

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СОСУДОВ

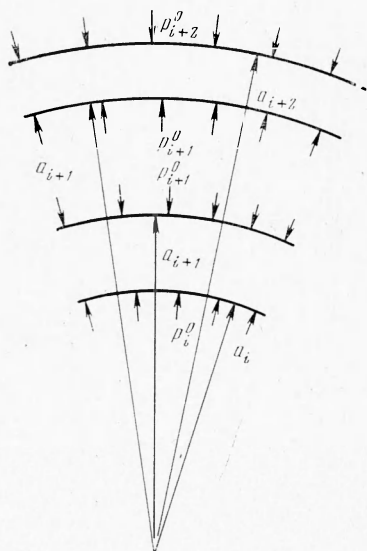
Ю. В. Немировский, М. Л. Хейнлоо

(Новосибирск)

В данной работе рассматривается задача о расчете композитной конструкции, обладающей определенными оптимальными свойствами по сравнению с другими конструкциями данного типа, применительно к сферическим сосудам в области упругих деформаций.

1. Пусть сферический сосуд представляет собой набор из  $N$  связанных между собой концентрических сфер (фиг. 1), материалы которых в общем случае различны. Сосуд нагружен равномерными внутренним и внешним давлениями и находится в условиях стационарного нагрева.

Введем безразмерные величины



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \psi_i &= \psi_i^\circ / pl, & r_i &= \rho_i / l, & T_i &= T_i^\circ / T_*, \\ \beta_i &= \beta_i^\circ T_*, & E_i &= E_i^\circ / p, & \sigma_{\theta_i} &= \sigma_{\theta_i}^\circ / p, \\ \sigma_{r_i} &= \sigma_{r_i}^\circ / p, & \nu_i, \alpha_i &= a_i / l, \alpha_{N+1} &= b / l, \\ h_i &= h_i^\circ / l, & p_i &= p_i^\circ / p & u_i &= u_i^\circ / l, \\ \sigma_i^* &= \sigma_i^{*\circ} / p, & p_{N+1} &= p_{N+1}^\circ / p \end{aligned}$$

где  $p, T_*, l$  — характерные давление, температура и линейный размер;  $\psi_i^\circ$  и  $T_i^\circ$  — функция напряжений и температуры в  $i$ -й ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) сфере;  $E_i, \nu_i, \beta_i^\circ$  — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент линейного расширения в  $i$ -й сфере;  $\sigma_{r_i}^\circ, \sigma_{\theta_i}^\circ = \sigma_{\varphi_i}^\circ, u_i^\circ$  — компоненты напряжений и смещений в  $i$ -й сфере;  $a_i$  и  $h_i^\circ$  — внутренний радиус и толщина  $i$ -й сферы;  $p_i^\circ$  — реактивное давление на внутренней поверхности  $i$ -й сферы;  $b$  и  $p_{N+1}^\circ$  — внешний радиус и наружное давление для составного сферического сосуда;  $\rho_i$  ( $a_i \leq \rho_i \leq a_{i+1}$ ) — текущий радиус в пределах

$i$ -й сферы,  $\sigma_i^{*\circ}$  — предельное напряжение в  $i$ -й сфере.

Будем считать в общем случае, что модули Юнга изменяются с температурой по некоторому закону  $E_i = E_i(T_i)$ . Тогда для некоторой сферы с номером  $i$  (фиг. 1) (нумерация начинается от внутренней полости) получим уравнение [1,2]

$$\psi_i'' + \left[ \frac{2}{r_i} - \frac{E_i'}{E_i} \right] \psi_i' - \left[ \frac{E_i'(1-3\nu_i)}{E_i r_i (1-\nu_i)} + \frac{2}{r_i^2} \right] \psi_i = - \frac{2\beta_i}{(1-\nu_i)} T_i'(r_i) E_i$$

(штрих обозначает производную по безразмерной координате  $r_i$ ), общее решение которого имеет вид

$$\psi_i = \sum_{j=1}^3 c_{ji} \psi_{ji}, \quad c_{3i} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Здесь  $\psi_{1i}$  и  $\psi_{2i}$  — частные решения однородного уравнения,  $\psi_{3i}$  — частное решение неоднородного уравнения.

