

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

В настоящее время сложилось мнение, что в основе пластического деформирования твердого тела лежат процессы сдвига или скольжения одних частей материала по другим [1—12]. Несмотря на единство во взглядах на природу пластических деформаций, различны подходы к их описанию. Одни исследователи полагают, что пластическая деформация определяется сдвиговым процессом, происходящим в целом веере плоскостей скольжения [1—3], другие [4—12] считают, что такой процесс протекает лишь в конечной системе определенно ориентированных плоскостей скольжения. В [4—8] эта система ассоциируется с набором площадок действия главных касательных напряжений, другой набор образован равнонаклонными или октаэдрическими площадками [9, 10]. Что касается макроэкспериментов, то они не отрицают ни один из рассматриваемых подходов [3, 5, 13, 14], но все же обнаруживают некоторые преимущества последнего из них: так, начало пластических деформаций лучше других описывается условием постоянства октаэдрического касательного напряжения (или условием Мизеса) [12, 15], при простом нагружении оказывается справедливой гипотеза «единой» кривой, устанавливающей зависимость октаэдрического сдвига от октаэдрического касательного напряжения [16—18]. Микроэксперименты по определению плоскостей скольжения в деформируемом теле также не решают проблему выбора подхода потому, что реальные материалы локально в известной степени являются разнородными и анизотропными относительно пластических свойств [19, 20], в то время как указанные подходы — феноменологическими.

В перечисленных работах анализируется чисто пластическое состояние деформируемого материала — полные деформации разделяются на упругие и пластические составляющие. Однако появились работы [21, 22], в которых обращается внимание на то, как происходит само упругое деформирование твердого тела. В частности, ставится вопрос: что представляет собой эффект Пуассона в случае, например, растяжения или сжатия прямолинейного стержня, когда в поперечном направлении никакие силы не действуют, а деформации тем не менее есть? Предлагаются различные схемы деформирования материала, поясняющие этот эффект. Однако не устанавливается связь между механизмами упругого и пластического деформирования, хотя ясно, что они должны обуславливать друг друга.

Данная работа ставит целью не противопоставлять друг другу эти процессы деформирования, а считать их составными звеньями единого процесса — упругопластического деформирования. Такая постановка вопроса позволяет указать необходимый подход исследования пластических деформаций и определить механизм упругого деформирования твердого тела, который непрерывным и естественным образом переходит в механизм упругопластического деформирования.

Строится механическая модель деформируемого твердого тела, по структуре подобная кубу Рубика, — ее составными элементами являются жесткие недеформируемые блоки, соединенные между собой упругими пружинками. За счет растяжения или сжатия пружин происходит увеличение или уменьшение объема модели среды, за счет скольжения блоков друг по другу — изменение ее формы. При малых деформациях модель деформируется в соответствии с обычным законом Гука, а при более значительных удовлетворяет общепринятым законам пластического деформирования: объем ее изменяется упруго, пластические сдвиги не зависят от гидростатического давления. По существу, модель при любых внешних нагрузках испытывает всего лишь два вида деформации — простые сдвиг и удлинение. Это обстоятельство делает модель непротиворечивой, так как простые сдвиг и удлинение происходят без образования эффекта Пуассона.

Для построения механической модели среды необходимо задать ее структуру и механизм деформирования. В многочисленных опытах на поверхностях испытываемых материалов обнаруживаются линии Чернова — Людерса. Их появление связывается с достижением в образцах значительных пластических деформаций [23, 24]. Линии Чернова — Людерса представляют собой следы образующихся в теле поверхностей локализации деформаций. Пересекаясь между собой, эти поверхности придают среде блочный характер строения. Блоки в образцах проскальзывают друг по другу, дробятся за счет возникновения новых поверхностей ослабления материала [25]. Экспериментально наблюдаемое явление локализации деформаций и его свойства как нельзя лучше подсказывают структуру модели среды и механизм ее деформирования. Модель должна состоять из блоков, основной механизм ее деформирования должен заключаться в проскальзывании блоков друг по другу. Сформулированный вывод при исследовании пластического деформирования первоначально однородных и изотропных материалов сделан в [4—6].

