

AMS subject classification: 65L10, 65L12

Численные методы, равномерно сходящиеся относительно параметра для одного класса параметризованных сингулярно возмущенных задач*

Д. Шакти, Дж. Мохапатра

Department of Mathematics, National Institute of Technology Rourkela, 769008, India

E-mails: 514ma6002@nitrkl.ac.in (Д. Шакти), jugal@nitrkl.ac.in (Дж. Мохапатра)

Шакти Д., Мохапатра Дж. Численные методы, равномерно сходящиеся относительно параметра для одного класса параметризованных сингулярно возмущенных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 2. — С. 213–228.

В данной статье для решения класса параметризованных сингулярно возмущенных задач (СВЗ) предложена взвешенная конечно-разностная схема. В зависимости от выбора весового параметра схема автоматически преобразуется из обратной схемы Эйлера в монотонную гибридную схему. Рассматриваются три вида неоднородных сеток: стандартная сетка Шишкина (S-сетка), сетка Бахвалова–Шишкина (B–S-сетка) и адаптивная сетка. Показана равномерная сходимость этих методов по отношению к параметру возмущения для всех трех видов сеток. Скорость сходимости имеет первый порядок для обратной схемы Эйлера и второй порядок для монотонной гибридной схемы. Кроме того, предлагаемый метод обобщается для параметризованной задачи с граничными условиями смешанного типа и показана его равномерная сходимость. Приводятся результаты численных экспериментов для демонстрации эффективности предлагаемых схем, которые свидетельствуют об оптимальности оценок.

DOI: 10.15372/SJNM20190207

Ключевые слова: параметризованная задача, сингулярные возмущения, граничный слой, обратный метод Эйлера, монотонная гибридная схема.

Shakti D., Mohapatra J. Parameter-uniform numerical methods for a class of parameterized singular perturbation problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 213–228.

In this article, a weighted finite difference scheme is proposed for solving a class of parameterized singularly perturbed problems (SPPs). Depending upon the choice of the weight parameter, the scheme is automatically transformed from the backward Euler scheme to a monotone hybrid scheme. Three kinds of nonuniform grids are considered: a standard Shishkin mesh, a Bakhvalov–Shishkin mesh, and an adaptive grid. The methods are shown to be uniformly convergent with respect to the perturbation parameter for all three types of meshes. The rate of convergence is of first order for the backward Euler scheme and of second order for the monotone hybrid scheme. Furthermore, the proposed method is extended to a parameterized problem with mixed type boundary conditions and is shown to be uniformly convergent. Numerical experiments are carried out to show the efficiency of the proposed schemes, which indicate that the estimates are optimal.

Keywords: parameterized problem, singular perturbation, boundary layer, backward Euler method, monotone hybrid scheme.

*Работа выполнена при поддержке Департамента науки и технологии (DST) Правительства Индии (стипендия IF 150650), Совета по научным и промышленным исследованиям (CSIR) Правительства Индии (проект № 25(0231)/14/EMR-II).

1. Введение

Нелинейные дифференциальные уравнения играют важную роль в моделировании многих физических явлений. Большинство моделей, таких как модель “хищник–жертва”, модели эпидемий малярии и т. д., основаны на нелинейных дифференциальных уравнениях. Дифференциальное уравнение с нелинейностью — это всегда сложная задача для исследователей. Эта задача еще более усложняется, если модель является сингулярно возмущенной. Это означает, что очень малый параметр, известный как параметр сингулярных возмущений, умножается на производную самого высокого порядка. Известно, что случаи сингулярных возмущений сильно отличаются от обычных случаев вследствие многомасштабного поведения решения. Решение быстро меняется в некоторой части области, известной как область пограничного слоя, и имеет обычное поведение в остальной части, известной как внешняя область. Для решения нелинейного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения необходимо учитывать нелинейность и “сингулярно возмущенный” характер задачи. Более подробную информацию можно найти в книгах [9, 17, 18, 20, 24] и имеющихся в них ссылках.

Рассмотрим следующую нелинейную сингулярно возмущенную краевую задачу (КЗ), зависящую от некоторого параметра:

$$\begin{cases} Tu \equiv \varepsilon u'(x) + f(x, u, \lambda) = 0, & x \in \Omega = (0, 1], \\ u(0) = s_0, & u(1) = s_1, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, известный как параметр сингулярных возмущений, λ — контрольный параметр, s_0, s_1 — заданные постоянные. Функция $f(x, u, \lambda)$ предполагается достаточно гладкой, и она удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{cases} f(x, u, \lambda) \in C^3([0, 1] \times \mathbb{R}^2), \\ 0 < \alpha \leq \frac{\partial f}{\partial u} \leq \alpha^* < \infty, & (x, u, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2, \\ 0 < m \leq \left| \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right| \leq M < \infty, & (x, u, \lambda) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1.2)$$

При этих предположениях краевая задача (1.1) имеет единственное решение с пограничным слоем шириной $O(\varepsilon)$ около $x = 0$ (см. [1, 22, 23]). Параметр λ не связан с собственным значением нелинейного дифференциального уравнения. Поскольку имеются две неизвестные, для точного определения в (1.1) даны два граничных условия.

Параметризованные краевые задачи уже много лет изучаются многими исследователями. Существование и единственность решения КЗ (1.1) впервые рассматривались Поменталем [22]. В этой статье рассматривался обычный случай. Затем Фекан [10] расширил его для обобщенного класса параметризованных СВЗ. Монотонный итерационный метод для невозмущенных параметризованных задач был построен в [11, 15]. Амиралиев с соавторами [1] разработали однородный конечно-разностный метод на стандартной сетке Шишкина [9] для КЗ (1.1) и показали, что этот метод имеет первый порядок сходимости с точностью до логарифмического множителя, т. е. порядок $O(N^{-1} \ln N)$. В работе Сена [5] рассмотрена гибридная разностная схема, объединяющая противоточковую схему на грубой сетке со схемой средней точки на мелкой сетке. Метод коррекции пограничного слоя использовался для решения КЗ (1.1) в [27]. Методология на основе метода гомотопического анализа для аппроксимации аналитического решения была разработана Тюркильмазоглы [26]. Однако большинство этих методов разработано на сетках Шишкина, для которых необходимо иметь априорную информацию о ширине и расположении

пограничных слоев. Есть еще один вид неоднородной сетки, известный как адаптивная сетка, которая генерируется с использованием принципа равномерного распределения таким образом, что она автоматически определяет погранслои, преодолевая недостаток сеток Шишкина.

