ПМТФ, № 2, 1970

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

И. А. Вековищева

(Ленинград)

Предполагается, что упругие свойства материала неотделимы от электрических (явление пьезоэлектричества). Рассматривается статическая задача для бесконечно длинного однородного стержня под действием плоской системы сил или под действием равномерного по длине распределения потенциала электрического поля. Привлекаются общие уравнения теории упругости, теории электрического поля, а также пьезоэлектрические соотношения. Получены условия, накладываемые на параметры материала, чтобы при указанных условиях в теле возникало плоское электрическое поле и плоско-деформированное состояние.

Напряженное состояние сплошного тела характеризуется [1] шестью компонентами напряжения σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, взятыми в некоторой прямолинейной ортогональной системе координат x_i $(i = 1, 2, 3)$, ориентация которой точно известна по отношению к кристаллофизической системе координат. При отсутствии объемных сил эти напряжения должны удовлетворять следующим уравнениям равновесия:

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0 \tag{1}$$

В случае малых деформаций компоненты относительных деформаций ξ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ связаны с проекциями перемещений точек u_i $(i = 1, 2, 3)$ соотношениями

$$\xi_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (i \neq j), \qquad \xi_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i = j) \tag{2}$$

Компоненты вектора электрической индукции D_i $(i = 1, 2, 3)$ удовлетворяют уравнению Максвелла для случая отсутствия объемного заряда [2]

$$\partial D_i \,/\, \partial x_i = 0 \tag{3}$$

а скалярная функция U — потенциал электрического поля — связана с компонентами вектора напряженности электрического поля $Э_i$ $(i = 1, 2, 3)$ следующими зависимостями:

$$Э_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{4}$$

Обобщенный закон Гука в данном случае несправедлив. Необходимо взять еще более общий закон, связывающий линейной зависимостью не только механические величины, но и электрические. Одна из форм его имеет вид

$$D_i = \varepsilon_{ij}^{\xi} Э_j - e_{ikl}\xi_{kl}, \quad \sigma_{kl} = e_{ikl}Э_i + c_{klpq}^{Э}\xi_{pq} \tag{5}$$
$$(i,\ j,\ k,\ l,\ p,\ q = 1, 2, 3)$$

Здесь ε_{ij}^{ξ} — диэлектрическая проницаемость кристалла при отсутствии деформаций, $c_{klpq}^{Э}$ — коэффициенты упругости при отсутствии электрического поля, e_{ikl} — пьезоэлектрические модули. Величины этих коэффициентов зависят как от материала, так и от выбранной системы координат,

причем для любой системы координат имеет место симметрия тензоров

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad c_{klpq} = c_{lkpq} = c_{klqp} = c_{lkqp}, \quad e_{ikl} = e_{ilk}$$

Если среда неоднородная, то тензоры ε, c и e есть функции координат. Здесь будем рассматривать однородную среду, т. е. тензоры-коэффициенты постоянные.

Пусть имеется цилиндр бесконечно большой длины, образующая которого параллельна оси x_3. Так как электрические граничные условия существенно зависят от формы тела, будем считать, что сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующей, есть прямоугольник. Будем рассматривать задачу, в которой используется прямой пьезоэлектрический эффект. Предположим, что к поверхности цилиндра приложены внешние силы, направленные нормально к образующей и равномерно распределенные вдоль образующей (обычная в теории упругости система сил, называемая плоской).

Как известно [1], такая система сил в случае анизотропного тела (в отличие от изотропного), вообще говоря, не вызывает плоско-деформированное состояние. Для того чтобы деформация в этом случае была плоской, необходимо наложить некоторые ограничения на свойства среды. Для общего случая анизотропии при отсутствии электрического эффекта эти ограничения установлены С. Г. Михлиным [4]. Найдем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты упругости, компоненты диэлектрической проницаемости и пьезоэлектрические модули, чтобы при действии плоской системы сил, удовлетворяющих условиям статики, в теле возникало плоское электрическое поле и плоско-деформированное состояние.

