УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ СДВИГОВ

О. П. Бушманова

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул

Исследуется процесс локализации сдвигов на дискретных системах линий. Линии сдвига моделируются криволинейными математическими разрезами, условия на которых обеспечивают возможность возникновения разрывов касательных перемещений. Построен класс функций напряжений, позволяющих описывать напряженно-деформированное состояние в упругом кольце с произвольным числом трещин сдвига в форме логарифмических спиралей.

Ключевые слова: локализация сдвигов, трещины сдвига, функция напряжений.

Постановка задач с дискретными системами линий сдвига. Локализацию сдвигов на отдельных поверхностях можно наблюдать в горных породах, сыпучих средах, металлах [1–3]. В настоящей работе моделируется процесс локализации сдвигов на системах линий в плоской области Ω, ограниченной кривой Γ_Ω. В рамках метода последовательных нагружений предположим, что на данном шаге нагружения определено число линий сдвига, их форма и расположение в области. Линии сдвига представим в виде математических разрезов. Берега разрезов Γ^+, Γ^- будем рассматривать как части общей границы $\Gamma = \Gamma_\Omega \cup \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ исследуемой области.

Поставим задачу нахождения на каждом шаге нагружения в области Ω с границей Γ полей приращений перемещений u_i $(i = 1, 2)$ и приращений напряжений σ_{ij} $(i, j = 1, 2)$. Искомые функции должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = X_i,$$

где X_i — компоненты вектора приращений массовых сил в декартовой системе координат.

Для того чтобы выделить эффекты, связанные с локализацией сдвигов, для материала вне линий выберем модель линейно-упругого тела. В случае плоской деформации закон Гука имеет вид [4]

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\Big(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\varepsilon_{kk}\Big),$$

где ε_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — компоненты тензора приращений деформаций:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2;$$

E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; по k проводится суммирование от 1 до 2.

Представим уравнения состояния в зоне локализации сдвигов в виде граничных условий, описывающих взаимодействие берегов разрезов $\Gamma^\pm$. Из законов сохранения [5] следует, что нормальная составляющая вектора приращений перемещений u_n и вектор приращений напряжений непрерывны на площадке касательного разрыва перемещений:

$$\Gamma^\pm: \qquad u_n^+ = u_n^-; \tag{1}$$

$$\Gamma^\pm: \qquad (p_n^n)^+ = (p_n^n)^-, \qquad (p_\tau^n)^+ = (p_\tau^n)^-. \tag{2}$$

Здесь индексы “+” и “−” соответствуют разным сторонам линии разрыва; p_n^n, p_τ^n — нормальная и касательная составляющие вектора приращений напряжений. Направляющие косинусы нормали и касательной выбираются одинаковыми на разных сторонах разреза.

Моделирование линий локализации сдвигов с помощью разрезов обеспечивает возможность скольжения берегов разрезов относительно друг друга, т. е. смещения первоначально совпадающих точек вдоль определенных линий. Такая возможность реализуется в зависимости от условий, заданных на разрезах, и их связи с условиями нагружения и уравнениями состояния.

Возникновение касательного разрыва перемещений в данной точке на линии сдвига возможно при выполнении одного из следующих условий на различных участках разрезов:

$$\Gamma_1^\pm: \qquad p_\tau^n = g_1(p_n^n, x_1, x_2); \tag{3}$$

$$\Gamma_2^\pm: \qquad g_2(u_\tau^+ - u_\tau^-, p_\tau^n, x_1, x_2) = 0, \tag{4}$$

где u_τ — касательная составляющая вектора приращений перемещений; x_1, x_2 — декартовы координаты точки; g_1, g_2 — заданные функции.

На участках разрезов $\Gamma_c^\pm$, вдоль которых разрывов не возникает, наряду с условиями (1), (2) должно выполняться условие (4) с функцией $g_2 \equiv u_\tau^+ - u_\tau^-$.