В данной статье мы предлагаем взвешенную конечно-разностную схему на неоднородных сетках обоих типов. Предлагаемый метод равномерно сходится с первым и вторым порядками в зависимости от выбора параметров схемы. В [5] разработана гибридная конечно-разностная схема, объединяющая схему средней точки в области слоя и противопотоковую схему во внешней области для параметризованной КЗ. Однако у этой схемы есть недостаток: необходимо иметь *априорную* информацию о расположении внутренней и внешней областей. В то же самое время для схемы, предлагаемой в данной статье, при надлежащем выборе параметров схемы мы разработали монотонную гибридную схему, для которой априорная информация не нужна. Автоматический “переход” от схемы средней точки к противопотоковой схеме будет иметь место тогда, когда мелкая сетка преобразуется в грубую. Таким образом, мы получаем преимущество без недостатков, обсуждавшихся выше.

Статья построена следующим образом: в пункте 2 описаны теоретические свойства КЗ (1.1); п. 3 посвящен конструированию взвешенной конечно-разностной схемы; получение неоднородных сеток обсуждается в п. 4; в п. 5 проанализирована равномерная сходимость схемы и получены теоретические оценки ошибки, т.е. ε -однородная оценка схемы. Для подтверждения теоретических результатов в п. 6 выполнены численные эксперименты для некоторых нелинейных тестовых задач и представлены результаты в виде таблиц и рисунков. Идея предлагаемого метода также используется для параметризованных краевых задач с граничными условиями Робина.

Обозначения: во всей статье C обозначает общую положительную постоянную, не зависящую ни от параметра возмущения ε , ни от параметра сетки N , которая может принимать различные значения в различных местах; $\|\gamma\| = \max |\gamma(x)|$, $\gamma \in C([0, 1])$, и $g_i = g(x_i)$.

2. Аналитические результаты

Следующие две леммы дают идею о существовании и границах решения и его производной.

Лемма 2.1. КЗ (1.1) имеет единственное решение $\{u(x), \lambda\} \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R})$.

Доказательство дано в [27, теорема 2.1].

Лемма 2.2. Решение $\{u(x), \lambda\}$ КЗ (1.1) удовлетворяет следующим неравенствам:

$$|\lambda| \leq C, \quad |u^k(x)| \leq C \left\{ 1 + \varepsilon^{-k} \exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right) \right\}, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Доказательство дано в [1, лемма 1] для $k = 0, 1$. Эти же аргументы можно использовать для $k = 2, 3$.

3. Численные схемы

Рассмотрим произвольную неравномерную сетку $\Omega^N := \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1\}$. Обозначим $h_i = x_i - x_{i-1}$ для $i = 1, \dots, N$ и $g_{\sigma,i} = \sigma_i g_i + (1 - \sigma_i) g_{i-1}$ для любой функции

сетки $\{g_i\}_{i=0}^N$. Тогда взвешенная конечно-разностная схема имеет следующий вид: найти $\{U_i^N, \lambda^N\}_{i=0}^N$ такое, что

$$\begin{cases} T^N U_i^N \equiv \varepsilon \frac{U_i^N - U_{i-1}^N}{h_i} + f(x_{\sigma,i}, U_{\sigma,i}^N, \lambda^N) = 0, & i = 1, 2, \dots, N, \\ U_0^N = s_0, \quad U_N^N = s_1. \end{cases} \quad (3.1)$$

У нас есть два различных выбора для σ_i . Первый выбор σ_i :

$$\sigma_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

а второй выбор —

$$\sigma_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \frac{\varepsilon}{h_i \alpha^*} \geq \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{если } \frac{\varepsilon}{h_i \alpha^*} < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Если мы возьмем σ_i в том виде, как оно определено в (3.2), то схема является обратной схемой Эйлера. Для выбора (3.3) мы имеем монотонную гибридную схему. Эта гибридная схема представляет собой подходящую комбинацию схемы средней точки и противопотоковой схемы. Ранее, в статье [5], этот переход был резким, однако схема, предлагаемая в данной работе, предполагает постепенный переход от схемы средней точки к противопотоковой схеме по мере того, как мелкая сетка переходит в грубую. Для $\sigma_i = 1/2$ мы снова используем разностную схему средней точки, тогда как для $\sigma_i = 1$ получается противопотоковая схема. Выберем σ_i таким образом, чтобы полученная в результате схема удовлетворяла дискретному принципу максимума и обеспечивала точность второго порядка.

4. Построение сетки

4.1. Сетки Шишкина

Мы используем сетку Шишкина, определяемую следующим образом: $x_i = x(t_i)$, $t_i = \frac{i}{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$, где функция сетки имеет вид

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\tau_0 \varepsilon}{\alpha} \phi(t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - 2 \left(1 - \frac{\tau_0 \varepsilon}{\alpha} \ln N\right) (1 - t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

здесь параметр дискретизации N — четное целое число и $\tau_0 \geq 1$. Точка перехода $\tau = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\tau_0 \varepsilon}{\alpha} \ln N \right\}$ берется в виде $\frac{\tau_0 \varepsilon}{\alpha} \ln N$, а ϕ — кусочно дифференцируемая и монотонно возрастающая функция, такая что $\phi(0) = 0$ и $\phi(1/2) = \ln N$. Теперь функция генерации сетки для получения сеток Шишкина имеет следующий вид:

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{(-2 \ln N)t} & \text{(S-сетка),} \\ 1 - 2(1 - N^{-1})t & \text{(B-S-сетка),} \end{cases} \quad (4.2)$$

где ψ — монотонно убывающая функция, тесно связанная с ϕ ($\phi = -\ln \psi$) и удовлетворяющая условиям: $\psi(0) = 1$, $\psi(1/2) = N^{-1}$.

Лемма 4.1. Для кусочно дифференцируемой функции генерации сетки ϕ , удовлетворяющей условию

$$\max_{[0,1/2]} \phi'(x) = \max_{[0,1/2]} \frac{|\psi'|}{\psi} \leq CN,$$

верно следующее неравенство:

$$\max_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{\alpha x}{k\varepsilon}\right)\right) dx \leq C \left\{ \varepsilon + (N^{-1} + N^{-\tau_0/k}) \max_{x \in [0,1/2]} |\psi'(x)| \right\}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0,1/2]} |\psi'(x)| &\leq C && \text{(B-S-сетка),} \\ \max_{x \in [0,1/2]} |\psi'(x)| &\leq C \ln N && \text{(S-сетка).} \end{aligned}$$

Доказательство можно найти в [16].