Если материал всех сфер несжимаем, то при любой зависимости  $E_i = E_i(T_i)$  имеем

$$\begin{aligned} \psi_{1i} &= r_i, & \psi_{2i} &= r_i \int g_i dr_i, & g_i &= r_i^{-4} E_i \\ \psi_{3i} &= -4\beta_i r_i \int g_i \left( \int f_i dr_i \right) dr_i, & f_i &= T_i' r_i^3 \end{aligned}$$

Если материал сфер сжимаем и модули Юнга не зависят от температуры, то

$$\psi_{1i} = r_i, \quad \psi_{2i} = r_i^{-2}, \quad \psi_{3i} = -2\beta_i E_i r_i^{-2} (1 - \nu_i)^{-1} \int T_i r_i^2 dr_i$$

и при отсутствии температурного поля

$$\psi_{1i} = r_i, \quad \psi_{2i} = r_i^{-2}, \quad \psi_{3i} = 0 \quad (1.1)$$

Напряжения  $\sigma_{r_i}$ ,  $\sigma_{\theta_i}$  и смещения  $u_i$  определяются через функции напряжения  $\psi_i$  при помощи выражений

$$\begin{aligned} \sigma_{r_i} &= \sum_{j=1}^3 c_{ji} \psi_{ji} r_i^{-1}, & \sigma_{\theta_i} &= 2^{-1} \sum_{j=1}^3 c_{ji} (\psi_{ji} r_i^{-1} + \psi_{ji}') & (1.2) \\ u_i &= r_i E_i^{-1} \sum_{j=1}^3 A_{ji} c_{ji} + \beta_i r_i T_i, & A_{ji} &= 2^{-1} [(1 - 3\nu_i) \psi_{ji} r_i^{-1} + (1 - \nu_i) \psi_{ji}'] \end{aligned}$$

где константы интегрирования  $c_{1i}$  и  $c_{2i}$  определяются из граничных условий

$$\sigma_{r_i}(\alpha_i) = -p_i, \quad \sigma_{r_N}(\alpha_{N+1}) = -p_{N+1}$$

и равны

$$\begin{aligned} c_{ji} &= (-1)^{j+1} (D_{ji} + B_{ji}) D_i^{-1} \\ D_i &= \psi_{2i}(\alpha_i) \psi_{1i}(\alpha_{i+1}) - \psi_{2i}(\alpha_{i+1}) \psi_{1i}(\alpha_i) \\ D_{ji} &= \alpha_i p_i \psi_{ni}(\alpha_{i+1}) - \alpha_{i+1} p_{i+1} \psi_{ni}(\alpha_i) \\ B_{ji} &= \psi_{3i}(\alpha_i) \psi_{ni}(\alpha_{i+1}) - \psi_{3i}(\alpha_{i+1}) \psi_{ni}(\alpha_i), \quad n = 1, 2, \quad n \neq j \end{aligned}$$

В ряде случаев целесообразно конструировать многослойные сосуды, упрочненные достаточно тонкими сферическими оболочками из высокопрочных материалов. Если слой с номером  $i$  соответствует такой оболочке, то в (1.2) следует считать

$$\begin{aligned} \sigma_{r_i} &= 0, & \sigma_{\theta_i} &= \sigma_i = \alpha_i (p_i - p_{i+1}) (2h_i)^{-1} & (1.3) \\ u_i &= \alpha_i^2 (p_i - p_{i+1}) (1 - \nu_i) (2E_i h_i)^{-1} + \alpha_i \beta_i T_i(\alpha_i) \end{aligned}$$

Действительно, пользуясь теоремой Лагранжа ([3], стр. 128) и условием  $h_i \ll \alpha_i$  (и, следовательно,  $\alpha_i \approx \alpha_{i+1}$ ,  $\psi_{ji}(\alpha_i) \approx \psi_{ji}(\alpha_{i+1})$ ,  $\psi_{ji}'(\alpha_i) \approx \psi_{ji}'(\alpha_{i+1})$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} D_i &= [\psi_{2i}(\alpha_i) \psi_{1i}'(\alpha_i) - \psi_{2i}'(\alpha_i) \psi_{1i}(\alpha_i)] h_i \\ D_{ji} &= \alpha_i \psi_{ni}(\alpha_i) (p_i - p_{i+1}), \quad n = 1, 2, \quad n \neq j \\ B_{ji} &= [\psi_{3i}(\alpha_i) \psi_{ni}'(\alpha_i) - \psi_{3i}'(\alpha_i) \psi_{ni}(\alpha_i)] h_i \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1.2), получим формулы (1.3). Пользуясь условиями сопряжения

$$u_k(\alpha_{k+1}) = u_{k+1}(\alpha_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