Предложено несколько способов определения блочной структуры упрочняющихся материалов: один из них отождествляет эту структуру с сеткой характеристических линий идеально пластического тела [26], в другом разработаны специальные критерии локализации деформаций [23, 27, 28], которые так или иначе совпадают с условием гиперболичности основной системы дифференциальных уравнений, в [4—6] блоки в однородно деформируемом упрочняющемся материале нарезаются площадками, на которых касательные напряжения максимальны и превышают предел его упругости. Во всех рассмотренных работах блоки деформируются упруго, пластические составляющие деформаций образуются за счет скольжения одних блоков по другим.

Подойдем к работам [4—8, 26] критически. Отметим, во-первых, что блочная структура модели среды здесь назначается, а не разыскивается на основе изучения определяющих соотношений среды. Предполагается, что для ее построения достаточно ограничиться анализом напряженного состояния, не привлекая определяющих соотношений среды. Закладываемые площадки скольжения (даже если это площадки действия максимальных касательных напряжений) могут, вообще говоря, и не совпасть с теми, которые диктуются внутренней логикой самих определяющих соотношений. В этом смысле предпочтительнее работы [23, 27, 28], в которых предложены учитывающие упругопластические свойства среды критерии локализации деформаций. Однако они тоже мало что дают.

Как показывают расчеты, тип системы основных уравнений для упрочняющихся материалов эллиптический и, согласно приведенным критериям, никакой локализации деформаций не происходит. Были опробованы соотношения классических теорий — деформационной теории пластичности, теорий пластического течения при условиях пластичности Треска и Мизеса; результаты оказались одинаковыми. Этот факт побудил многих исследователей пересмотреть основные принципы построения определяющих соотношений теории упругопластических деформаций и изменить их. В частности, предложено отказаться от принципа градиентальности пластических деформаций [27, 29]. Получаемые таким образом системы дифференциальных уравнений при некоторых значениях входных параметров становятся гиперболическими [28, 30], однако определяющие соотношения в них имеют уже противоречия — одно из них состоит в отсутствии непрерывного перехода из области пластического догружения в область упругой разгрузки. В то же время сам факт локализации деформаций или существования блочной структуры просматривается даже по классическим теориям и обнаруживается не в основной системе дифференциальных уравнений, а через определяющие соотношения среды, которые отражают поведение ее механической модели при однородном деформировании. Далее, в [4—8] пластические сдвиги на площадках скольжения (точнее, их приращения) зависят не только от собственных касательных напряжений, но и от касательных напряжений на других системах площадок. Такое положение объясняется в [4, 5] анизотропией пластического состояния, на самом деле оно лишь узаконивает парадокс, обусловленный эффектом Пауссона. Третье замечание относится к тому, что пластическое деформирование среды рассматривается независимо от упругого.

Опираясь на те же эксперименты по локализации деформаций (эти опыты показывают, как вообще могут деформироваться материалы, и не только в пластичности), сделаем предположение, что и упругое деформирование среды имеет в своей основе сдвиг или упругое (обратимое) проскальзывание одних блоков по другим. Если допустить, что упругое скольжение материала происходит по площадкам с нормалью n_1 , а пластическое — с нормалью n_2 , причем $n_1 \neq n_2$, то легко прийти к противоречию, заключающемуся в том, что упругий сдвиг при сколь угодно большом нагружении среды никогда не перейдет в пластический, а пластическому сдвигу никогда не будет предшествовать упругий сколь угодно малый. Чтобы подобных противоречий не возникало, необходимо процесс пластического деформирования среды соизмерять с упругим, а площадки сколь-

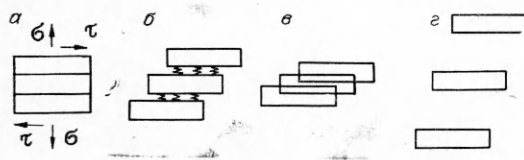


Рис. 1

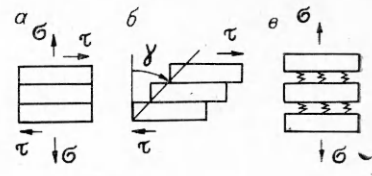


Рис. 2

жения или блочную структуру среды определять путем изучения ее упругого состояния [31, 32, 12].