4.2. Адаптивная сетка

Особым подходом к генерации неоднородной сетки является идея адаптивной сетки. Адаптивная сетка основана на принципе равномерного распределения. Считается, что сетка Ω^N является равномерно распределенной, если

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} M(u(s), s) ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} M(u(s), s) ds, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.4)$$

где $M(u(x), x)$ — произвольная неотрицательная функция, определенная на $[0, 1]$ и известная как функция контроля. В эквивалентном виде (4.4) можно записать как

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} M(u(s), s) ds = \frac{1}{N} \int_0^1 M(u(s), s) ds, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.5)$$

Здесь в качестве функции контроля мы используем

$$M(u(x), x) = 1 + |u''(x)|^{1/2}. \quad (4.6)$$

Реализация разностной схемы с использованием метода адаптивной сетки состоит из двух этапов: сначала адаптивная сетка генерируется с использованием алгоритма генерации сетки, а затем на сгенерированной неоднородной сетке вычисляется разностная аппроксимация. Адаптивная сетка была сконструирована Коптевой и Стайнсом [13] для решения квазилинейной одномерной задачи конвекции–диффузии. В [19] был разработан противопотоковый метод для решения задачи конвекции–диффузии на адаптивной сетке. Чен [8] проанализировал равномерную сходимость конечно-разностной аппроксимации для СВЗ на адаптивной сетке. Идея равномерного распределения сетки использовалась для аппроксимации глобального решения и глобального нормализованного потока с использованием противопотоковой схемы в [21]. Бекетт и Макензи [3] доказали равномерную сходимость конечно-разностной аппроксимации для СВЗ на адаптивной сетке. Стратегия адаптивной сетки использовалась для решения системы задач реакции–диффузии в [7].

Мы используем известный алгоритм де Бура [4, 28] (также применяемый многими исследователями [7, 8, 13, 17, 19, 21]) для генерации подходящей неоднородной сетки

для решения параметризованной КЗ (1.1). В работе [13] Коптева и Стайнс установили сходимость адаптивного алгоритма с использованием кусочно-линейного интерполянта вычисленного решения. В [28] Ксу с соавторами доказали сходимость алгоритма де Бура для генерации равно распределенных сеток с кусочно-постоянной интерполяцией.

Алгоритм генерации адаптивных сеток.

Шаг 1. Считаем начальную сетку $\{x_i^{(0)} : 0, 1/N, 2/N, \dots, 1\}$ однородной сеткой.

Шаг 2. Для $k = 0, 1, \dots$, предполагая, что сетка $\{x_i^{(k)}\}$ дана, вычисляем решение из дискретной задачи.

Шаг 3. Находим дискретизированную функцию контроля $M_i^{(k)} = 1 + |\bar{D}^2 U_i^{(k)}|^{1/2}$, где $D^+ U_i^{(k)} = \frac{U_{i+1}^{(k)} - U_i^{(k)}}{x_{i+1}^{(k)} - x_i^{(k)}}$, $D^- U_i^{(k)} = \frac{U_i^{(k)} - U_{i-1}^{(k)}}{x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}}$ и $\bar{D}^2 = D^+ D^-$. Вычислим $l_i^{(k)} = h_i^{(k)} \left(\frac{M_{i-1}^{(k)} + M_i^{(k)}}{2} \right)$ для $i = 1, \dots, N$ и положим $M_0^{(k)} = M_1^{(k)}$, $M_N^{(k)} = M_{N-1}^{(k)}$. Обозначим $L_0^{(k)} = 0$ и $L_i^{(k)} := \sum_{j=1}^i l_j^{(k)}$.

Шаг 4. Пусть C_0 — выбранная пользователем постоянная, такая что $C_0 > 1$. Если $\frac{\max l_i^{(k)}}{L_N^{(k)}} \leq \frac{C_0}{N}$, то идем на шаг 6, в противном случае идем на шаг 5.

Шаг 5. Положим $Y_i^{(k)} = iL_N^{(k)}/N$ для $i = 0, 1, \dots, N$. Интерполируем точки $(Y_i^{(k)}, x_i^{(k+1)})$ до $(L_i^{(k)}, x_i^{(k)})$ с использованием кусочной интерполяции. Теперь, вычисляя эту интерполяцию для $i = 0, 1, \dots, N$, сгенерируем новую сетку $\{x_i^{(k+1)}\}$.

Шаг 6. Положим $x_i^{(k+1)}$ в качестве конечной сетки и вычислим численную аппроксимацию на конечной сетке. Останов.

5. Анализ сходимости

Для получения сходимости взвешенной разностной схемы обозначим $z_i^N = U_i^N - u_i$ и $\mu^N = \lambda^N - \lambda$, которое является решением следующей дискретной задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{z_i^N - z_{i-1}^N}{h_i} + f(x_{\sigma,i}, U_{\sigma,i}^N, \lambda^N) - f(x_{\sigma,i}, u_{\sigma,i}, \lambda) = \varepsilon \left(u'_{\sigma,i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right), \\ z_0^N = z_N^N = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Для $i = 1, 2, \dots, N$ используем разложение Тейлора функции f около $(x_{\sigma,i}, u_{\sigma,i}, \lambda)$, чтобы получить

$$L^N z_i^N \equiv \varepsilon \frac{z_i^N - z_{i-1}^N}{h_i} + a_i \sigma_i z_i^N + a_i (1 - \sigma_i) z_{i-1}^N = b_i \mu^N + R_i, \quad (5.2)$$

где

$$\begin{cases} a_i = \frac{\partial}{\partial u} f(x_{\sigma,i}, u_{\sigma,i} + \rho \xi_i, \lambda + \rho \mu^N), \\ b_i = \frac{\partial}{\partial \lambda} f(x_{\sigma,i}, u_{\sigma,i} + \rho \xi_i, \lambda + \rho \mu^N). \end{cases} \quad (5.3)$$

Здесь $1/2 \leq \sigma_i \leq 1$, $\xi_i = (\sigma_i U_i^N + (1 - \sigma_i) U_{i-1}^N) - u_{\sigma,i}$, $0 < \rho < 1$ и для $\sigma_i = 1$: $R_i = \varepsilon \left(u'_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right)$, для $\sigma_i = 1/2$: $R_i = \varepsilon \left(u'_{i-1/2} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) + a_i \left(u_{i-1/2} - \frac{u_{i-1} + u_i}{2} \right)$.