получим систему уравнений для определения реактивных усилий  $p_j$  ( $j = 2, 3, \dots, N$ )

$$d_{1k} p_k + p_{k+1} + d_{2k} p_{k+2} = M_k \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} d_{1k} &= H_{1k} S_k^{-1}, \quad d_{2k} = H_{2k} S_k^{-1}, \quad M_k = R_k S_k^{-1} \\ H_{1k} &= \alpha_k [A_{1k}(\alpha_{k+1}) \psi_{2k}(\alpha_{k+1}) - A_{2k}(\alpha_{k+1}) \psi_{1k}(\alpha_{k+1})] D_{k+1} \\ H_{2k} &= \alpha_{k+2} [A_{1,k+1}(\alpha_{k+1}) \psi_{2,k+1}(\alpha_{k+1}) - \\ &\quad - A_{2,k+1}(\alpha_{k+1}) \psi_{1,k+1}(\alpha_{k+1})] D_k n_k \\ R_k &= D_k n_k L_{k+1}(\alpha_{k+1}) - L_k(\alpha_{k+1}) D_{k+1} \\ L_k(r_k) &= B_{1k} A_{1k}(r_k) - B_{2k} A_{2k}(r_k) + \\ &\quad + D_k A_{3k}(r_k) + \beta_k T_k(r_k) D_k E_k \\ S_k &= \alpha_{k+1} \{D_{k+1} [A_{2k}(\alpha_{k+1}) \psi_{1k}(\alpha_k) - \\ &\quad - A_{1k}(\alpha_{k+1}) \psi_{2k}(\alpha_k)] + n_k D_k [A_{2,k+1}(\alpha_{k+1}) \psi_{1,k+1}(\alpha_{k+2}) - \\ &\quad - A_{1,k+1}(\alpha_{k+1}) \psi_{2,k+1}(\alpha_{k+2})]\}, \quad n_k = E_k E_{k+1}^{-1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Общее решение системы (1.4) получим методом Крамера [4]

$$p_{k+1} = \Delta_k \Delta^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (1.6)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & d_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_{12} & 1 & d_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_{13} & 1 & d_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_{1,N-1} & 1 \end{vmatrix}$$

а  $\Delta_k$  получается путем замены  $k$ -го столбца столбцом правой части системы (1.4).

Обозначим

$$J_1 = 1, \quad J_t = 1 - d_{1t} d_{2,t-1} J_{t-1}^{-1} \quad (1.7) \\ (t = 2, 3, \dots, N-1)$$

Так как  $J_k \neq 0$  (ибо  $\Delta = J_1 J_2 \dots J_{N-1} \neq 0$ , поскольку система (1.4) должна иметь единственное решение), то, пользуясь методом Гаусса

[[4], получим следующее решение системы (1.4):

$$\begin{aligned} p_2 &= K_1 J_1^{-1} - K_2 d_{21} (J_1 J_2)^{-1} + K_3 d_{21} d_{22} (J_1 J_2 J_3)^{-1} - \dots + \\ &\quad + (-1)^N K_{N-1} d_{21} d_{22} \dots d_{2,N-2} (J_1 J_2 J_3 \dots J_{N-1})^{-1} \\ p_3 &= K_2 J_2^{-1} - K_3 d_{22} (J_2 J_3)^{-1} + K_4 d_{22} d_{23} (J_2 J_3 J_4)^{-1} - \dots + \\ &\quad + (-1)^{N-1} K_{N-1} d_{22} d_{23} \dots d_{2,N-2} (J_2 J_3 \dots J_{N-1})^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$p_{N-1} = K_{N-2} J_{N-2}^{-1} - K_{N-1} d_{2,N-2} (J_{N-1} J_{N-2})^{-1}$$

$$p_N = K_{N-1} J_{N-1}^{-1}$$

$$K_1 = M_1 - d_{11} p_1, \quad K_2 = M_2 - d_{12} [M_1 - d_{11} p_1] J_1^{-1}$$

$$K_3 = M_3 - M_2 d_{13} J_2^{-1} + d_{12} d_{13} [M_1 - d_{11} p_1] (J_2 J_1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} K_{N-1} &= M_{N-1} - d_{2,N-1} p_{N+1} - M_{N-2} d_{1,N-1} J_{N-2}^{-1} + \dots + \\ &\quad + (-1)^N d_{1,N-1} d_{1,N-2} \dots d_{13} d_{12} [M_1 - d_{11} p_1] (J_{N-2} J_{N-3} \dots J_3 J_2 J_1)^{-1} \end{aligned}$$

Эти формулы удобны тем, что дают явные выражения реактивных давлений через параметры наборного сосуда, внешнюю нагрузку и температуру.

2. Полученные в п. 1 общие аналитические выражения для определения реактивных давлений, распределения напряжений и смещений в случае произвольного набора составной сферы позволяют сформулировать и решить ряд задач об оптимизации многослойных сферических сосудов.

Первая основная задача оптимизации — найти такую конструкцию составного сферического сосуда, для которой при данном нагружении (включая температурное поле) во всех сферах или некоторых из них, выполняется некоторое предельное состояние, например в некоторых точках выполняются условия текучести или прочности. Если в состав наборной конструкции входит внутренняя тонкостенная оболочка, то возможна потеря устойчивости при некотором критическом напряжении.

Вторая основная задача оптимизации — найти такую конструкцию многослойного сферического сосуда, чтобы абсолютные смещения на внутренней или внешней поверхностях были минимальными.

