	0.227	—3	0.425	—3	0.879	—3	0.171	—2	0.300	—2	
10	0.518	—4	0.434	—4	0.386	—4	0.373	—4	0.392	—4	
10^2	0.653	—5	0.553	—5	0.475	—5	0.412	—5	0.361	—5	$10^{36} s^*$, $см^4$
10^3	0.289	—6	0.282	—6	0.274	—6	0.265	—6	0.256	—6	
10^4	0.510	—9	0.644	—9	0.772	—9	0.889	—9	0.990	—9	
0	0.463	—2	0.620	—2	0.111	—1	0.219	—1	0.420	—1	
10^{-4}	0.463	—2	0.619	—2	0.111	—1	0.218	—1	0.419	—1	
10^{-3}	0.462	—2	0.615	—2	0.109	—1	0.215	—1	0.411	—1	
10^{-2}	0.455	—2	0.588	—2	0.101	—1	0.193	—1	0.362	—1	
10^{-1}	0.426	—2	0.482	—2	0.692	—2	0.115	—1	0.194	—1	$10^{18} \sigma^*$, $см^2$
1	0.374	—2	0.346	—2	0.351	—2	0.396	—2	0.486	—2	
10	0.288	—2	0.252	—2	0.223	—2	0.200	—2	0.182	—2	
10^2	0.140	—2	0.129	—2	0.120	—2	0.111	—2	0.104	—2	
10^3	0.240	—3	0.250	—3	0.256	—3	0.261	—3	0.263	—3	
10^4	0.119	—5	0.153	—5	0.187	—5	0.218	—5	0.246	—5	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10^{-4}	0.465	—6	0.622	—6	0.111	—5	0.219	—5	0.421	—5	
10^{-3}	0.464	—5	0.620	—5	0.110	—4	0.218	—4	0.417	—4	
10^{-2}	0.460	—4	0.604	—4	0.105	—3	0.204	—3	0.388	—3	
10^{-1}	0.441	—3	0.533	—3	0.839	—3	0.150	—2	0.270	—2	ε^*
1	0.398	—2	0.401	—2	0.483	—2	0.679	—2	0.103	—1	
10	0.329	—1	0.295	—1	0.280	—1	0.287	—1	0.320	—1	
10^2	0.204	0	0.183	0	0.167	0	0.156	0	0.149	0	
10^3	0.696	0	0.664	0	0.636	0	0.613	0	0.594	0	
10^4	0.979	0	0.978	0	0.977	0	0.977	0	0.976	0	
10^5	0.982	0	0.982	0	0.982	0	0.982	0	0.983	0	

При малой оптической толщине эффективные сечения s, σ, s^*, σ^* стремятся к постоянным величинам, а ε, ε^* становятся линейными функциями n_1

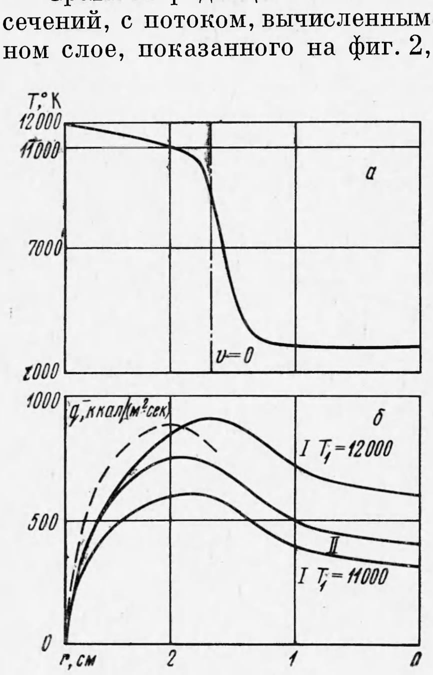
$$\sigma \to \sigma(T, 0), \quad \sigma^* \to 2\sigma(T, 0), \quad s \to s(T, 0), \quad s^* \to 2s(T, 0)$$

$$\varepsilon \to n_1 \sigma(T, 0), \quad \varepsilon^* \to n_1 \sigma^*(T, 0) = 2 n_1 \sigma(T, 0) = 2 n_1 \sigma_p \text{ при } n_1 \to 0$$

Для вычисления эффективных сечений воздуха во втором приближении использовалась линейная интерполяция (1.6), (1.8) с $T_1 = 11000°$ K, $T_2 = 12000°$ K.