Функция g_2 в (4) может быть записана в виде явной зависимости приращения касательного напряжения p_τ^n от скачка приращения касательного перемещения $u_\tau^+ - u_\tau^-$ и, в частности, может описывать разупрочнение.

Таким образом, систему разрезов в исследуемой области представим в виде

$$\Gamma^\pm = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm \cup \Gamma_c^\pm.$$

На двух берегах разреза $\Gamma^\pm$ выполняются граничные условия (1), (2) и (3) или (4).

Форма и расположение линий локализации сдвигов являются заданными или определяются (уточняются) в ходе решения задачи на основе некоторых критериев. Например, в качестве критерия рассматривается условие

$$\tau + \sigma\sin\phi - \tau^*\cos\phi < 0,$$

где $\tau = \sqrt{(\sigma_{11}^l - \sigma_{22}^l)^2 + 4(\sigma_{12}^l)^2}/2$; $\sigma = (\sigma_{11}^l + \sigma_{22}^l)/2 < 0$; σ_{ij}^l $(i, j = 1, 2)$ — полные напряжения на текущем l-м шаге нагружения; τ^*, ϕ — заданные параметры материала. Если данное условие нарушается в окрестности предполагаемой линии сдвига, то на ней задается закон трения Кулона — условие (3) с функцией $g_1 = \pm(\tau^l - p_n^n \operatorname{tg}\phi)$, где выбор знака зависит от направления нормали и истории нагружения, а величина τ^l — от истории нагружения и τ^*.

В свою очередь, граница Γ_Ω может содержать участки с условиями разного типа, связывающими на данных участках границы нормальные и касательные компоненты вектора приращений перемещений и соответствующие компоненты вектора приращений напряжений.

Алгоритм численного решения поставленной задачи строится на основе метода конечных элементов [6]. Первоначальное разбиение области на конечные элементы осуществляется автоматически с учетом имеющихся экспериментальных данных и аналитических исследований расположения линий локализации для каждой задачи. Одно из семейств линий сетки конечных элементов выбирается максимально приближенным по форме и направлению к семейству линий локализации. В ходе решения задачи в зависимости от критерия распространения линий и условий на них сетка может корректироваться.

Важной особенностью начальной сетки конечных элементов является то, что все ее узлы двойные. Это позволяет располагать на ней разрезы не только вдоль любого семейства, но и одновременно вдоль нескольких семейств линий сетки. Нумерация узлов сетки оптимизируется с целью уменьшения объема используемых в программе структур данных, при этом учитывается расположение разрезов. Расстояния между разрезами ограничиваются снизу только размерами элементов. Поэтому число линий сдвига и расстояние между ними в системе могут быть произвольными.

Для реализации в рамках метода конечных элементов нестандартных краевых условий используются свойства линейности системы конечных элементов на каждом шаге нагружения. Разработанный алгоритм позволяет решать задачи, в которых на границе заданы функциональные зависимости между неизвестными напряжениями и перемещениями.

Наряду с симплекс-элементами рассматриваются кубические эрмитовы конечные элементы. В узлах эрмитовых конечных элементов искомой считается вектор-функция приращений перемещений и их производных. Это позволяет повышать точность вычисления компонент тензора напряжений в точках расчетной сетки в условиях распространения линии сдвига. Система уравнений метода конечных элементов выводится на основе принципа минимума потенциальной энергии.

Для численного решения разработан пакет программ, включающий программы генерации проблемно-ориентированных сеток с двойными узлами, построения матриц жесткости для различных моделей и реализации условий на разрезах, в силу которых внутри непрерывной области могут возникать разрывы, а также программы получения полей перемещений и напряжений и визуализации картины деформирования.

Получены решения конкретных задач о деформировании материала в условиях локализации сдвигов на системах логарифмических спиралей в окрестности круглого отверстия [7], на системах овалов Кассини [8], на системах прямых линий при простом сдвиге и других задач [9].