Итак, пусть имеют место соотношения

$$\partial u_1 / \partial x_3 = 0, \quad \partial u_2 / \partial x_3 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \partial U / \partial x_3 = 0 \tag{6}$$

Тогда из равенств (2) и (4) следует:

$$\mathcal{Э}_3 = 0, \qquad \xi_{33} = \xi_{23} = \xi_{13} = 0 \tag{7}$$

и система (5) принимает более простой вид

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_{ij}{}^{\xi}\mathcal{Э}_j - e_{ikl}\xi_{kl} \\ \sigma_{pq} &= e_{jpq}\mathcal{Э}_j + c^{\mathcal{Э}}_{pqkl}\xi_{kl} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} i, p, q = 1, 2, 3 \\ j, k, l = 1, 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Из (8) следует, что все D_i и σ_{pq} не зависят от x_3. Поэтому равенства (1) и (3) принимают вид

$$\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0 \tag{10}$$

Введем новые неизвестные функции φ, ψ, θ, удовлетворяющие уравнениям (9) и (10)

$$D_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \qquad D_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \tag{11}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \qquad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \qquad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{12}$$

$$\sigma_{23} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \qquad \sigma_{13} = -\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \tag{13}$$

Обозначим вектор-столбец размерности 5 через

$$F = \| D_i,\ \sigma_{kl} \|^T \quad (i, k, l = 1, 2;\ k \leqslant l) \tag{14}$$

а вектор-строку через

$$E = \| \mathcal{Э}_i,\ \xi_{kl} \| \tag{15}$$

и составим квадратную матрицу коэффициентов размерности 5×5

$$A = \left\| \begin{array}{c|c} \varepsilon_{ij}^{\xi} & -e_{ikl} \\ \hline e_{ikl} & c_{klpq}^{\mathcal{Э}} \end{array} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i, j, k, l, p, q = 1, 2 \\ k \leqslant l, \quad p \leqslant q \end{pmatrix} \tag{16}$$

Теперь соответствующую часть системы (8) можно записать коротко в виде матричного соотношения

$$F = AE \tag{17}$$

Решим систему (17) относительно E. Это всегда возможно

$$E = BF \tag{18}$$

где матрица $B = A^{-1}$ есть обратная по отношению к матрице A, причем, так же как и матрица A, она несимметрична. Введем обозначение для оставшейся части системы (8)

$$F_3 = A'E \tag{19}$$

$$F_3 = \| D_3,\ \sigma_{33},\ \sigma_{23},\ \sigma_{13} \|^T \tag{20}$$

$$A' = \left\| \begin{array}{c|c} \varepsilon_{3i}^{\xi} & -e_{3jk} \\ \hline e_{il3} & c_{l3jk}^{\mathcal{Э}} \end{array} \right\| \qquad \begin{pmatrix} i, j, k = 1, 2 \\ l = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Здесь A' — матрица размерности 4×5 с элементами $\| a_{pq}' \|$, индекс 3 в выражении (19) указывает на наличие цифры 3 в индексе каждой компоненты вектора F_3.

Преобразуем систему (18) с целью получения слева тождественного нуля. Для этого учтем равенства (11) и (12) в правых частях уравнений (18) и равенства (2) и (4) в левых частях. После некоторых преобразований типа взятия частных производных и суммирования уравнений получим систему двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций φ и ψ

$$L_4\psi - L_3\varphi = 0, \qquad L_3\psi + L_2\varphi = 0 \tag{22}$$

Здесь обозначены линейные дифференциальные операторы в частных производных с постоянными коэффициентами соответственно второго, третьего и четвертого порядков

$$\begin{aligned} L_2 &= b_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2b_{12}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\ L_3 &= -b_{24}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (b_{14} + b_{25})\frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} - (b_{15} + b_{23})\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + b_{13}\frac{\partial x^3}{\partial x_2^3} \\ L_4 &= b_{44}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2b_{45}\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2b_{34} + b_{55})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2b_{35}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + b_{33}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \end{aligned} \tag{23}$$

Эти уравнения в дальнейшем послужат для определения всех неизвестных функций. Но функции φ и ψ удовлетворяют еще одному уравнению, не зависящему от тех, которые были уже использованы. В силу третьего уравнения системы (10), используя соответствующие уравнения системы (8), получаем

$$e_{ik3}\frac{\partial \mathcal{Э}_i}{\partial x_k} + c_{i3kl}^{\mathcal{Э}}\frac{\partial \xi_{kl}}{\partial x_i} = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2)$$

Подставим вместо $Э_1$, $Э_2$, ξ_{11}, ξ_{22}, ξ_{12} их выражение (18)