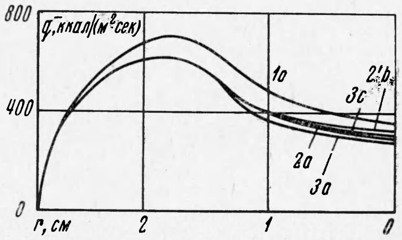
Методом эффективных сечений решалась задача переноса излучения в ударном слое сферы, обтекающейся гиперзвуковым потоком воздуха. Расчеты проведены на критической линии при интенсивном вдуве газа через поверхность тела. Профиль скорости, нормальной к поверхности тела, принимался линейным. Методом прогонки решалось обыкновенное дифференциальное уравнение притока тепла с учетом теплопроводности, излучения и поглощения в одномерном приближении плоского слоя.

Сравним радиационный поток, вычисленный по методу эффективных сечений, с потоком, вычисленным точно, для профиля температуры в ударном слое, показанного на фиг. 2, *а*. Вертикальной штрих-пунктирной линией отмечена координата, при которой обращается в нуль скорость газа, нормальная к поверхности тела ($v = 0$). В окрестности этой линии находится пограничный слой, где существенны процессы вязкости, теплопроводности и диффузии. Смешение вдуваемого газа с воздухом внешнего потока, прошедшим ударную волну, происходит в этой же окрестности, толщина диффузионного слоя примерно совпадает с толщиной слоя теплопроводности. В рассматриваемой модели ударного слоя диффузия не учитывалась и предполагалось, что левее линии $v = 0$ находится воздух, правее — вдуваемый газ. Давление поперек ударного слоя предполагалось постоянным, равным 1 *атм*. В расчетах, представленных на фиг. 2—4, вдуваемый газ имеет оптические характеристики воздуха.



Фиг. 2

На фиг. 2, *б* представлена зависимость от координаты одностороннего радиационного потока q^- (r) в сторону тела. Штриховой линией показан результат точного расчета, сплошными — по методу эффективных сечений. Римской цифрой указан номер приближения и значение характерной температуры T_1, для которой бралось сечение поглощения при расчете эффективных сечений в первом приближении. Во втором приближении $T_1 = 11\,000°$ К, $T_2 = 12\,000°$ К. Решение в первом приближении с $T_1 = 12\,000°$ К лучше приближается к точному расчету, чем с $T_1 = 11\,000°$ К. Это объясняется тем, что $\sim 80\%$ радиационного потока создается внешней частью ударного слоя с температурой выше 11 500° К. Решение во втором приближении лежит между решениями в первом приближении с $T_1 = 11\,000°$ К и $T_1 = 12\,000°$ К. Точность вычисления радиационного потока в первом приближении с $T_1 = 12\,000°$ К составляет 14%, а во втором — 20%. Однако картина изменения q^- по r во втором приближении лучше согласуется с точной, точка достижения максимума q^- во втором приближении лежит ближе к максимуму точной кривой, чем в первом приближении. Время счета одной итерации профиля температуры при использовании разностной схемы с 26 точками при точном вычислении q составляет 25 *мин*, а с использованием метода эффективных сечений — 13 *сек*, т. е. примерно в 120 раз меньше.