Кроме того, в некоторых конструкциях возможно одновременное выполнение обоих требований (смешанная задача оптимизации).

Введем функцию  $f_i(r_i)$ , которая при условии пластичности Треска или Мизеса имеет вид

$$f_i(r_i) = \sigma_{\theta_i} - \sigma_{r_i} = 2^{-1} \sum_{j=1}^3 c_{ji} [\psi_{ji}'(r_i) - \psi_{ji}(r_i) r_i^{-1}]$$

Для решения первой задачи оптимизации необходимо прежде всего найти  $\max |f_i(r_i)| = |f_i(r_i^*)|$  в области  $\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}$ . Далее возможны следующие случаи:

- 1) в сферах с некоторыми индексами  $q$  выполняются условия текучести на радиусах  $r_q^*$ , остальные сферы остаются упругими;
- 2) внутренняя сфера не теряет устойчивости [5];
- 3) все сферы остаются упругими;
- 4) внутренняя сфера теряет устойчивость.

Случаям 1) и 2) соответствуют условия

$$|f_q(r_q^*)| = \sigma_q^* \quad (2.1)$$

$$|f_i(r_i)| < \sigma_i^*, \quad r_i \neq r_q^* \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

$$p_2 - p_1 < p^*, \quad p^* = 2E_1 h_1^2 \alpha_1^{-2} [3(1 - \nu_1^2)]^{-1/2} \quad (2.3)$$

3) и 4) — неравенства (2.2) для всех  $r_i$  и

$$p_2 - p_1 = p^* \quad (2.4)$$

1) и 4) — равенства (2.1), (2.4) и неравенства (2.2), которые следует рассматривать как ограничения на параметры  $\alpha_i$ ,  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\sigma_i^*$ ,  $p_1$ ,  $p_{N+1}$ , причем

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{N+1}$$

В (2.1) — (2.4) давления  $p_j$  вычисляются по формулам (1.8). Отметим, что при отсутствии температурного поля

$$f_i(r_i) = 3(p_i - p_{i+1})\alpha_i^3 \alpha_{i+1}^3 2^{-1} (\alpha_{i+1}^3 - \alpha_i^3)^{-1} r_i^{-3}$$

и  $\max |f_i(r_i)| = |f_i(\alpha_i)|$  при  $\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}$ .

Следовательно, в этом случае в (2.1), (2.2) необходимо принять  $r_q^* = \alpha_q$ . Во второй, основной задаче оптимизации нужно найти минимум  $|u_1|$  или  $|u_N|$  относительно параметров  $\alpha_i$ ,  $\nu_i$ ,  $E_i$ ,  $p_1$ ,  $p_{N+1}$  при условиях

$$0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{N+1}$$

$$|f_i(r_i)| < \sigma_i^*, \quad p_2 - p_1 < p^* \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Решение этой задачи на основании общей формулы (1.2) осуществляется стандартным способом ([3], стр. 318), поэтому дальнейшие подробности в этом направлении здесь опускаем.

Решение систем нелинейных алгебраических уравнений (2.1) относительно варьируемых параметров можно отыскивать при помощи метода последовательных приближений Ньютона [6]. При этом вопрос о выборе первого приближения должен рассматриваться в каждом конкретном случае отдельно в соответствии с выбором варьируемых параметров. Например, при варьировании величин  $\alpha_j$  в качестве первого приближения можно взять  $\alpha_j = \alpha_1 + (j - 1)(\alpha_{N+1} - \alpha_1)N^{-1}$ .

В ряде случаев специфика строения требуемого наборного сосуда позволяет в той или иной мере упростить выражения (1.5), (2.1) — (2.4). Пусть, например, в некоторой части многослойного сферического сосуда чередуются тонкие оболочки и толстые сферы.

Обозначим эти оболочки индексами  $t$ , а чередующиеся с ними сферы — индексами  $s$ . Тогда, пользуясь естественными предположениями

$$h_t \ll h_s \quad (2.5)$$

( $h_t$  и  $h_s$  обозначают соответственно толщины оболочек и сфер) и требуя выполнения условия пластичности в некоторых оболочках с индексами  $q$  ( $q$  принимает все или часть номеров, соответствующих индексам  $t$ ), вместо уравнений (2.1), например, получим

$$|\alpha_q(p_q - p_{q+1})(2h_q)^{-1}| = \sigma_q^* \quad (2.6)$$

причем решение этой системы уравнений должно удовлетворить неравенствам (2.2) при  $i \neq q$ . Кроме того, на основании (2.5) и теоремы Лагранжа