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\varphi + \left(\alpha_4 \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + \alpha_5 \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \alpha_6 \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \right.$$
$$\left. + \alpha \frac{\partial^3}{\partial x_2^3}\right)\psi = 0 \qquad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -(e_{113}b_{12} + e_{223}b_{22} + c^{Э}_{1311}b_{32} + c^{Э}_{1322}b_{42} + c^{Э}_{1312}b_{52}) \\
\alpha_2 &= e_{123}b_{11} + e_{223}b_{21} + c^{Э}_{1311}b_{31} + c^{Э}_{1322}b_{41} + c^{Э}_{1312}b_{51} - \\
&\qquad - (e_{123}b_{12} + e_{223}b_{22} + c^{Э}_{2311}b_{32} + c^{Э}_{2322}b_{42} + c^{Э}_{2312}b_{52}) \\
\alpha_3 &= e_{123}b_{11} + e_{223}b_{21} + c^{Э}_{1311}b_{31} + c^{Э}_{2322}b_{41} + c^{Э}_{2312}b_{51} \\
\alpha_4 &= e_{113}b_{14} + e_{213}b_{24} + c^{Э}_{1311}b_{34} + c^{Э}_{1322}b_{44} + c^{Э}_{1312}b_{54} \\
\alpha_5 &= e_{123}b_{14} + e_{223}b_{24} + c^{Э}_{2311}b_{34} + c^{Э}_{2322}b_{44} + c^{Э}_{2312}b_{54} - \\
&\qquad - (e_{113}b_{15} + e_{213}b_{25} + c^{Э}_{1311}b_{35} + c^{Э}_{1322}b_{45} + c^{Э}_{1312}b_{55}) \\
\alpha_6 &= e_{113}b_{13} + e_{213}b_{23} + c^{Э}_{1311}b_{33} + c^{Э}_{1322}b_{43} + c^{Э}_{1312}b_{53} - \\
&\qquad - (e_{123}b_{15} + e_{223}b_{25} + c^{Э}_{2311}b_{35} + c^{Э}_{2322}b_{45} + c^{Э}_{2312}b_{55}) \\
\alpha_7 &= e_{123}b_{13} + e_{223}b_{23} + c^{Э}_{2311}b_{33} + c^{Э}_{2322}b_{43} + c^{Э}_{2312}b_{53}
\end{aligned} \qquad (25)$$

Всякое решение системы уравнений (22) должно удовлетворять и уравнению (24). В работе [4] доказано, что это может иметь место в том и только в том случае, когда все коэффициенты уравнения (24) равны нулю. Приравнивая все α_i ($i = 1, 2, \ldots, 7$) нулю, получаем искомые условия того, что при воздействии на цилиндр плоской системы сил в нем возникает плоское электрическое поле и плоско-деформированное состояние

$$\alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 7) \qquad (26)$$

Особенно простой частный случай равенств (26) состоит в том, что

$$c^{Э}_{1123} = c^{Э}_{2223} = c^{Э}_{1113} = c^{Э}_{2213} = c^{Э}_{2312} = c^{Э}_{1222} = 0 \qquad (27)$$
$$e_{123} = e_{223} = e_{113} = e_{213} = 0$$

Условию (27) удовлетворяют кристаллы, принадлежащие [3] диэдрическому безосному классу моноклинной системы (если плоскость симметрии перпендикулярна оси z), а также тригонально-дипирамидальному классу гексагональной системы и дитригонально-пирамидальному классу той же системы (если плоскость симметрии перпендикулярна оси x или y).

Стержень должен быть вырезан так, чтобы его ребра были параллельны кристаллофизической системе координат, а ось x_3 — перпендикулярна плоскости симметрии, если такая существует. Условию (27) удовлетворяют также кристаллы SbSJ, приобретающие в результате спонтанной поляризации группу симметрии, соответствующую ромбо-пирамидальному классу ромбической системы. Здесь приведен не претендующий на полноту перечень примеров, указывающий лишь на практическую возможность всех введенных допущений, таких как (6) и (7).