Легко убедиться в том, что матрица, связанная с L^N , есть M -матрица. Следовательно, мы имеем дискретный принцип максимума, состоящий в следующем: если $\{v_i\}_0^N$ и $\{w_i\}_0^N$ — сеточные функции, удовлетворяющие условиям: $v_0 \geq w_0$, $v_N \geq w_N$ и $L^N v_i \geq L^N w_i$ для $i = 0, \dots, N-1$, то $v_i \geq w_i$ для всех i .

Лемма 5.1. Для пары $\{z_i^N, \mu^N\}$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{cases} |\mu^N| \leq m^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|, \\ \max_i |z_i^N| \leq (1 + m^{-1} M) \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|. \end{cases} \quad (5.4)$$

Доказательство. Из (5.2) мы имеем

$$z_i^N = \left(\frac{\varepsilon}{h_i} + a_i \sigma_i \right)^{-1} \left[\left(\frac{\varepsilon}{h_i} - a_i (1 - \sigma_i) \right) z_{i-1}^N + b_i \mu^N + R_i \right]. \quad (5.5)$$

Решив приведенное выше разностное уравнение с граничным условием $z_i^N = 0$, получим

$$z_i^N = \sum_{k=1}^i \left(\frac{b_k \mu^N + R_k}{\varepsilon/h_k + a_k \sigma_k} \right) W_{i,k}^\sigma, \quad (5.6)$$

где

$$W_{i,k}^\sigma = \begin{cases} 1, & i = k, \\ \prod_{j=k+1}^i \frac{\varepsilon/h_j - a_j (1 - \sigma_j)}{\varepsilon/h_j + \sigma_j a_j}, & i \neq k. \end{cases} \quad (5.7)$$

Для $i = N$, учитывая, что $z_N^N = 0$, получим

$$\mu^N = \left[\sum_{k=1}^N \frac{b_k W_{N,k}^\sigma}{\varepsilon/h_k + a_k \sigma_k} \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \frac{R_k W_{N,k}^\sigma}{\varepsilon/h_k + a_k \sigma_k} \right]. \quad (5.8)$$

Поскольку $(\varepsilon/h_i + a_i \sigma_i) > 0$ для $1 \leq i \leq N$, то

$$\begin{aligned} |\mu^N| &\leq m^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \frac{W_{N,k}^\sigma}{\varepsilon/h_k + a_k \sigma_k} \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N \frac{W_{N,k}^\sigma}{\varepsilon/h_k + a_k \sigma_k} \right] \max_{1 \leq i \leq N} |R_i| \\ &\leq m^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Наконец, используя дискретный принцип максимума для разностного оператора $L^N z_i^N$, получим

$$\max_i |z_i^N| \leq (1 + m^{-1} M) \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|, \quad (5.10)$$

что завершает доказательство. \square

5.1. Сходимость для схемы первого порядка

Лемма 5.2. При предположении (1.2) ошибка усечения R_i разностной схемы (3.1), (3.2) удовлетворяет

$$|R_i| \leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right)\right) dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.11)$$

Доказательство. Используя идею [12, 13, 21], имеем

$$R_i = -\frac{\varepsilon}{x_{i-1} - x_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) u''(x) dx.$$

Применив теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)| dx \leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f_x(x, u(x), \lambda) + f_u(x, u(x), \lambda) u'(x)| dx \\ &\leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 + |u'(x)|) dx. \end{aligned}$$

Из оценки, данной в лемме 2.2, мы имеем требуемое неравенство. \square

Теперь мы можем получить оценки ошибок для различных видов неоднородных сеток.

Теорема 5.1. Ошибка схемы при $\sigma_i = 1$ для $i = 1, 2, \dots, N$ для дискретизации (1.1) удовлетворяет

$$\begin{aligned} \max_i |u(x_i) - U_i^N| &< CN^{-1} \ln N, \quad |\lambda - \lambda^N| < CN^{-1} \ln N \quad (\text{на S-сетке}), \\ \max_i |u(x_i) - U_i^N| &< CN^{-1}, \quad |\lambda - \lambda^N| < CN^{-1} \quad (\text{на B-S-сетке}). \end{aligned}$$

Доказательство. Можно объединить лемму 4.1 и лемму 5.1 с оценкой (5.11) для получения желаемой оценки на сетках Шишкина. Для более подробной информации смотри также [1]. \square

Теорема 5.2. Ошибка схемы при $\sigma_i = 1$ для $i = 1, 2, \dots, N$ для дискретизации (1.1) на адаптивной сетке удовлетворяет

$$\max_i |u(x_i) - U_i^N| < CN^{-1}, \quad |\lambda - \lambda^N| < CN^{-1}.$$

Доказательство. Из доказательства леммы 5.2 имеем

$$|R_i| \leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 + |u'(x)|) dx. \quad (5.12)$$

Дифференцируя (1.1), получим

$$\varepsilon u''(x) + f_x(x, u(x), \lambda) + f_u(x, u(x), \lambda) u'(x) = 0. \quad (5.13)$$

Следовательно, из леммы 2.2 следует, что

$$|u'(x)| \leq C(1 + \varepsilon |u''(x)|).$$

Таким образом, из (5.12) имеем

$$|R_i| \leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 + \varepsilon |u''(x)|) dx. \quad (5.14)$$

Снова, используя (5.13), можем записать

$$|\varepsilon u''(x)| \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp \left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon} \right) \right).$$

Предполагая, что $u''(x) \neq 0$ и используя тот факт, что для любой положительной функции ω_j , $j = 1, \dots, n$, верно $\left(\sum_j^n \omega_j \right)^{1/2} = \sqrt{n} (\max_j (\omega_j))^{1/2}$, получим

$$|\varepsilon u''(x)|^{1/2} \leq C \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp \left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon} \right) \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} C \left(\max \left(1, \varepsilon^{-1} \exp \left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon} \right) \right) \right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\varepsilon |u''(x)|^{1/2} \leq C \sqrt{\varepsilon} \left(\max \left(1, \varepsilon^{-1} \exp \left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon} \right) \right) \right)^{1/2} \leq C,$$