Учитывая изложенные замечания, примем следующую гипотезу, по которой блочная структура в первоначально однородном и изотропном материале нарезается не в пластическом, как предполагалось в [4—8, 23, 28], состоянии, а еще перед образованием в нем упругих деформаций*. Положение выглядит примерно так — вначале в материале под действием приложенных усилий образуется блочная структура, затем начинается движение одних блоков относительно других, в результате их движения материал деформируется. Блоки в механической модели среды представляются жесткими, недеформируемыми. Упругому деформированию среды отвечает обратимое перемещение блоков, неупругому — необратимое. Блочная структура подстраивается под напряженное состояние — при повороте главных осей тензора напряжений старая их система заливается и забывается материалом, образуется новая система. Блочная структура зависит еще от строения самой среды. Поэтому будем считать ее заранее неизвестной. Имея в виду, что от ее выбора должны зависеть определяющие соотношения среды и в упругости, и в пластичности**, попытаемся решить обратную задачу — восстановим блочную структуру по известным определяющим соотношениям среды, например по закону Гука.

Для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть вопрос о механизме деформирования блочной структуры. Представим себе следующую ситуацию. Пусть имеется некоторый набор жестких недеформируемых блоков, которые каким-то образом соединены между собой (рис. 1, а). Зафиксировав жесткий поворот этой системы, приложим к ней нормальное σ и касательное τ усилия. Под действием усилий σ , τ данная система может, вообще говоря, продеформироваться так, как показано на рис. 1, б—г. Разберем подробнее представленные схемы деформирования. В первом случае (рис. 1, б) за счет касательного усилия τ блоки проскользили друг по другу на некоторую относительную величину γ (рис. 2, б) и под действием усилия σ разъединились в ортогональном направлении на относительную величину ϵ так, что между ними образовалась упругая связь. Последнюю зададим зависимостью $\epsilon = \sigma/K$, где ϵ характеризует собой деформацию простого удлинения [33] в направлении n , K (константа материала) определяется жесткостью упругих пружинок, соединяющих блоки (рис. 2, в). Во втором случае (рис. 1, в) после скольжения блоков произошло проникновение одних из них в другие, в третьем (рис. 1, г) блоки разъединились так, что их уже ничто не связывает — материал разделился на отдельные части.

Что отличает схему деформирования на рис. 1, б от схем на рис. 1, в, г? Во-первых, здесь каждое усилие τ и σ вызывает только свою собственную деформацию, т. е. нет эффекта Пуассона. Кроме того, блочная структура после деформации осталась совместной и связной, что гарантируется условием упругого изменения деформации ϵ ; эту структуру можно деформировать и дальше. Под механизмом деформирования блочной структуры материала будем понимать именно эту схему деформирования (рис. 2).

* Это предположение относится к механической модели среды, представляющей собой феноменологическое отражение реального материала.

** Блочную структуру поэтому можно рассматривать как характеристику материала.

Зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ линейна, диаграмма $\tau = \tau(\gamma)$ для упругопластического деформирования представлена на рис. 3.

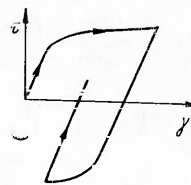


Рис. 3

Эта диаграмма отражает собой сухое трение между частицами-блоками материала при их скольжении друг по другу, на что было обращено внимание еще в [34]. Тот факт, что для многих металлических материалов она имеет один и тот же вид при $\sigma > 0$ (растяжение) и $\sigma < 0$ (сжатие), заставляет предположить, что более значительную роль, чем σ , на площадках скольжения играют силы внутреннего взаимодействия частиц материала (межатомные, межмолекулярные, межструктурные), которые притягивают их друг к другу гораздо сильнее, чем сжимают или растягивают усилия σ , обусловленные внешним нагружением. Обозначим вклад этих сил в давление на площадках скольжения как N , тогда суммарное давление равно $N + \sigma$. Пусть шероховатость поверхностей скользящих блоков определяется коэффициентом трения $k_{тр}$. Рассмотрим пластическое деформирование материала. Для его начала необходимо, чтобы касательное напряжение на площадках скольжения превзошло силу трения, т. е. должно быть $\tau \geq k_{тр}(N + \sigma)$, откуда следует, что для $|N| \gg |\sigma|$ и $|k_{тр}\sigma| \ll \tau$ диаграмма $\tau = \tau(\gamma)$ действительно не будет зависеть от σ , причем $k_{тр}N$ можно отождествить с пределом упругости материала $\tau_s = k_{тр}N$. Нетрудно видеть, что благодаря шероховатости поверхностей скользящих блоков имеет место также само упругое деформирование материала. Перед пластическим скольжением блоков происходит напряжение различного рода выступов вдоль поверхностей сопряжения, их деформирование определяет упругие деформации сдвига среды.