Аналитическое исследование задачи о трещинах сдвига в кольце. Рассмотрим упругое кольцо ($1 \leqslant r \leqslant R$) с n трещинами сдвига, представленными в виде разрезов, расположенных вдоль кривых $\xi = (2m-1)\alpha$ ($\alpha = \pi/n$; $m = 1, \ldots, n$; $n \in N$; $R = \mathrm{const}$). Данные кривые выберем в виде логарифмических спиралей $\xi = \theta - \mu \ln r$, пересекающих радиусы под углом $\pi/4 + \phi/2$, где $\mu = \operatorname{tg}(\pi/4 + \phi/2)$; $\phi = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \phi < \pi/2$; r, θ — полярные координаты. Наряду с численным анализом представляет интерес аналитическое исследование данной задачи.

Линейно-упругое поведение материала в отсутствие массовых сил в плоском случае позволяет выразить напряжения через бигармоническую функцию напряжений [4].

Для сдвиговых трещин на берегах разрезов должны выполняться условия непрерывности нормального перемещения и вектора напряжений, действующего на касательной площадке. В связи с этим поставим следующую задачу: найти такое напряженно-деформированное состояние в исследуемой области, чтобы указанные нормальное перемещение и вектор напряжений были непрерывными периодическими функциями переменной ξ с периодом 2α. В этом случае достаточно получить напряженно-деформированное состояние упругого материала в области, ограниченной кривыми $\xi = \pm\alpha$, $r = 1$, $r = R$, а затем периодически продолжить его на все кольцо.

Поставим задачу нахождения в исследуемой области бигармонических функций напряжений в классе функций вида

$$U_k = r^{2k+2}\Phi_k(\xi).$$

Подставив искомые функции в бигармоническое уравнение

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\Big)\Big(\frac{\partial^2 U_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U_k}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 U_k}{\partial \theta^2}\Big) = 0,$$

для функций $\Phi_k(\xi)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$(\mu^2+1)^2\frac{d^4\Phi_k}{d\xi^4} - 4\mu(\mu^2+1)^2(2k+1)\,\frac{d^3\Phi_k}{d\xi^3} + 4(\mu^2(6k^2+6k+1)+2k^2+2k+1)\frac{d^2\Phi_k}{d\xi^2} - \\ - 16\mu k(2k+1)(k+1)\,\frac{d\Phi_k}{d\xi} + 16k^2(k+1)^2\Phi_k = 0.$$

Фундаментальные системы решений данного уравнения в зависимости от k имеют следующий вид:

— при $k=-1$

$$1, \qquad \xi, \qquad \exp\Big(-\frac{2(\mu+i)\xi}{\mu^2+1}\Big), \qquad \exp\Big(-\frac{2(\mu-i)\xi}{\mu^2+1}\Big);$$

— при $k=0$

$$1, \qquad \xi, \qquad \exp\Big(\frac{2(\mu+i)\xi}{\mu^2+1}\Big), \qquad \exp\Big(\frac{2(\mu-i)\xi}{\mu^2+1}\Big);$$

— при $k\neq -1, 0$

$$\exp\Big(\frac{2k(\mu+i)\xi}{\mu^2+1}\Big), \qquad \exp\Big(\frac{2k(\mu-i)\xi}{\mu^2+1}\Big),$$
$$\exp\Big(\frac{2(k+1)(\mu+i)\xi}{\mu^2+1}\Big), \qquad \exp\Big(\frac{2(k+1)(\mu-i)\xi}{\mu^2+1}\Big).$$

Представим функцию напряжений через комплексные потенциалы $\varphi_k(z)$, $\chi_k(z)$ по формуле Гурса [4]

$$U_k = (\bar z\varphi_k(z) + z\overline{\varphi_k(z)} + \chi_k(z) + \overline{\chi_k(z)})/2, \tag{5}$$

где $z=x+iy=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$; $\bar z = x-iy = r\,\mathrm{e}^{-i\theta}$.