что означает, что

$$\varepsilon |u''(x)| \leq C |u''(x)|^{1/2}.$$

Следовательно, из (5.14) мы получим

$$|R_i| \leq C \int_{x_{i-1}}^{x_i} (1 + |u''(x)|^{1/2}) dx = C \int_{x_{i-1}}^{x_i} M(u(x), x) dx = \frac{C}{N} \int_0^1 M(u(x), x) dx \leq CN^{-1}.$$

Используя это неравенство вместе с леммой 5.1, мы получим желаемую оценку на адаптивной сетке для схемы первого порядка. Аналогичные аргументы можно найти в [6]. \square

5.2. Сходимость для монотонной гибридной схемы второго порядка

Лемма 5.3. При предположении (1.2) ошибка усечения R_i разностной схемы (3.1), (3.3) удовлетворяет

$$|R_i| \leq C \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp \left(-\frac{\alpha x}{2\varepsilon} \right) \right) dx \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.15)$$

Доказательство. Из (3.3) мы имеем два выбора для σ_i . Для $\sigma_i = 1/2$ мы используем разложение Тейлора u и u' около x_i для получения оценки

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq \left| \varepsilon \left(u'_{i-1/2} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) \right| + \left| a_i \left(u_{i-1/2} - \frac{u_{i-1} + u_i}{2} \right) \right| \\ &\leq \frac{3\varepsilon}{2} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'''(x)(x - x_{i-1}) dx \right| + C \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x)(x - x_{i-1}) dx \right| \\ &\leq C_3 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \varepsilon^{-2} \exp \left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon} \right) \right) (x - x_{i-1}) dx. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Теперь для $\sigma_i = 1$ мы используем разложение Тейлора u около x_i для получения

$$|R_i| \leq \frac{C_4 \varepsilon}{(x_i - x_{i-1})} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x)(x - x_{i-1}) dx \right|. \quad (5.17)$$

Из (3.3), если $\sigma_i = 1$, то $\frac{\varepsilon}{\alpha^*(x_i - x_{i-1})} \leq \frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C_5 \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x)(x - x_{i-1}) dx \right| \\ &\leq C_5 \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right) \right) (x - x_{i-1}) dx. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Используя неравенство $\int_a^b \psi(t)(t - a)^{k-1} dt \leq \frac{1}{k} \left[\int_a^b \psi(t)^{1/k} dt \right]^k$ (см. [4]), которое верно для любой положительной монотонно убывающей функции g на $[a, b]$, мы получим

$$|R_i| \leq C \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{\alpha x}{2\varepsilon}\right) \right) dx \right]^2, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.19)$$

Это завершает доказательство. \square

Наконец, используя все приведенные выше результаты, сформулируем следующую теорему.

Теорема 5.3. *Ошибка схемы с весом σ_i , меняющимся от 1/2 до 1, для дискретизации (1.1) удовлетворяет*

$$\begin{aligned} \max_i |u(x_i) - U_i^N| &< CN^{-2} \ln^2 N, \quad |\lambda - \lambda^N| < CN^{-2} \ln^2 N \quad (\text{S-сетка}), \\ \max_i |u(x_i) - U_i^N| &< CN^{-2}, \quad |\lambda - \lambda^N| < CN^{-2} \quad (\text{B-S-сетка}). \end{aligned}$$

Доказательство. Оценка (5.15) вместе с леммами 4.1 и 5.1 дает желаемые оценки на сетках Шишкина. \square

Теорема 5.4. *Ошибка схемы с весом σ_i , меняющимся от 1/2 до 1, для дискретизации (1.1) на адаптивной сетке удовлетворяет*

$$\begin{aligned} \max_i |u(x_i) - U_i^N| &< C \max_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 \left(1 + |u''(x)|^{1/2} \right)^2, \\ |\lambda - \lambda^N| &< C \max_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 \left(1 + |u''(x)|^{1/2} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Доказательство. Для $\sigma_i = 1/2$ разложение в ряд Тейлора дает

$$\left(u'_{i-1/2} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) = \frac{h_i^2}{24} u'''(\eta_i)$$

для первого члена и

$$\left(u_{i-1/2} - \frac{u_{i-1} + u_i}{2} \right) = \frac{h_i^2}{4} u''(\xi_i)$$

для второго члена, где $\eta_i, \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Объединив эти результаты, мы получим

$$R_i = \frac{\varepsilon h_i^2}{24} u'''(\eta_i) + a_i \frac{h_i^2}{4} u''(\xi_i). \quad (5.21)$$

Снова для $\sigma_i = 1$ разложение Тейлора дает

$$R_i = \varepsilon \left(u'_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) = \frac{\varepsilon h_i}{2} u_{xx}(\zeta_i) = \frac{\varepsilon}{h_i} \left(\frac{h_i^2}{2} u''(\zeta_i) \right), \quad (5.22)$$

где $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Используя тот факт, что $\frac{\varepsilon}{h_i} \leq \frac{\alpha^*}{2}$ для $\sigma_i = 1$, и объединив (5.21) и (5.22), мы получим

$$\max_i |R_i| \leq C \left\{ \max_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 |\varepsilon u'''(x)| + \max_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 |u''(x)| \right\}. \quad (5.23)$$

Мы видим, что $|\varepsilon u'''(x)| \leq C(1 + |u''(x)|)$. Из вышеприведенного мы имеем

$$\max_i |R_i| \leq C \max_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 (1 + |u''(x)|) \leq \max_i \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} h_i^2 \left(1 + |u''(x)|^{1/2} \right)^2. \quad (5.24)$$

Объединив (5.24) с леммой 5.1, мы получим желаемые оценки. \square

Замечание. Для получения оптимального порядка сходимости необходимо построить сетку, которая может минимизировать правую часть (5.24). Ясно, что функция контроля (4.6) должна быть равномерной. Делается разумное предположение, которое показывает нам, что для дискретного аналога функции контроля (4.6) это верно, и даются точные оценки ошибки в вычисленном решении. Кроме того, принцип равномерного распределения на адаптивной сетке означает, что точность второго порядка достигается независимо от параметров. Для более подробной информации см. [7, 14].

6. Численные примеры

В данном пункте представлены результаты численных экспериментов для двух тестовых задач, показывающих применимость и эффективность представленного метода. Мы решаем нелинейную систему уравнений с использованием метода Ньютона при $\lambda^{N,(0)} = U_i^{N,(0)} = 1/2$ в качестве начального предположения и критерием останова $\|U^{N,(k)} - U^{N,(k-1)}\| \leq 10^{-5}$, $|\lambda^{N,(k)} - \lambda^{N,(k-1)}| \leq 10^{-5}$. Итеративно вычисляем $\{U^{N,(k)}, \lambda^{N,(k)}\}$ для $k = 1, 2, \dots$ как последовательную аппроксимацию для $\{U^N, \lambda^N\}$.