Возникает вопрос: если диаграмма $\tau = \tau(\gamma)$ уже отражает сухое трение между частицами материала при их скольжении, то зачем же его учитывать в теоретических построениях дважды, как это сделано, например, в [8, 11, 35]**?

Обратимся теперь к отысканию блочной структуры или плоскостей скольжения в первоначально однородной и изотропной среде. Образец из этого материала подвергнем однородному нагружению. Пусть нагрузки таковы, что он деформируется упруго. Определим главные оси тензора напряжений, которые обозначим 1, 2, 3. В системе координат, связанной с этими осями, построим вектор напряжения \mathbf{p} и вектор деформации \mathbf{q} на произвольно ориентированной площадке с единичной нормалью \mathbf{n} . По формуле Коши $\mathbf{p} = \sigma_1 n_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 n_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 n_3 \mathbf{e}_3$ (n_1, n_2, n_3 — направляющие косинусы \mathbf{n} , $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — орты системы координат 1, 2, 3), а $\mathbf{q} = \varepsilon_1 n_1 \mathbf{e}_1 + \varepsilon_2 n_2 \mathbf{e}_2 + \varepsilon_3 n_3 \mathbf{e}_3$. Вектор деформации \mathbf{q} характеризует собой относительное смещение площадки с нормалью \mathbf{n} , когда жесткий поворот ее зафиксирован.

Рассмотрим проекции этих векторов на нормаль \mathbf{n} и на направление касательной к площадке. Для нормальных составляющих имеем

$$(1) \quad \sigma_n = \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \quad \varepsilon_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_1 n_1^2 + \varepsilon_2 n_2^2 + \varepsilon_3 n_3^2.$$

Касательные проекции определяются равенствами

$$(2) \quad \tau_n = \mathbf{p} - \sigma_n \mathbf{n}, \quad \gamma_n = \mathbf{q} - \varepsilon_n \mathbf{n} \quad (\sigma_n = \sigma_n \mathbf{n}, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n \mathbf{n}).$$

Введем для удобства обозначения [4] $T_{13} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$, $\sigma'_2 = \sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Тогда

$$(3) \quad \tau_n = T_{13} [n_1 \mathbf{e}_1 - n_3 \mathbf{e}_3 - (n_1^2 - n_3^2) \mathbf{n}] + \sigma'_2 n_2 (\mathbf{e}_2 - n_2 \mathbf{n}).$$

* В ортогональном направлении $\mathbf{M} + \varepsilon = (N + \sigma)/K$ (деформация \mathbf{M} вызывается усилием N). Полагая $\mathbf{M} = N/K$, получаем $\varepsilon = \sigma/K$.

** Чтобы убедиться в этом, достаточно в [8, 11, 35] положить угол трения $\varphi_* = 0$ и рассмотреть упругопластическую диаграмму касательное напряжение — сдвиг.