о среднем ([3], стр. 128) коэффициенты (1.5) при  $k = t$  и  $k = s$  примут соответственно вид

$$\begin{aligned}
 [d_{1t} &= -(1 + \theta_t h_t)^{-1}, \quad d_{2t} = -\kappa_t h_t (1 + \theta_t h_t)^{-1} & (2.7) \\
 d_{1s} &= -\kappa_s h_{s+1} (1 + \theta_s h_{s+1})^{-1}, \quad d_{2s} = -(1 + \theta_s h_{s+1})^{-1} \\
 M_t &= N_t h_t (1 + \theta_t h_t)^{-1}, \quad M_s = N_s h_{s+1} (1 + \theta_s h_{s+1})^{-1} \\
 \theta_t &= n_t D_t^* [A_{2,t+1}(\alpha_t) \psi_{1,t+1}(\alpha_{t+2}) - A_{1,t+1}(\alpha_t) \psi_{2,t+1}(\alpha_{t+2})] \varepsilon_t^{-1} \\
 \varepsilon_t &= D_{t+1}^{**} [A_{2t}(\alpha_t) \psi_{1t}(\alpha_t) - A_{1t}(\alpha_t) \psi_{2t}(\alpha_t)] \\
 \kappa_t &= n_t D_t^* \alpha_{t+2} [A_{2,t+1}(\alpha_t) \psi_{1,t+1}(\alpha_t) - A_{1,t+1}(\alpha_t) \psi_{2,t+1}(\alpha_t)] (\alpha_t \varepsilon_t)^{-1} \\
 N_t &= L_t^* \{ \alpha_t [A_{2t}(\alpha_t) \psi_{1t}(\alpha_t) - A_{1t}(\alpha_t) \psi_{2t}(\alpha_t)] D_{t+1}^{**} \}^{-1} & (2.8) \\
 \theta_s &= D_{s+1}^{\circ\circ} [A_{2s}(\alpha_{s+2}) \psi_{1s}(\alpha_s) - A_{1s}(\alpha_{s+2}) \psi_{2s}(\alpha_s)] \varepsilon_s^{-1} \\
 \varepsilon_s &= D_s^{\circ} n_s [A_{2,s+1}(\alpha_{s+2}) \psi_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) - A_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) \psi_{2,s+1}(\alpha_{s+2})] \\
 \kappa_s &= \alpha_s [A_{2s}(\alpha_{s+2}) \psi_{1s}(\alpha_{s+2}) - A_{1s}(\alpha_{s+2}) \psi_{2s}(\alpha_{s+2})] D_{s+1}^{\circ\circ} (\alpha_{s+2} \varepsilon_s)^{-1} \\
 N_s &= L_s^{\circ} \{ \alpha_{s+2} D_s^{\circ} n_s [A_{2,s+1}(\alpha_{s+2}) \psi_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) - A_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) \psi_{2,s+1}(\alpha_{s+2})] \}^{-1} \\
 B_{jt}^* &= \psi_{3t}(\alpha_t) \psi_{nt}'(\alpha_t) - \psi_{3t}'(\alpha_t) \psi_{nt}(\alpha_t), \quad n = 1, 2, \quad j \neq n \\
 D_t^* &= \psi_{2t}(\alpha_t) \psi_{1t}'(\alpha_t) - \psi_{2t}'(\alpha_t) \psi_{1t}(\alpha_t) \\
 B_{j,t+1}^* &= \psi_{3,t+1}(\alpha_t) \psi_{n,t+1}(\alpha_{t+2}) - \psi_{3,t+1}'(\alpha_{t+2}) \psi_{n,t+1}(\alpha_t), \quad n = 1, 2, \quad j \neq n \\
 D_{t+1}^{**} &= \psi_{2,t+1}(\alpha_t) \psi_{1,t+1}(\alpha_{t+2}) - \psi_{2,t+1}'(\alpha_{t+2}) \psi_{1,t+1}(\alpha_t) \\
 L_t &= D_t^* n_t [B_{1,t+1}^{**} A_{1,t+1}(\alpha_t) - B_{2,t+1}^{**} A_{2,t+1}(\alpha_t) + D_{t+1}^{**} A_{3,t+1}(\alpha_t) + \beta_{t+1} T_t(\alpha_t) \times \\
 &\times D_{t+1}^{**} E_{t+1}] - D_{t+1}^{**} [B_{1t}^* A_{1t}(\alpha_t) - B_{2t}^* A_{2t}(\alpha_t) + D_t^* A_{3t}(\alpha_t) + \beta_t T_t(\alpha_t) D_t^* E_t] \\
 B_{js}^{\circ} &= \psi_{3s}(\alpha_s) \psi_{ns}(\alpha_{s+2}) - \psi_{3s}'(\alpha_{s+2}) \psi_{ns}(\alpha_s), \quad n = 1, 2, \quad j \neq n \\
 D_s^{\circ} &= \psi_{2s}(\alpha_s) \psi_{1s}(\alpha_{s+2}) - \psi_{2s}'(\alpha_{s+2}) \psi_{1s}(\alpha_s) \\
 B_{j,s+1}^{\circ\circ} &= \psi_{3,s+1}(\alpha_{s+2}) \psi_{n,s+1}(\alpha_{s+2}) - \psi_{3,s+1}'(\alpha_{s+2}) \psi_{n,s+1}(\alpha_{s+2}), \quad n = 1, 2, \quad j \neq n \\
 D_{s+1}^{\circ\circ} &= \psi_{2,s+1}(\alpha_{s+2}) \psi_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) - \psi_{2,s+1}'(\alpha_{s+2}) \psi_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) \\
 L_s^{\circ} &= D_s^{\circ} n_s [B_{1,s+1}^{\circ\circ} A_{1,s+1}(\alpha_{s+2}) - B_{2,s+1}^{\circ\circ} A_{2,s+1}(\alpha_{s+2}) + D_{s+1}^{\circ\circ} A_{3,s+1}(\alpha_{s+2}) + \\
 &+ \beta_{s+1} T_s(\alpha_{s+2}) D_{s+1}^{\circ\circ} E_{s+1}] - D_{s+1}^{\circ\circ} [B_{1s}^{\circ} A_{1s}(\alpha_{s+2}) - B_{2s}^{\circ} A_{2s}(\alpha_{s+2}) + \\
 &+ D_s^{\circ} A_{3s}(\alpha_{s+2}) + \beta_s T_s(\alpha_{s+2}) D_s^{\circ} E_s]
 \end{aligned}$$