Пример 6.1. Рассмотрим параметризованную сингулярно возмущенную КЗ

$$\begin{cases} \varepsilon u'(x) + 2u - \exp(-u) + \lambda = 0, & x \in \Omega = (0, 1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \end{cases} \quad (6.1)$$

Пример 6.2. Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу

$$\begin{cases} \varepsilon u'(x) + 2u - \exp(-u) + x\lambda + x^2 = 0, & x \in \Omega = (0, 1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Точного решения наших тестовых задач нет. Поэтому мы оцениваем ошибки в вычисленном решении и скорость сходимости с использованием принципа двойной сетки. Для этого вычислим \bar{U}_i^{2N} как кусочно-линейную интерполяцию U_i^N на Ω^N . Теперь для любого значения N мы определим $E_{\varepsilon,u}^N = \max_i |U_i^N - \bar{U}_i^{2N}|$ как максимальную ошибку в точке относительно переменной u . Аналогичным образом для параметра λ максимальная ошибка в точке определяется как $E_{\varepsilon,\lambda}^N = |\lambda^N - \bar{\lambda}^{2N}|$. Соответствующая скорость сходимости вычисляется следующим образом: $r_{\varepsilon,u}^N = \log_2(E_{\varepsilon,u}^N/E_{\varepsilon,u}^{2N})$, $r_{\varepsilon,\lambda}^N = \log_2(E_{\varepsilon,\lambda}^N/E_{\varepsilon,\lambda}^{2N})$. Максимальная ошибка в точке E_ε^N вычисляется как $E_\varepsilon^N = \max(E_{\varepsilon,u}^N, E_{\varepsilon,\lambda}^N)$. Однородные ошибки E^N и соответствующая равномерная скорость сходимости r^N вычисляются по следующим формулам: $E^N = \max_{\varepsilon \in S} E_\varepsilon^N$, $r^N = \log_2(E^N/E^{2N})$. Здесь мы выбрали множество $S = \{\varepsilon = 10^{-j} \mid j = 0, 1, \dots, 10\}$. Однородная ошибка и соответствующая скорость сходимости для примера 6.1, вычисленные по монотонной гибридной схеме, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Однородные ошибки и порядки сходимости для примера 6.1

Сетка	Число интервалов N		
	64	128	256
S-сетка	0.00082	0.00027	0.00009
	1.6027	1.5850	1.6845
B-S-сетка	0.00027	0.0000701	0.0000177
	1.9475	1.9857	1.9886
адаптивная сетка	0.00015	0.000035	0.0000088
	2.09995	1.9918	2.0000

Схемы для первого порядка на S-сетке, B-S-сетке и адаптивной сетке можно найти в [1, 2, 25] соответственно.

Здесь нами представлены вычислительные результаты, полученные с использованием монотонной гибридной схемы второго порядка. На рисунке 1а показано движение сетки, а на рис. 1б — конечная вычисленная сетка, полученная с использованием адаптивного алгоритма для монотонной гибридной схемы для примера 6.1. На этих рисунках ясно показан неоднородный характер сетки. Из рис. 1а ясно, что при использовании адаптивной сетки узловые точки автоматически движутся влево, когда слой около $x = 0$. На рис. 2а показано поведение ошибки, соответствующей точкам сетки для примера 6.1. Очевидно, что ошибка в области слоя вносит вклад в максимальную ошибку. Для получения численного порядка сходимости мы показываем максимальную ошибку в точке для $\varepsilon = 10^{-4}$ в двойном логарифмическом масштабе, полученную с использованием схем (3.1) и (3.3) для примера 6.1, а также теоретическую скорость сходимости на рис. 2б, что снова показывает эффективность предлагаемой схемы. Вычисленные максимальные ошибки в точке и соответствующие порядки сходимости для примера 6.1 с использованием предлагаемых схем (3.1) и (3.3) представлены в табл. 2 для $\varepsilon = 10^{-4}$ и 10^{-8} . Мы также сравниваем наш результат для примера 6.2, полученный с использованием схем (3.1) и (3.3), с результатом, полученным в [5] для $\varepsilon = 10^{-8}$. Можно видеть, что предлагаемый нами метод точнее, чем гибридная схема в табл. 3. Также очевидно, что метод в [5] не может быть реализован на адаптивной сетке, но наш метод прекрасно работает как в случае сеток Шишкина, так и в случае адаптивных сеток.

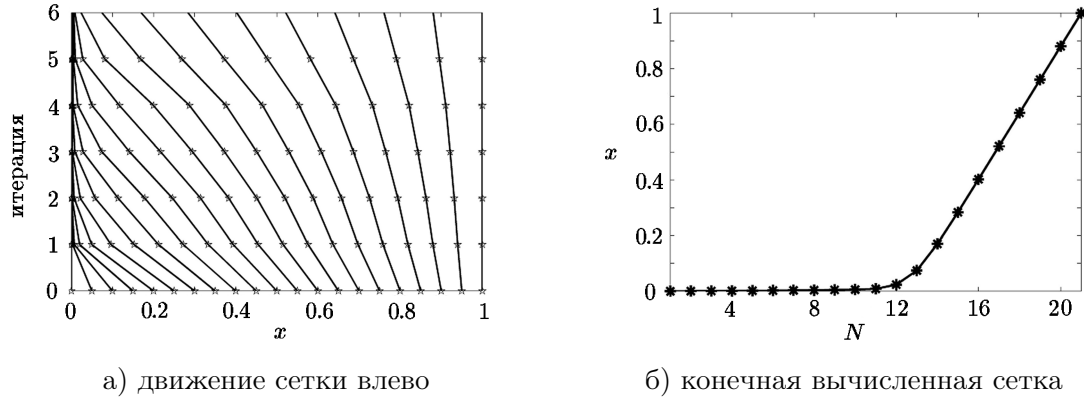


Рис. 1. Движение сетки по адаптивному алгоритму при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $N = 20$ для примера 6.1