Вернемся к системе (22) и найдем общие выражения для функций φ и ψ. Обозначим квадратную матрицу из дифференциальных операторов системы (22) через $P_6(D)$. Необходимое условие существования решения системы (22), не равного нулю тождественно, состоит в том, что

$$\det P_6(\lambda) = 0 \qquad (28)$$

Обе неизвестные функции удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению шестого порядка, например

$$P_6(D)\varphi = 0 \tag{29}$$

Очевидно, что общее решение для функций φ и ψ будет одинаковым. Запишем (28) подробнее

$$l_2(\lambda)l_4(\lambda) + l_3^2(\lambda) = 0 \tag{30}$$

где полиномы от λ

$$\begin{aligned} l_2(\lambda) &= b_{11}\lambda^2 - 2b_{12}\lambda + b_{22} \\ l_3(\lambda) &= b_{13}\lambda^3 - (b_{15} + b_{23})\lambda^2 + (b_{14} + b_{25})\lambda - b_{24} \\ l_4(\lambda) &= b_{33}\lambda^4 - 2b_{35}\lambda^3 + (2b_{34} + b_{55})\lambda^2 - 2b_{45}\lambda + b_{14} \end{aligned} \tag{31}$$

Уравнение (29) можно представить в виде

$$D_6D_5D_4D_3D_2D_1\varphi = 0 \tag{32}$$

$$D_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_2} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{33}$$

Здесь D_i — линейные операторы первого порядка, а λ_i — корни уравнения (30).

Метод последовательного интегрирования, указанный в [5] и примененный С. Г. Лехницким в [1], позволяет найти общее решение уравнения (32). Пусть среди корней уравнения (30) нет кратных. Введем обозначения

$$D_1\varphi = z_2, \qquad D_2z_2 = z_3, \quad \ldots, \qquad D_5z_5 = z_6 \tag{34}$$

Функция z_6 удовлетворяет уравнению первого порядка

$$D_6z_6 = 0 \tag{35}$$

Заменой переменных

$$z_6(x_1, x_2) = \omega(\eta_1, \eta_2), \qquad x_1 + \lambda_6x_2 = \eta_1, \qquad x_1 - \lambda_6x_2 = \eta_2$$

уравнение (35) можно преобразовать в уравнение

$$2\frac{\partial\omega}{\partial\eta_2} = 0$$

Общее решение этого уравнения есть $\omega = F(\eta_1)$. Следовательно, $z_6 = F(x_1 + \lambda_6x_2)$. Обозначим функцию F в виде пятой производной от другой произвольной функции по аргументу $(x_1 + \lambda_6x_2)$

$$z_6 = f_6^{(V)}(x_1 + \lambda_6x_2) \tag{36}$$

Функция z_5 удовлетворяет неоднородному уравнению первого порядка

$$D_5z_5 = f_6^{(V)}(x_1 + \lambda_6x_2) \tag{37}$$

Общее решение его слагается из общего решения уравнения

$$D_5z_5 = 0 \tag{38}$$

и из частного решения неоднородного уравнения. Представим общее решение уравнения (38) в виде четвертой производной от некоторой произвольной функции $f_5(x_1 + \lambda_5x_2)$ по аргументу $(x_1 + \lambda_5x_2)$. Найдем частное решение $z_5 = z_5(x_1 + \lambda_6x_2)$. Оно должно удовлетворять уравнению (37). Составим

$$\frac{\partial}{\partial x_1}z_5 = z_5', \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}z_5 = \lambda_6z_5'$$

и подставим в уравнение (37). Получим

$$\lambda_6z_5' - \lambda_5z_5' = f^{(V)}{}_6$$

Отсюда

$$z_5 = \frac{f_6^{(IV)}}{\lambda_6 - \lambda_5}$$

Тогда общее решение уравнения (37) будет

$$z_5 = f_5^{(IV)}(x_1 + \lambda_5 x_2) + \frac{f_6^{(IV)}(x_1 + \lambda_6 x_2)}{\lambda_6 - \lambda_5} \tag{39}$$

Продолжая аналогичные действия, получаем следующие выражения для функций φ и ψ:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{6} \varphi_k(x_1 + \lambda_k x_2) \tag{40}$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{6} \psi_k(x_1 + \lambda_k x_2) \tag{41}$$

Здесь обозначено для функций φ_k и аналогично для ψ_k

$$\varphi_1(x_1 + \lambda_1 x_2) = f_1(x_1 + \lambda_1 x_2)$$

$$\varphi_k(x_1 + \lambda_k x_2) = \frac{f_k(x_1 + \lambda_k x_2)}{(\lambda_k - \lambda_1)\ldots(\lambda_k - \lambda_{k-1})}$$