Комплексные потенциалы выбираем в следующем виде:

$$\varphi_{-1}(z) = (a_{-1}+ib_{-1})z^{\frac{2(\mu i-1)}{\mu^2+1}+1}, \quad \chi_{-1}(z) = (c_{-1}+id_{-1})(1+(\mu+i)\ln z) \quad (k=-1),$$
$$\varphi_0(z) = (a_0+ib_0)z(1+(\mu+i)\ln z), \qquad \chi_0(z) = (c_0+id_0)z^{\frac{2(1-\mu i)}{\mu^2+1}+1} \qquad (k=0),$$
$$\varphi_k(z) = (a_k+ib_k)z^{\frac{2k(1-\mu i)}{\mu^2+1}+1}, \qquad \chi_k(z) = (c_k+id_k)z^{\frac{2(k-1)(1-\mu i)}{\mu^2+1}+1} \qquad (k\neq -1,0),$$

где a_k, b_k, c_k, d_k — произвольные постоянные.

При $\phi=0$ логарифмические спирали, вдоль которых расположены трещины, составляют с радиусом угол $\pi/4$ и, следовательно, $\mu=1$. Для этого случая напряжения и перемещения в полярных координатах для каждой функции U_k (5) находятся по формулам [4]

$$\sigma_r+\sigma_\theta = 2[\varphi_k'(z)+\overline{\varphi_k'(z)}], \qquad \sigma_\theta-\sigma_r+2i\sigma_{r\theta} = 2\,\mathrm{e}^{2i\theta}[\bar z\varphi_k''(z)+\chi_k''(z)],$$
$$2G(u_r+iu_\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta}[\text{æ}\varphi_k(z) - z\overline{\varphi_k'(z)} - \overline{\chi_k'(z)}],$$

где $G=E/(2(1+\nu))$; $\text{æ}=3-4\nu$.

При $k\neq -1,0$ компоненты тензора напряжений получаем в виде

$$\sigma_r = r^{2k}\,\mathrm{e}^{k\xi}\{[a_k(2+k)+b_kk(1-2k)]\cos k\xi + [a_kk(1-2k)-b_k(2+k)]\sin k\xi\} + \\ + r^{2k}\,\mathrm{e}^{(k+1)\xi}(k+1)\{[c_k-d_k(1+2k)]\cos(k+1)\xi - [c_k(1+2k)+d_k]\sin(k+1)\xi\},$$

$$\sigma_\theta = r^{2k}\,\mathrm{e}^{k\xi}\{[a_k(2+3k)+b_kk(3+2k)]\cos k\xi + [a_kk(3+2k)-b_k(2+3k)]\sin k\xi\} +$$
$$+ r^{2k}\,\mathrm{e}^{(k+1)\xi}(k+1)\{[d_k(1+2k)-c_k]\cos(k+1)\xi + [c_k(1+2k)+d_k]\sin(k+1)\xi\},$$
$$\sigma_{r\theta} = r^{2k}\,\mathrm{e}^{k\xi}\,k\{[b_k-a_k(1+2k)]\cos k\xi + [a_k+b_k(1+2k)]\sin k\xi\} -$$
$$- r^{2k}\,\mathrm{e}^{(k+1)\xi}(k+1)\{[c_k(1+2k)+d_k]\cos(k+1)\xi + [c_k-d_k(1+2k)]\sin(k+1)\xi\},$$

а компоненты вектора перемещений — в виде

$$u_r = r^{2k+1}\,\mathrm{e}^{k\xi}\{[a_k(\text{æ}-k-1)-b_kk]\cos k\xi + [b_k(k-\text{æ}+1)-a_kk]\sin k\xi\}/(2G) -$$
$$- r^{2k+1}\,\mathrm{e}^{(k+1)\xi}(k+1)[(c_k+d_k)\cos(k+1)\xi + (c_k-d_k)\sin(k+1)\xi]/(2G),$$
$$u_\theta = r^{2k+1}\,\mathrm{e}^{k\xi}\{[b_k(\text{æ}+k+1)-a_kk]\cos k\xi + [a_k(\text{æ}+k+1)+b_kk]\sin k\xi\}/(2G) +$$
$$+ r^{2k+1}\,\mathrm{e}^{(k+1)\xi}(k+1)[(d_k-c_k)\cos(k+1)\xi + (c_k+d_k)\sin(k+1)\xi]/(2G).$$