Воспользуемся теперь соотношениями закона Гука. Подставив их в (1), (2), выразим нормальную и касательную составляющие \mathbf{q} через проекции \mathbf{p} :

$$(4) \quad \varepsilon_n = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_n + \frac{3\nu}{E} \left[T_{13} (n_1^2 - n_3^2) + \sigma_2' \left(n_2^2 - \frac{1}{3} \right) \right], \quad \gamma_n = \frac{\tau_n}{2\mu}.$$

Попытаемся подобрать в испытуемом материале такие площадки, которые, во-первых, не зависели бы от способа задания на них усилий σ_n, τ_n , т. е. от $\sigma_n, T_{13}, \sigma_2'$ и их отношений, во-вторых, чтобы нормальная деформация ε_n на этих площадках вызывалась только своим нормальным усилием σ_n , а сдвиговая γ_n — только своим касательным усилием τ_n . Этим самым мы хотим приблизиться к принятой нами схеме (рис. 2). Сопоставляя (3), (4), убеждаемся*, что искомые площадки совпадают с равнонаклонными к осям 1, 2, 3. Таких площадок восемь, между собой они образуют правильный октаэдр [9, 36]. Закон Гука на октаэдрических площадках имеет вид

$$(5) \quad \varepsilon_n = \sigma_n/K, \quad \gamma_n = \tau_n/(2\mu).$$

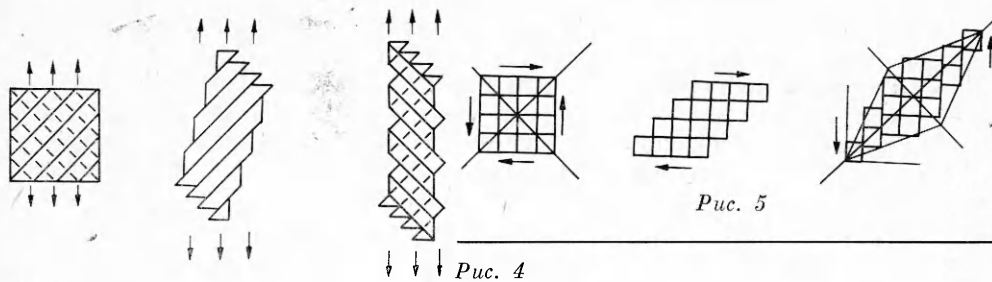
В уравнениях (5) завуалирована некоторая неоднозначность — можно предположить, что усилия σ_n вызывают поперечные деформации, и допустить, что поперечные деформации не образуются. Ввиду двойственности положения и желая избавиться от парадокса, обусловленного эффектом Пуассона, примем, что нормальные усилия σ_n в системе (5) поперечных деформаций не вызывают. В этом случае первое уравнение в (5) определяет простое удлинение, второе — простой сдвиг. Из сравнения схемы (рис. 2) и формул (5) делаем вывод, что блочную структуру первоначально однородной и изотропной среды должны образовывать октаэдрические плоскости. Поскольку уравнения (5) справедливы в каждом из четырех семейств октаэдрических площадок, естественно ожидать, что блочная структура нарезается четырьмя системами октаэдрических плоскостей, в каждом таком семействе материал деформируется независимо и одинаково по схеме рис. 2.

В качестве иллюстрации на рис. 4 показана схема растяжения прямоугольного бруса при плоской деформации. В отличие от предыдущего материал здесь разбит не на октаэдрические фигуры, а на прямоугольные призмы, образующие плоскости которых параллельны площадкам действия максимального касательного напряжения. Представленная ситуация также относится к деформированию первоначально однородной и изотропной среды [24]. Плоская деформация является стесненным видом деформации [5], соотношения закона Гука при плоской деформации обращаются в соотношения

$$(6) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 = (\sigma_1 + \sigma_3)/k', \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = (\sigma_1 - \sigma_3)/(2\mu), \quad \varepsilon_2 = \sigma_2/C.$$

Если положить в них $C = \infty$ (материал жесткий в направлении 2), $k' = K/(1 + \nu)$ и все время поддерживать $\sigma_2 = \nu(\sigma_1 + \sigma_3)$, то это как раз и будут соотношения закона Гука при плоской деформации. Характер уравнений (6) говорит о призматическом строении среды. Первое уравнение в (6) отражает упругое изменение ε_n на площадках действия максимального касательного напряжения ($\varepsilon_n = \sigma_n/k'$), второе — простой сдвиг, третье — простое удлинение в ортогональном к плоскости рисунка направлении (оно равно нулю, так как $C = \infty$). Призмы скользят друг по другу — сначала по одному семейству площадок, затем, в силу парности касательных напряжений, по другому. В итоге получается картина деформирования, представленная на рис. 4.