В этих выражениях штрихи обозначают производную по аргументу, указанному в скобках при функции,  $\alpha_t$  и  $\alpha_s$  — внутренние радиусы оболочек и сфер, причем принято, что  $\alpha_t = \alpha_{t+1}$ ,  $\alpha_{s+1} = \alpha_{s+2}$ .

На основании (1.7), (2.5) и (2.7) для многослойных сферических сосудов с чередующимися оболочками естественно принять

$$J_s = 1, \quad J_t = 1 - d_{1t} d_{2t-1} \quad (2.9)$$

При этом следует иметь ввиду, что  $d_{20} = 0$ , т. е.  $J_1 = 1$ .

В некоторых случаях равенства (2.9) позволяют получить аналитические выражения для оптимальных толщин оболочек.

Рассмотрим, например, случай, когда наборный сферический сосуд с чередующимися оболочками нагружен только наружным давлением ( $M_1 = M_2 = \dots = M_{N-1} = p_1 = 0$ ). Подставляя в этом случае выражения (1.8) в (2.6), где абсолютные знаки заменены множителем  $k_q = \pm 1$  (плюс принимается при растяжении, минус — при сжатии), получим, учитывая (2.7) и (2.9), систему уравнений, из которой последовательными

вычислениями найдем

$$\begin{aligned} h_N &= -(2k_N \sigma_N^*)^{-1} - \theta_{N-1}^{-1} \quad \text{при } q = N \\ h_q &= \kappa_q \sigma_{q+2}^* \alpha_q k_{q+2} (\alpha_{q+2} \theta_{q+1} \sigma_q^* \theta_q k_q)^{-1} - \theta_{q-1}^{-1} - \theta_q^{-1} \\ h_1 &= \kappa_1 \sigma_3^* \alpha_1 k_3 (\theta_1 \sigma_1^* \alpha_3 k_1)^{-1} - \theta_1^{-1} \quad \text{при } q = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь величины  $\theta_i$ ,  $\kappa_i$ ,  $\theta_s$ ,  $\kappa_s$  получаются из (2.8) при подстановке равенств (1.4) а индекс  $q$  соответствует оболочкам, в которых выполняются равенства (2.6).

Формулы (2.10) определяют оптимальные толщины оболочек с индексами  $q$  любого наборного сферического сосуда в той его части, где оболочки чередуются со сферами, и который нагружен только наружным давлением.

Так как все  $h_q$ ,  $\theta_s$ ,  $\kappa_s$ ,  $\theta_i$ ,  $\kappa_i$  должны быть положительными по смыслу, то в (2.10) следует принять  $k_q = -1$ . Следовательно, все оболочки оптимальной наборной конструкции одновременно достигают пределов текучести в условиях сжатия. Полученное решение (2.10) должно удовлетворять неравенствам (2.2) при  $i \neq q$ . Эти неравенства всегда могут быть удовлетворены за счет выбора оставшихся параметров  $p_1$ ,  $p_{N+1}$ ,  $E_i$ ,  $\nu_i$ ,  $\sigma_i^*$  (при  $i \neq q$ ).