φ_k и ψ_k — произвольные функции аргумента $(x_1 + \lambda_k x_2)$, имеющие производные по этому аргументу до шестого порядка включительно. Общие выражения для искомых функций φ и ψ, которые являются вещественными функциями x_1 и x_2 будут

$$\varphi = \sum_{k=1}^{3} [\varphi_k(y_k) + \bar{\varphi}_k(\bar{y}_k)] = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \varphi_k(y_k)$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{3} [\psi_k(y_k) + \bar{\psi}_k(\bar{y}_k)] = 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{3} \psi_k(y_k)$$

где $y_k = x_1 + \lambda_k x_2,\ \bar{y}_k = x_1 + \bar{\lambda}_k x_2$ (42)

$$\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k,\ \lambda_{k+3} = \bar{\lambda}_k = \alpha_k - i\beta_k\ (k = 1, 2, 3;\ \beta_k > 0)$$

$\bar{\varphi}_k(\bar{y}_k)$, $\bar{\psi}_k(\bar{y}_k)$ — сопряженные функции по отношению к $\varphi_k(y_k)$ и $\psi_k(y_k)$.

Методом, осуществленным С. Г. Лехницким [1], на основании энергетических соображений можно доказать, что уравнение (30) не имеет вещественных корней. При этом нужно учесть, что потенциальная энергия W кристалла, отнесенная к единице объема, здесь будет выражена

$$2W = c_{klpq}^{\vartheta}\xi_{kl}\xi_{pq} - \varepsilon_{ij}^{\xi}\vartheta_i\vartheta_j + 2e_{ikl}\vartheta_i\xi_{kl} \tag{43}$$

которая является величиной положительной. В дальнейшем примем, что корни уравнения (30) не являются кратными, а также они не являются одновременно корнями уравнений

$$l_4(\lambda) = 0, \qquad l_3(\lambda) = 0, \qquad l_2(\lambda) = 0$$

Введем обозначения

$$\psi_1'(y_1) = \Phi_1(y_1), \qquad \psi_2'(y_2) = \Phi_2(y_2), \qquad \varphi_3(y_3) = \Phi_3(y_3)$$

и выразим все искомые функции задачи через эти три функции.

Для этого найдем

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = 2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1(y_1) + \Phi_2(y_2) + h_3\Phi_3(y_3)]$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 2\,\mathrm{Re}\,[\lambda_1\Phi_1(y_1) + \lambda_2\Phi_2(y_2) + \lambda_3 h_3\Phi_3(y_3)] \tag{44}$$
$$\varphi = 2\,\mathrm{Re}\,[h_1\Phi_1(y_1) + h_2\Phi_2(y_2) + \Phi_3(y_3)]$$
$$h_1 = -\frac{l_3(\lambda_1)}{l_2(\lambda_1)}, \qquad h_2 = -\frac{l_3(\lambda_2)}{l_2(\lambda_2)}, \qquad h_3 = \frac{l_3(\lambda_3)}{l_4(\lambda_3)}$$

Подставляя (44) в (17) с учетом (11) и (12), путем однократного дифференцирования найдем вектор F

$$F_i = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\alpha_{ij}\Phi_j'(y_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5) \tag{45}$$

где

$$\alpha_{11} = h_1\lambda_1, \quad \alpha_{12} = h_2\lambda_2, \quad \alpha_{13} = \lambda_3$$
$$\alpha_{21} = -h_1, \quad \alpha_{22} = -h_2, \quad \alpha_{23} = -1$$
$$\alpha_{31} = \lambda_1^2, \quad \alpha_{32} = \lambda_2^2, \quad \alpha_{33} = \lambda_3^2 h_3$$
$$\alpha_{41} = 1, \quad \alpha_{42} = 1, \quad \alpha_{43} = h_3$$
$$\alpha_{51} = -\lambda_1, \quad \alpha_{52} = -\lambda_2, \quad \alpha_{53} = -\lambda_3 h_3$$

Из выражения (18) находим вектор E

$$E_i = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}\Phi_j'(y_j) \tag{46}$$

где

$$\beta_{ij} = b_{ik}\alpha_{kj} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 5)$$

Из системы (19) находим вектор F_3

$$F_{3p} = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\gamma_{pj}\Phi_j'(y_j) \tag{47}$$