Рассмотрим условия равенства значений вектора напряжений и нормальной компоненты вектора перемещений на линиях $\xi = \pm\alpha$ при любых фиксированных r. Предположим, что для каждого k разность значений касательного перемещения при $\xi = \pm\alpha$ равна $r^{2k+1}\sqrt{2}(\text{æ}+1)V_k/G$. Решая полученную систему четырех уравнений, находим

$$a_k = V_k\,\frac{\cos k\alpha\,\mathrm{sh}\,k\alpha + \sin k\alpha\,\mathrm{ch}\,k\alpha}{\cos^2 k\alpha\,\mathrm{sh}^2\,k\alpha + \sin^2 k\alpha\,\mathrm{ch}^2\,k\alpha}, \qquad b_k = V_k\,\frac{\cos k\alpha\,\mathrm{sh}\,k\alpha - \sin k\alpha\,\mathrm{ch}\,k\alpha}{\cos^2 k\alpha\,\mathrm{sh}^2\,k\alpha + \sin^2 k\alpha\,\mathrm{ch}^2\,k\alpha},$$
$$c_k = -V_k\,\frac{\cos(k+1)\alpha\,\mathrm{sh}\,(k+1)\alpha + \sin(k+1)\alpha\,\mathrm{ch}\,(k+1)\alpha}{\cos^2(k+1)\alpha\,\mathrm{sh}^2\,(k+1)\alpha + \sin^2(k+1)\alpha\,\mathrm{ch}^2\,(k+1)\alpha},$$
$$d_k = -V_k\,\frac{\cos(k+1)\alpha\,\mathrm{sh}\,(k+1)\alpha - \sin(k+1)\alpha\,\mathrm{ch}\,(k+1)\alpha}{\cos^2(k+1)\alpha\,\mathrm{sh}^2\,(k+1)\alpha + \sin^2(k+1)\alpha\,\mathrm{ch}^2\,(k+1)\alpha}.$$

Таким образом, четыре условия на двух границах $\xi = \pm\alpha$ определяют для каждого $k \neq -1, 0$ все константы в функции U_k.

По аналогии с классической задачей об изгибе кругового бруса [4] ограничимся заданием на остальных частях границы (дугах окружностей) главного вектора и главного момента усилий. Согласно принципу Сен-Венана такое задание краевых условий допустимо, если R достаточно велико и α относительно мало.

В случае $k = 0$ компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_r = -2(a_0+b_0)\theta + (a_0-b_0)\ln r + 3a_0 - b_0 + \mathrm{e}^{\xi}[(c_0-d_0)\cos\xi - (c_0+d_0)\sin\xi],$$
$$\sigma_\theta = -2(a_0+b_0)\theta + (a_0-b_0)\ln r + 5a_0 - 3b_0 + \mathrm{e}^{\xi}[(d_0-c_0)\cos\xi + (c_0+d_0)\sin\xi],$$
$$\sigma_{r\theta} = -\,\mathrm{e}^{\xi}[(c_0+d_0)\cos\xi + (c_0-d_0)\sin\xi] + a_0 + b_0,$$

а компоненты вектора перемещений — вид

$$u_r = r\{(1-\text{æ})[(a_0+b_0)\theta + (b_0-a_0)\ln r - a_0] + b_0 - a_0\}/(2G) -$$
$$- r\,\mathrm{e}^{\xi}[(c_0+d_0)\cos\xi - (d_0-c_0)\sin\xi]/(2G),$$
$$u_\theta = r\{(1+\text{æ})[(a_0-b_0)\theta + (b_0+a_0)\ln r + b_0] + b_0 + a_0\}/(2G) +$$
$$+ r\,\mathrm{e}^{\xi}[(d_0-c_0)\cos\xi + (c_0+d_0)\sin\xi]/(2G).$$