3. В качестве примера рассмотрим задачу о трехслойном сферическом сосуде типа оболочка — сфера — оболочка, нагруженном внутренним давлением  $p_1$  и наружным давлением  $p_4$ . В этом случае  $N = 3$ ;  $t = 1, 3$ ;  $s = 2$ ;  $q = 1, 2, 3$ . Неравенства (2.2), (2.3) определяют область упругих напряженных состояний при сохранении устойчивости внутренней оболочки. Границы этой области определяются равенствами (2.1) и (2.4). При значениях параметров

$$\begin{aligned} E_1 &= 40000, & E_2 &= 3000, & E_3 &= 14000, & \nu_1 &= 0.3 \\ \nu_2 &= 0.25, & \nu_3 &= 0.3, & \sigma_1^* &= 100, & \sigma_2^* &= 1 \\ p_4 &= 10.0, & \sigma_3^* &= 20, & p &= |\sigma_2^*|, & l &= b \end{aligned} \quad (3.1)$$

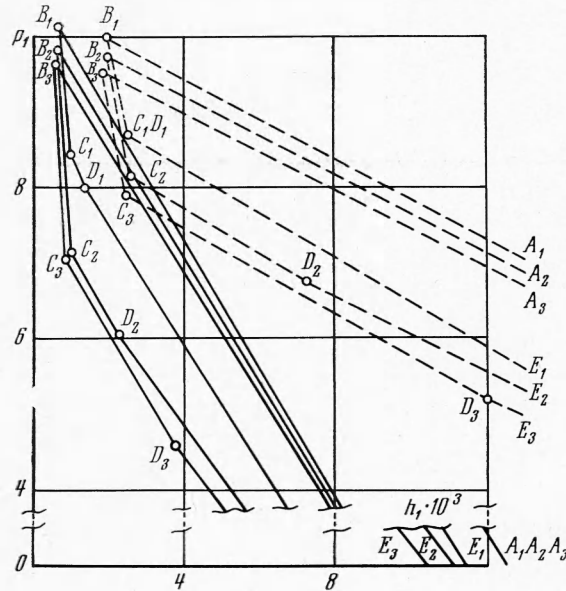
области упругих состояний находятся внутри пятиугольников  $A_k B_k C_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$  изображенных на фиг. 2.

При этом индексам  $k = 1, 2, 3$ , соответствуют значения  $h_3 = 0, 0.005, 0.01$ . Сплошные пятиугольники соответствуют параметру  $\alpha_1 = 0.2$ , заштрихованные — параметру  $\alpha_1 = 0.6$ . Кривые  $A_k B_k$  и  $C_k D_k$  получены из уравнения (2.1) при  $q = 2$  и соответствуют достижению пределов текучести на внутреннем диаметре сферы при растяжении и сжатии соответственно. Кривые  $B_k C_k$  определяются по уравнению (2.4) и соответствуют потере устойчивости внутренней сферы. Кривые  $D_k E_k$  определяются из уравнения (2.1) при  $q = 1$  и соответствуют достижению предела текучести на внутреннем диаметре внутренней оболочки в условиях сжатия. При подсчете этих кривых предположения для оболочек не использовались. Расчет по упрощенным на основании предположений (2.5) формулам (2.6) (при  $q = 1, 3$ ) показывает достаточную надежность этих формул для отыскания кривых  $A_k B_k$ ,  $B_k C_k$ ,  $C_k D_k$  во всем диапазоне вычисленных значений  $h_1$  и  $h_3$  и для кривых  $D_k E_k$  при  $h_1 < 7 \cdot 10^{-3}$ . Соответствующие кривые располагаются достаточно близко к кривым  $A_k B_k$ ,  $B_k C_k$ ,  $C_k D_k$ ,  $D_k E_k$  на фиг. 2 с максимальным отклонением 15% и не приведены из-за громоздкости.

Отметим, что на фиг. 2 точки  $B_k$ ,  $C_k$  и  $D_k$  соответствуют оптимальным проектам, причем точки  $B_k$ ,  $C_k$  соответствуют одновременному достижению предела текучести в сфере и потере устойчивости внутренней оболочки, точки  $D_k$  — одновременному достижению пределов текучести в сфере

и внутренней оболочке. Для значений параметров (3.1) достижение предела текучести в наружной оболочке возможно только после достижения пределов текучести в сфере и (или) внутренней оболочке или после потери устойчивости внутренней оболочки.