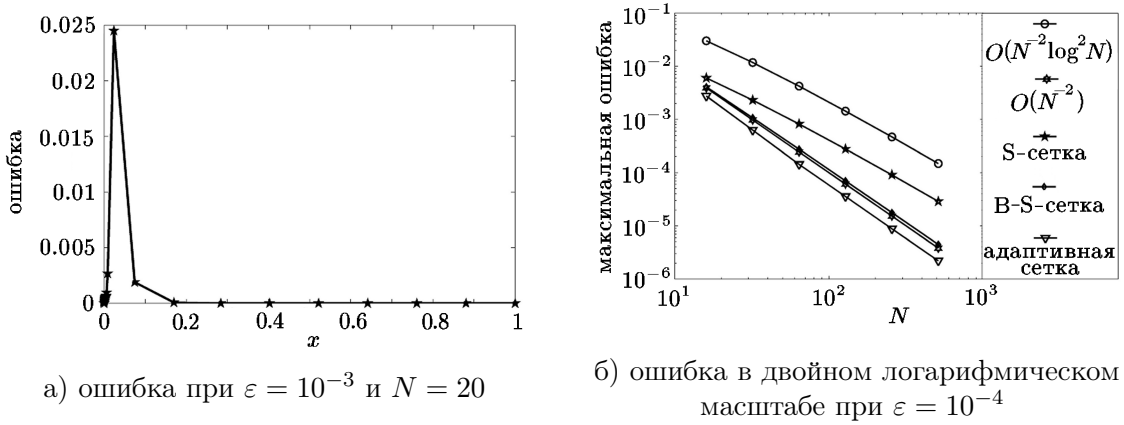


Рис. 2. Визуализация ошибки для примера 6.1

Таблица 2. E_ε^N и r_ε^N для схемы, предлагаемой для примера 6.1

N	$\varepsilon = 10^{-4}$			$\varepsilon = 10^{-8}$		
	S-сетка	B-S-сетка	адаптивная сетка	S-сетка	B-S-сетка	адаптивная сетка
16	6.0128e-3 1.383	4.0733e-3 1.921	2.7495e-3 2.126	6.0128e-3 1.383	4.0733e-3 1.922	3.0187e-3 2.176
32	2.3053e-3 1.487	1.0750e-3 1.958	6.2969e-4 2.138	2.3053e-3 1.487	1.0750e-3 1.958	6.6796e-4 2.117
64	8.2232e-4 1.561	2.7673e-4 1.979	1.4311e-4 2.002	8.2232e-4 1.561	2.7673e-4 1.979	1.5401e-4 2.101
128	2.7866e-4 1.616	7.0180e-5 1.986	3.5718e-5 2.016	2.7865e-4 1.615	7.0194e-5 1.987	3.5888e-5 2.015
256	9.0907e-5 1.656	1.7711e-5 1.988	8.8332e-6 1.999	9.0961e-5 1.661	1.7711e-5 1.995	8.8774e-6 2.005
512	2.8838e-5 1.701	4.4658e-6 2.028	2.2095e-6 1.880	2.8764e-5 1.696	4.4422e-6 1.998	2.2119e-6 2.003

Таблица 3. Сравнение численных результатов при $\varepsilon = 10^{-8}$ для примера 6.2.

N	Результат, представленный в [5]		Результат, полученный предлагаемым методом		
	S-сетка	B-S-сетка	S-сетка	B-S-сетка	адаптивная сетка
32	4.7040e-3 1.511	6.5921e-4 1.959	1.0154e-3 1.484	6.1638e-4 1.956	7.3640e-4 2.080
64	1.6506e-3 1.572	1.6959e-4 1.977	3.6289e-4 1.556	1.5885e-4 1.977	1.7416e-4 2.012
128	5.5514e-4 1.616	4.3065e-5 1.989	1.2339e-4 1.615	4.0344e-5 1.989	4.3167e-5 2.000
256	1.8111e-4 1.660	1.0849e-5 1.994	4.0282e-5 1.660	1.0164e-5 1.994	1.0791e-5 1.989
512	5.7317e-5 1.670	2.7228e-6 1.997	1.2742e-5 1.696	2.5508e-6 1.997	2.7184e-6 1.994

6.1. Параметризованные КЗ с граничными условиями Робина

Мы используем обратный метод Эйлера для следующей параметризованной КЗ с граничными условиями Робина:

$$\begin{cases} \varepsilon u'(x) + f(x, u, \lambda) = 0, & x \in \Omega = (0, 1), \\ Au(0) + B\varepsilon u'(0) = s_0, & u(1) = s_1, \end{cases} \quad (6.3)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $(A, B) \neq (0, 0)$ и s_0, s_1 — заданные постоянные. КЗ (6.3) имеет “слоистое” поведение около $x = 0$.

Пример 6.3. Рассмотрим следующую СВЗ с граничными условиями типа Робина:

$$\begin{cases} \varepsilon u'(x) + 2u - \exp(-u) + x^2 + \lambda + \tanh(\lambda + x) = 0, & x \in \Omega = (0, 1), \\ u(0) + \varepsilon u'(0) = 1, & u(1) = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Предлагаемый метод (3.1) при $\sigma_i = 1$ используется для решения КЗ (6.3) на адаптивной сетке. В табл. 4 представлены максимальные ошибки в точке и соответствующая скорость сходимости для примера 6.3.

Таблица 4. E_ε^N и r_ε^N для примера 6.3 на адаптивной сетке

ε	Число интервалов N					
	16	32	64	128	256	512
10^{-4}	2.9543e-2 0.854	1.6346e-2 0.907	8.7165e-3 0.943	4.5342e-3 0.959	2.3331e-3 0.964	1.1960e-3
10^{-8}	2.9528e-2 0.859	1.6283e-2 0.902	8.7127e-3 0.939	4.5427e-3 0.955	2.3434e-3 0.966	1.1994e-3

7. Заключительные замечания

В данной статье мы разработали взвешенную конечно-разностную аппроксимацию для класса параметризованных сингулярно возмущенных краевых задач. При соответствующем выборе параметра схемы σ_i мы получили две различные схемы: обратную

схему Эйлера и монотонную гибридную схему. Решение получено на неоднородных сетках различного типа. Было выполнено сравнение предлагаемой схемы со схемой, представленной в [5]. Мы видим, что предлагаемый метод не только обеспечивает лучший результат на сетках S-типа, но также может быть реализован на адаптивных сетках, что дает оптимальный порядок сходимости для схемы. Мы также использовали идею обратной схемы Эйлера для параметризованной краевой задачи с граничными условиями Робина и показали при помощи вычислений, что метод имеет первый порядок сходимости. Здесь полученные теоретические оценки и представленные численные результаты показывают преимущество адаптивной сетки перед сеткой Шишкина для решения параметризованных СВЗ.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить искреннюю благодарность рецензентам за ценные замечания и предложения по улучшению качества и формы представления рукописи. Первый автор выражает искреннюю благодарность Департаменту науки и технологии (DST) Правительства Индии за предоставление стипендии (IF 150650), а второй автор выражает искреннюю благодарность Совету по научным и промышленным исследованиям (CSIR) Правительства Индии за поддержку данной работы в рамках научного гранта № 25(0231)/14/EMR-II.