* При $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 0$ деформация ε_n зависит от нормальных напряжений на других площадках. Для того чтобы ε_n не зависела от τ_n при $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0, n_3 \neq 0$, необходимо, чтобы направляющие косинусы нормали удовлетворяли уравнениям $n_1^2 - n_3^2 = 0, n_2^2 - 1/3 = 0, n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, откуда вытекает $n_1 = \pm 1/\sqrt{3}, n_2 = \pm 1/\sqrt{3}, n_3 = \pm 1/\sqrt{3}$.



Приведенный пример показывает, что при стесненной деформации может произойти перестройка структуры первоначально однородного и изотропного материала — вместо намечавшихся октаэдров образуются прямоугольные призмы. Общим в том и другом случае может быть один и тот же вид кривой $\tau = \tau(\gamma)$, характеризующей сопротивление среды упругопластическим сдвигам. Эта гипотеза требует экспериментальной проверки.

Обратимся теперь к анализу эффекта Пуассона. Соотношения (5), (6), как видно, не обнаруживают эффекта Пуассона. За счет чего же он тогда появляется? При сдвиге происходит не только изменение углов элемента среды (рис. 5), но и увеличение одной из его диагоналей и уменьшение другой. Первое вызывает удлинение материала, второе — укорочение, при сдвиге оба этих явления происходят вместе (одно не существует без другого). Эффект Пуассона отсюда носит чисто геометрический характер, он образуется исключительно благодаря сдвигу, хотя в самом сдвиговом процессе его нет.

Вопрос о блочной структуре первоначально однородной и изотропной среды таким образом решен. Механическая модель однородно деформируемого твердого тела в общем случае состоит из жестких недеформируемых блоков, образованных пересечением октаэдрических плоскостей, модель тела претерпевает всего лишь два вида деформации — простые сдвиг и удлинение.

Установим теперь характер деформирования механической модели по существующим теориям упругопластического деформирования материалов. Возьмем деформационную теорию пластичности. По этой теории механическая модель среды будет деформироваться по правилу

$$(7) \quad \varepsilon_n = \sigma_n/K, \quad \gamma_n^p = \tau_n/(2\mu_c), \quad \mu_c = \mu_c(\tau_n).$$

Пластический сдвиг γ_n^p зависит от достигнутого значения τ_n на октаэдрических площадках и происходит в направлении его действия, в направлениях нормалей к октаэдрическим площадкам осуществляются деформации простого удлинения. Условие пластичности механической модели среды $\tau_n = \text{const}$ совпадает с точностью до числового множителя с условием Мизеса.

Рассмотрим теорию пластического течения при условии Мизеса, согласно которой на площадках скольжения механической модели среды

$$(8) \quad \varepsilon_n = \sigma_n/K_s, \quad \Delta\gamma_n^p = \Delta\lambda\tau_n^*$$

В направлении τ_n образуется уже приращение пластического сдвига $\Delta\gamma_n^p$, в направлениях нормалей к площадкам скольжения по-прежнему происходят простые удлинения.

Площадки скольжения в механической модели среды — октаэдрические плоскости. Изменение главных осей тензора напряжений ведет к заживлению старой системы площадок скольжения и образованию новой, в которой уравнения деформирования опять имеют вид (7), (8). Анализируемые теории поэтому не учитывают историю нагружения, они не помнят старой системы площадок ни при упругом, ни при пластическом деформировании.

Обратим внимание на основные соотношения теории пластического течения при условии пластичности Треска. По этой теории, как и прежде, $\varepsilon_n = \sigma_n/K$, по нормальям к октаэдрическим плоскостям осуществляются деформации простого удлинения, они упругие. Однако приращения пластических сдвигов происходят уже не по касательному усилию τ_n , а вдоль его проекций по заранее заданным направлениям: в состоянии неполной пластичности по вектору (см. (3)) $\alpha = (\sqrt{3}/2)(n_1 e_1 - n_3 e_3)$, $|\alpha| = 1$, в состоянии полной пластичности по α и по направлению, образуемому с α угол $\pm 60^\circ$.