где

$$\gamma_{pj} = a_{pq}'\beta_{qj} \qquad (p = 1, \ldots, 4;\ q = 1, \ldots, 5)$$

Интегрируя (46), получаем выражения для потенциала электрического поля U и проекций вектора смещений u_i ($i = 1, 2, 3$)

$$U(x_1, x_2) = U_0 - 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{1j} + \frac{\beta_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] \tag{48}$$

$$u_1(x_1, x_2) = u_{10} - \omega x_2 + 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{3j} + \frac{\beta_{5j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right]$$
$$u_2(x_1, x_2) = u_{20} + \omega x_1 + 2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\beta_{4j}}{\lambda_j} + \frac{\beta_{5j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] \tag{49}$$

Здесь U_0, u_{10}, u_{20}, ω — постоянные интегрирования, показывающие нулевой уровень потенциала электрического поля и «жесткое» смещение кристалла как целого.

Перечислим возможные граничные условия, которым должны удовлетворять функции $\Phi_j(y_j)$ ($j = 1, 2, 3$).

Случай прямого пьезоэффекта. Заданы σ_{1n}, σ_{2n} на контуре сечения, $D_n = 0$ [6]. Тогда

$$\begin{gathered}2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(y_1)+\Phi_2(y_2)+h_3\Phi_3(y_3)] = -\frac{1}{2}\int_0^s \sigma_{2n}\,ds + C_2\\ 2\mathrm{Re}\,[\lambda_1\Phi_1(y_1)+\lambda_2\Phi_2(y_2)+\lambda_3 h_3\Phi_3(y_3)] = \frac{1}{2}\int_0^s \sigma_{1n}\,ds + C_1\\ 2\,\mathrm{Re}\,[h_1\Phi_1(y_1)+h_2\Phi_2(y_2)+\Phi_3(y_3)] = C_3\end{gathered} \tag{50}$$

Здесь s — дуга контура сечения, отсчитанная от некоторого $s = 0$ до переменной точки, n — направление внешней нормали к контуру, C_1, C_2, C_3 — постоянные, которые для односвязанной области можно положить равными нулю.

Заданы u_1^*, u_2^* — смещения точек контура в плоскости сечения, $D_n = 0$. Для функций $\Phi_j(y_j)$ $(j = 1, 2, 3)$

$$\begin{gathered}2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{3j}+\frac{\beta_{5j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_1^* - u_{10} + \omega x_2\\ 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\beta_{4j}}{\lambda_j}+\frac{\beta_{5j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] = u_2^* - u_{20} - \omega x_1\\ 2\mathrm{Re}\,[h_1\Phi_1(y_1)+h_2\Phi_2(y_2)+\Phi_3(y_3)] = C\end{gathered} \tag{51}$$

Случай обратного пьезоэффекта. Задан потенциал электрического поля U^* на контуре и условие механически зажатого кристалла $u_1^* = 0$, $u_2^* = 0$

$$\begin{gathered}2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{1j}+\frac{\beta_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = U_0 - U^*\\ 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{3j}+\frac{\beta_{5j}}{2\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{10} + \omega x_2\\ 2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\beta_{4j}}{\lambda_j}+\frac{\beta_{5j}}{2}\right)\Phi_j(y_j)\right] = -u_{20} - \omega x_1\end{gathered} \tag{52}$$

При заданном потенциале U^* условия механически свободного кристалла $\sigma_{1n} = 0$, $\sigma_{2n} = 0$

$$\begin{gathered}2\mathrm{Re}\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\beta_{1j}+\frac{\beta_{2j}}{\lambda_j}\right)\Phi_j(y_j)\right] = U_0 - U^*\\ 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(y_1)+\Phi_2(y_2)+h_3\Phi_3(y_3)] = C_2\\ 2\mathrm{Re}\,[\lambda_1\Phi_1(y_1)+\lambda_2\Phi_2(y_2)+\lambda_3 h_3\Phi_3(y_3)] = C_1\end{gathered} \tag{53}$$

Поступила 18 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М., Гостехтеоретиздат, 1950.
2. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
3. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков. М., «Наука», 1968.
4. Михлин С. Г. Плоская деформация в анизотропной среде. Тр. Сейсмологического ин-та АН СССР, 1936, № 76.
5. Пиаджио Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1933.
6. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. М., Изд-во иностр. лит., 1952.