Использование графиков, подобных изображенным на фиг. 2, хотя и дает достаточно ясную информацию о состоянии наборной конструкции,



Фиг. 2

но оказывается неудобным для отыскания оптимальных параметров конструкции при большом числе элементов. В этом случае удобнее использовать непосредственно уравнения (2.1) — (2.4) или упрощенные уравнения (2.6). На фиг. 3, 4 при  $p = p_1$ ,  $l = b$  для значений параметров

$\nu_1 = 0.3$ ,  $\nu_2 = 0.25$ ,  $\nu_3 = 0.3$ ,  $p_1 = 0$ ,  $n_1 = \sqrt[4]{0.3}$ ,  $n_2 = \sqrt[3]{0.14}$ ,  $\alpha_1 = 0.2$  приведены графики зависимостей  $-\sigma_n^*$  ( $n = 1, 2, 3$ ) от  $h_1$ , подсчитанные по формулам (2.1) (сплошные кривые) и (2.6) (штриховые кривые). Кривые  $A_k B_k$  и  $C_k D_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) подсчитаны соответственно при  $h_3 = 0.01$  и  $0.001$ . Как видно из этих кривых, использование предположения (2.5) вполне оправдано.

Графики, представленные на фиг. 3, 4, позволяют определить приближенные значения оптимальных параметров наборного сферического сосуда. Так, например, при

$$\alpha_1 = 0.2, n_1 = \sqrt[4]{0.3}, n_2 = \sqrt[3]{0.14}, l = b, -\sigma_2^* = 0.27, -\sigma_1^* = 16.2, -\sigma_3^* = 2.70, p_1^0 = 185 \text{ кг/см}^2$$

из графиков (сплошных кривых) на фиг. 3, 4 видно, что возможные значения оптимальных параметров должны находиться в области, являющейся общей частью областей

$$h_1 \in 10^{-5} [80, 82], \quad h_1 \in 10^{-4} [25, 31], \quad h_1 \in 10^{-3} [1, 10]$$

$$h_3 \in 10^{-3} [1, 10], \quad h_3 \in 10^{-3} [1, 10], \quad h_3 \in 10^{-3} [1, 10]$$

т. е.

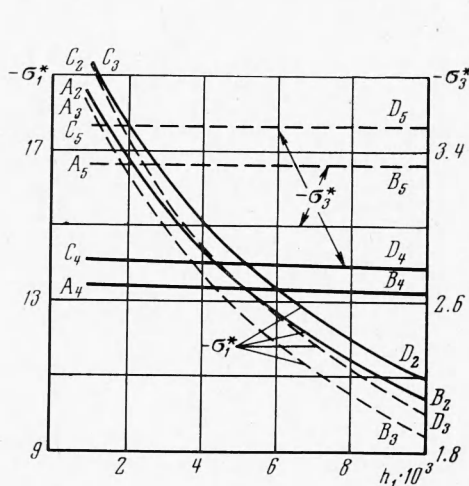
$$h_1 \in 10^{-5} [80, 82], \quad h_3 \in 10^{-3} [1, 10]$$



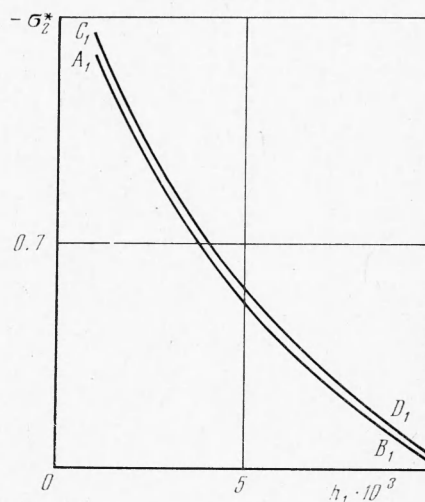
Полагая, что кривые  $A_k B_k$  при равномерном изменении  $h_3$  равномерно переходят в кривые  $C_k D_k$ , получим в рассматриваемом случае

$$h_1 \approx 0.0081, \quad h_3 \approx 0.0050 \quad (3.2)$$

При этих значениях условия пластичности выполняются одновременно на внутреннем диаметре сферы и во внешней оболочке. При помощи (2.2),



Фиг. 3



Фиг. 4

(2.3) легко убедиться, что внутренняя оболочка остается упругой и не теряет устойчивость.

Отметим, что значения (3.2) можно использовать в качестве первого приближения для уточнения значений  $h_1$  и  $h_3$  по методу Ньютона при использовании уравнений (2.1), когда толщины оболочек не слишком малы.

В заключение сделаем следующее замечание. Чтобы показать, что излагаемая методика расчета верна также и в случае, когда внутренняя оболочка теряет устойчивость, в (2.3) для простоты была использована формула критической нагрузки отдельной оболочки.

В действительности, когда потеря устойчивости внутренней оболочки сопровождается деформированием слоев, с которыми она связана, критическая нагрузка может быть иной. Соответствующая задача может быть решена, и тогда получающееся значение следует использовать для уточнения в (2.3). Однако эта задача будет рассмотрена отдельно.

Поступила 18 V 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости М., Гостехтеоретиздат, 1937.
3. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1965.
5. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. М., Физматгиз, 1963.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.