На октаэдрических площадках эти направления ничем не примечательны — вместо них могут быть взяты другие, например те, что определяются приведенным условием пластичности [34], шестиугольник заменен двенадцатиугольником. Поэтому условие Треска в механической модели среды — линейная аппроксимация условия Мизеса, а теории, основанные на нем, — аппроксимации соответствующих теорий, но построенных на условии пластичности Мизеса.

Для объяснения применения условия Треска в упругопластических моделях предполагаются различные аргументы, в частности представление объемного напряженно-деформированного состояния в виде наложения трех плоских деформаций [5, 7]. Здесь, однако, таится одно противоречие, на котором сейчас остановимся. Пусть имеют место три плоскодеформированных состояния:

$$(9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1' - \varepsilon_2' &= (\sigma_1 - \sigma_2)/A, & \varepsilon_1' + \varepsilon_2' &= (\sigma_1 + \sigma_2)/B, & \varepsilon_3' &= 0; \\ \varepsilon_1'' - \varepsilon_3'' &= (\sigma_1 - \sigma_3)/A, & \varepsilon_1'' + \varepsilon_3'' &= (\sigma_1 + \sigma_3)/B, & \varepsilon_2'' &= 0; \\ \varepsilon_2''' - \varepsilon_3''' &= (\sigma_2 - \sigma_3)/A, & \varepsilon_2''' + \varepsilon_3''' &= (\sigma_2 + \sigma_3)/B, & \varepsilon_1''' &= 0 \end{aligned}$$

(1, 2, 3 — главные оси тензора напряжений, A, B — неизвестные пока модули жесткости материала). Предположим, что все эти состояния происходят независимо одно от другого. Обозначим суммарные деформации как $\varepsilon_k = \varepsilon_k' + \varepsilon_k'' + \varepsilon_k'''$ ($k = 1, 2, 3$). Для выбора параметров A, B потребуем, чтобы деформации ε_k были связаны с напряжениями законом Гука. Выполнив необходимые операции, получим

$$(10) \quad 1/A = (1 + 2\nu)/(2E), \quad 1/B = (1 - 2\nu)/(2E).$$

Объемное напряженно-деформированное состояние разложилось на три плоские деформации, в каждом таком состоянии имеют место призматические структуры, простые сдвиги и удлинения. Достаточно прозрачно выглядят состояния неполной и полной пластичности [4—8]. Тем не менее эта схема деформирования противоречива. Если из состояния (9) произвести ортогональные догружения, то по закону Гука должно быть

$$\Delta\varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \Delta\tau_{12}, \quad \Delta\varepsilon_{13} = \frac{1+\nu}{E} \Delta\tau_{13}, \quad \Delta\varepsilon_{23} = \frac{1+\nu}{E} \Delta\tau_{23}.$$

Отсюда возникает противоречие. С одной стороны, модуль сдвига в силу (9), (10) $A = 2E/(1 + 2\nu)$, а с другой — $E/(1 + \nu)$. Материал, таким образом, не изотропен, хотя по исходному предположению он изотропен. Раз материал по схеме (9), (10) деформироваться в упругости не может, то получается, что пластическим деформациям [5, 7, 35] по этой же схеме не будут предшествовать упругие.

Эксперименты по простому сдвигу материалов (см. рис. 2, б), например кручения тонкостенных цилиндрических трубок, имеют фундаментальное значение для построения механической модели среды, являясь паспортными. С их помощью определяется характеристическая функция простого сдвига $\tau = \tau(\gamma)$, где измеряемое значение γ показано на рис. 2, б и включает в себя компоненту вектора жесткого поворота [33]. Кроме того, эти опыты, доведенные до визуально наблюдаемой локализации деформаций, дают сведения об ориентации плоскостей скольжения при простом сдвиге. Если плоскости скольжения совпадают по направлению с приложенным

касательным усилием τ , то тогда применима изложенная выше механическая модель среды. В противном случае (пример в [24]) исследуемый изотропный материал надо рассматривать как горную породу и для его описания предлагается использовать механическую модель и определяющие соотношения, разработанные в [10].