Фиг. 3

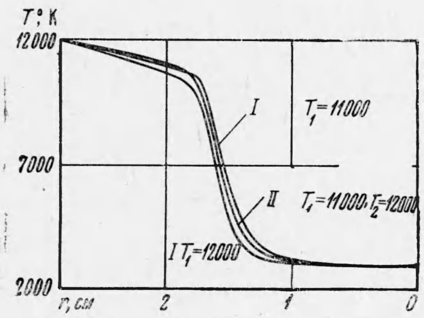
Исследование влияния шага таблиц эффективных сечений на точность счета радиационного потока q^- поперек ударного слоя представлено на фиг. 3. Использовались эффективные сечения в первом приближении для $T_1 = 11\,000°$ К с шагом по n_1 и T, приведенным в табл. 2. Промежуточные значения определялись путем линейной интерполяции логарифмов эффективных сечений по логарифмам T и n_1. Цифра и буква у кривых на фиг. 3 означает вариант расположения узловых точек таблицы эффективных сечений. Оптимальным является расположение узлов $2'b$, обеспечивающее погрешность не более 3% по сравнению с наиболее точным — $3\,c$. Оптимальная сетка имеет узловые значения по n_1, меняющиеся в 10 раз, а по температуре $T_1 - 3000$, $T_1 - 2000$, $T_1 - 1000$, T_1, $T_1 + 1000$. Области газа с температурой ниже $T_1 - 3000°$ К дают незначительный вклад в излучение, работают в основном на поглощение. Величина эффективных сечений при низких температурах не влияет на профиль радиационного потока. Табл. 1 имеет оптимальный шаг.

Ввиду сравнительно невысокой температуры воздуха $\sim 12\,000°$ K и небольшой величины испускаемой лучистой энергии по сравнению с энтальпией торможения профиль температуры слабо зависит от используемой спектральной модели. На фиг. 4 приведены профили температур, вычисленные с использованием эффективных сечений в первом и втором приближениях. Здесь же указаны значения использованных характерных температур T_1, T_2. Отличие температур на большей части ударного слоя не более 7% и превышает это значение в узкой зоне теплового пограничного слоя. Время счета ~ 1 *мин*, в то время как счет профиля температур точным методом требует затраты 2 *час* машинного времени. Таким образом, метод эффективных сечений можно применять для нахождения температурного профиля в задачах радиационной газовой динамики, а окончательное распределение радиационного потока проводить либо этим же, либо точным методом.

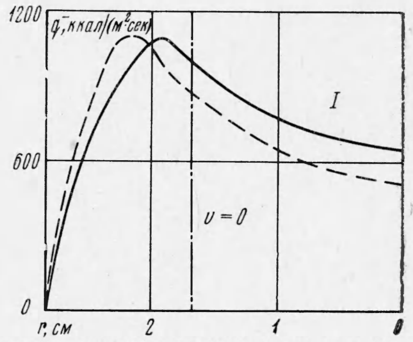
Таблица 2

T, °K				$10^{-18} n_1$, $см^{-2}$					
a	b	c		1	2	2′		3	
11 000	8 000	3 000	9 000	0	0	0	10	0	1
12 000	9 000	5 000	10 000	0.05	0.05	10^{-4}	10^2	0.05	2.5
	10 000	6 000	11 000	20	0.5	10^{-3}	10^3	0.1	5
	11 000	7 000	12 000		5	10^{-2}	10^4	0.25	10
	12 000	8 000			20	10^{-1}	10^5	0.5	20

На фиг. 5 приведено распределение радиационного потока $q^{-}(r)$ в ударном слое при вдуве газа с отличными от воздуха оптическими свойствами. Штриховой кривой показан точный профиль, сплошной — профиль, полученный с использованием первого приближения метода эффективных сечений для бинарной смеси воздух ($T_1 = 12000°$ K) — вдуваемый газ ($T_2 = 3000°$ K). Отличие радиационных потоков, поступающих к стенке, составляет 25%.



Фиг. 4



Фиг. 5

Автор благодарит Г. А. Тирского за руководство работой и Э. С. Филиппову за помощь в проведении расчетов.

Поступила 17 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Penner S. S., Quantitative molecular spectroscopy and gas emissivities. Addison — Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, London, 1959. (Рус. перев.: Количественная молекулярная спектроскопия и излучательная способность газов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.)
2. Каменщиков В. А., Пластинин Ю. А., Николаев В. М., Новицкий Л. А. Радиационные свойства газов при высоких температурах. М., «Машиностроение», 1971.