В случае $k = -1$ имеем компоненты тензора напряжений

$$\sigma_r = r^{-2}\{\mathrm{e}^{-\xi}[(a_{-1}-3b_{-1})\cos\xi + (3a_{-1}+b_{-1})\sin\xi] + c_{-1} - d_{-1}\},$$

$$\sigma_\theta = -r^{-2}\{\mathrm{e}^{-\xi}[(a_{-1}+b_{-1})\cos\xi - (a_{-1}-b_{-1})\sin\xi] + c_{-1} - d_{-1}\},$$
$$\sigma_{r\theta} = -r^{-2}\{\mathrm{e}^{-\xi}[(b_{-1}+a_{-1})\cos\xi - (a_{-1}-b_{-1})\sin\xi] + c_{-1} + d_{-1}\}$$

и компоненты вектора перемещений

$$u_r = \mathrm{e}^{-\xi}[(a_{-1}æ + b_{-1})\cos\xi + (b_{-1}æ - a_{-1})\sin\xi]/(2Gr) - (c_{-1}-d_{-1})/(2Gr),$$
$$u_\theta = \mathrm{e}^{-\xi}[(b_{-1}æ + a_{-1})\cos\xi - (a_{-1}æ - b_{-1})\sin\xi]/(2Gr) - (c_{-1}+d_{-1})/(2Gr).$$

В каждом из этих двух случаев также можно задавать значения разности касательных перемещений и равенство значений соответствующих компонент вектора напряжений и нормальных компонент вектора перемещений на линиях $\xi = \pm\alpha$ при любых r.

Таким образом, при задании функции разрыва касательных перемещений на трещинах в виде $\dfrac{\sqrt{2}(æ+1)}{G}\sum\limits_k V_k r^{2k+1}$ функция напряжений для исследуемой задачи может быть представлена как $\sum\limits_k U_k$.

Вместо условия заданного разрыва касательных перемещений на линиях $\xi = \pm\alpha$ можно рассматривать условия вида (3) или (4). В работе [10] предполагалось, что вдоль трещин происходит скольжение с постоянным касательным напряжением τ^*. Для функции напряжений, построенной с использованием U_0 и U_{-1}, получено решение, которое при $\alpha \to 0$ совпадает с классическим идеально пластическим решением [1] при условии равенства максимального касательного напряжения постоянному значению τ^* во всей области деформирования. Рассматриваемые трещины сдвига в этом предельном случае имеют смысл линий скольжения для континуальной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Надаи А.** Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Мир, 1969.
2. **Ревуженко А. Ф.** Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000.
3. **Турчанинов И. А., Иофис М. А., Каспарьян Э. В.** Основы механики горных пород. Л.: Недра. Ленингр. отд-ние, 1989.
4. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
5. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды: В 2 т. М.: Наука, 1973.
6. **Норри Д., де Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов. М.: Мир, 1981.
7. **Бушманова О. П., Ревуженко А. Ф.** О пластическом деформировании в условиях локализации сдвигов на дискретной системе линий // Физ. мезомеханика. 2002. Т. 5, № 3. С. 9–16.
8. **Бушманова О. П.** Численное моделирование локализации сдвигов // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6. С. 154–158. Спецвыпуск. Ч. 2.
9. **Бушманова О. П.** Применение метода конечных элементов для моделирования линий разрыва в упругопластических задачах // Тр. XVI Межресп. конф. “Численные методы решения задач теории упругости и пластичности”, Новосибирск, 6–8 июля 1999 г. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. С. 46–50.
10. **Бушманова О. П.** Аналитическое исследование задачи о криволинейных сдвиговых трещинах в упругом кольце // Изв. Алт. гос. ун-та. 2002. № 1. С. 32–35.

Поступила в редакцию 24/III 2003 г.