Литература

1. **Amiraliyev G.M. and Duru H.** A note on a parameterized singular perturbation problem // J. Comput. Appl. Math.— 2005.— Vol. 182.— P. 233–242.
2. **Amiraliyev G.M., Kudu M., and Duru H.** Uniform difference method for a parameterized singular perturbation problem // Appl. Math. Comput.— 2006.— Vol. 175.— P. 89–100.
3. **Beckett G. and Mackenzie J.A.** Convergence analysis of finite difference approximations on equidistributed grids to a singularly perturbed boundary value problem // Appl. Numer. Math.— 2000.— Vol. 35, № 106.— P. 87–109.
4. **de Boor C.** Good approximation by splines with variable knots // Spline Functions and Approximation Theory. Proc. of the Symposium held at the University of Alberta, Edmonton, May 29–June 1, 1972 / A. Meir, A. Sharma.— Basel: Birkhäuser, 1973.
5. **Cen Z.** A second-order difference scheme for a parameterized singular perturbation problem // J. Comput. Appl. Math.— 2008.— Vol. 221.— P. 174–182.
6. **Das P. and Natesan S.** Numerical solution of a system of singularly perturbed convection diffusion boundary value problems using mesh equidistribution technique // Aust. J. Math. Anal. Appl.— 2013.— Vol. 10.— P. 1–17.
7. **Das P. and Natesan S.** Optimal error estimate using mesh equidistribution technique for singularly perturbed system of reaction-diffusion boundary-value problems // Appl. Math. Comput.— 2014.— Vol. 249.— P. 265–277.
8. **Chen Y.** Uniform convergence analysis of finite difference approximations for singular perturbation problems on an adapted grid // Adv. Comput. Math.— 2006.— Vol. 24.— P. 197–212.
9. **Farrell P.A., Hegarty A.F., Miller J.M., O’Riordan E., and Shishkin G.I.** Robust Computational Techniques for Boundary Layers.— Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press, 2000.
10. **Feckan M.** Parametrized singularly perturbed boundary value problems // J. Math. Anal. Appl.— 1994.— Vol. 188.— P. 426–435.
11. **Jankowski T. and Lakshmikantham V.** Monotone iterations for differential equations with a parameter // J. Appl. Math. Stoch. Anal.— 1997.— Vol. 10, № 3.— P. 273–278.

12. **Kellogg R.B. and Tsan A.** Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points // *Math. Comput.* — 1978. — Vol. 32. — P. 1025–1039.
13. **Kopteva N. and Stynes M.** A robust adaptive method for a quasi-linear one-dimensional convection-diffusion problem // *SIAM J. Numer. Anal.* — 2001. — Vol. 39. — P. 1446–1467.
14. **Kopteva N., Madden N., and Stynes M.** Grid equidistribution for reaction–diffusion problems in one dimension // *Numer. Algorithms.* — 2005. — Vol. 40. — P. 305–322.
15. **Liu X. and McRae F.A.** A Monotone iterative method for boundary value problems of parametric differential equations // *J. Appl. Math. Stoch. Anal.* — 2001. — Vol. 14, № 2. — P. 183–187.
16. **Linß T.** Sufficient conditions for uniform convergence on layer-adapted grids // *Appl. Numer. Math.* — 2001. — Vol. 37. — P. 241–255.
17. **Liseikin V.D.** *Grid Generation Methods.* — Berlin: Springer, 1999.
18. **Liseikin V.D.** *Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems.* — VSP, 2001.
19. **Mackenzie J.** Uniform convergence analysis of an upwind finite-difference approximation of a convection-diffusion boundary value problem on an adaptive grid // *IMA J. Numer. Anal.* — 1999. — Vol. 19. — P. 233–249.
20. **Miller J.J.H., O’Riordan E., and Shishkin G.I.** *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems.* Revised edition. — Singapore: World Scientific, 2012.
21. **Mohapatra J. and Natesan S.** Parameter-uniform numerical method for global solution and global normalized flux of singularly perturbed boundary value problems using grid equidistribution // *Comput. Math. Appl.* — 2010. — Vol. 60. — P. 1924–1939.
22. **Pomentale T.** A constructive theorem of existence and uniqueness for problem $y' = f(x, y, \lambda)$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$ // *Z. Angew. Math. Mech.* — 1976. — Vol. 56, № 8. — P. 387–388.
23. **Ronto M. and Csikos-Marinets T.** On the investigation of some non-linear boundary value problems with parameters // *Math. Notes.* — Miskolc, 2000. — Vol. 1, № 2. — P. 157–166.
24. **Roos H.G., Stynes M., and Tobiska L.** *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations.* — Berlin: Springer, 2008.
25. **Shakti D. and Mohapatra J.** A second order numerical method for a class of parameterized singular perturbation problems on adaptive grid // *Nonlinear Engineering.* — 2017. — Vol. 6, № 3. — P. 221–228.
26. **Turkyilmazoglu M.** Analytic approximate solutions of parameterized unperturbed and singularly perturbed boundary value problems // *Appl. Math. Model.* — 2011. — Vol. 35. — P. 3879–3886.
27. **Xie F., Wang J., Zhang W., and He M.** A novel method for a class of parameterized singularly perturbed boundary value problems // *J. Comput. Appl. Math.* — 2008. — Vol. 213. — P. 258–267.
28. **Xu X., Huang W., Russell R.D., and Williams J.F.** Convergence of de Boor’s algorithm for the generation of equidistributing meshes // *IMA J. Numer. Anal.* — 2011. — Vol. 31. — P. 580–596.

Поступила в редакцию 27 ноября 2017 г.

После доработки 12 июня 2018 г.

Принята к публикации 21 января 2019 г.