Сделаем еще одно важное замечание. Максимальное касательное напряжение характеризуется, как известно, значением и площадкой, на которой действует. Между тем разность $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ в силу (3) входит в определение касательного напряжения на любых других площадках, поэтому она нетождественна максимальному касательному напряжению. Величина $\epsilon'_2 = \epsilon_2 - (\epsilon_1 + \epsilon_3)/2$ [4] на основании (1)–(3) играет роль проекции сдвига. Наконец, блочная структура анизотропного материала устанавливается из анализа собственных упругих состояний [31, 32] так, как предложено в [12].

ЛИТЕРАТУРА

1. Батдорф С. Б., Будянский Б. В. Математическая теория пластичности, основанная на концепции скольжения // *Механика*. — М., 1962. — № 1.
2. Леонов М. Я. Механика деформаций и разрушения: физико-математические основы теории. — Фрунзе: Илим, 1981.
3. Мохель А. Н., Салганик Р. Л. К теории пластического деформирования упрочняющихся материалов // *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1976. — № 5.
4. Шемякин Е. И. Анизотропия пластического состояния // *ЧММСС*. — 1973. — Т. 4, № 4.
5. Христианович С. А. Деформация упрочняющегося пластического материала // *Изв. АН СССР. МТТ*. — 1974. — № 4.
6. Христианович С. А., Шемякин Е. И. К теории идеальной пластичности // *Инж. журн. МТТ*. — 1967. — № 4.
7. Коврижных А. М. Вариант теории пластического течения, основанный на сдвиговом механизме деформирования // *ПМТФ*. — 1982. — № 6.
8. Бабаков В. А. Модель пластического тела с внутренним трением и дилатансией // *ФТПРПИ*. — 1987. — № 3.
9. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. — М.: ИЛ, 1954.
10. Чанышев А. И. О соотношениях упругости для горных пород. Деформационная теория пластичности // *ФТПРПИ*. — 1986. — № 1.
11. Ревуженко А. Ф. О деформировании сыпучей среды // *ФТПРПИ*. — 1980. — № 3; 1981. — № 5; 1982. — № 4; 1983. — № 6.
12. Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И. Математические модели упруго-пластических тел // *Актуальные проблемы вычислительной математики и математического моделирования*. — Новосибирск: Наука, 1985.
13. Имамудинов А. И. Деформация упрочняющегося пластического материала при сложном нагружении // *Динамика сплошной среды*. — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1978. — Вып. 34.
14. Чанышев А. И. Об одной модели пластического деформирования горных пород при сложном нагружении (пространственный случай) // *ФТПРПИ*. — 1985. — № 1.
15. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. — М.: Машиностроение, 1975.
16. Жуков А. М. Пластические свойства и разрушение стали при двухосном напряженном состоянии // *Инж. сб.* — 1954. — Т. 20.
17. Жуков А. М. Сложное нагружение и теория пластичности изотропных материалов // *Изв. АН СССР. ОТН*. — 1955. — № 8.
18. Davis E. A. Combined tension-torsion test with fixed principal directions // *J. Appl. Mech.* — 1955. — V. 22, N 3.
19. Новожиллов В. В. О пластическом разрыхлении // *ПММ*. — 1965. — Т. 29, вып. 4.
20. Фридель Ж. Дислокация. — М.: Мир, 1967.
21. Кузьменко В. А. Новые схемы деформирования твердых тел. — Киев: Наук. думка, 1973.
22. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. Об эффекте поперечных деформаций в механике сплошных сред // *ПМТФ*. — 1974. — № 1.
23. Райс Д. Локализация пластической деформации // *Теоретическая и прикладная механика*. Тр. XIV Междунар. конгр. IUTAM. — М.: Мир, 1979.
24. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. О механизме деформирования сыпучего материала при больших сдвигах // *ФТПРПИ*. — 1974. — № 3.
25. Ревуженко А. Ф., Стажевский С. Б., Шемякин Е. И. Несимметрия пластического течения в сходящихся осесимметричных каналах // *ДАН СССР*. — 1979. — Т. 246, № 3.
26. Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И. К вопросу о плоском деформировании упрочняющихся и разупрочняющихся пластических материалов // *ПМТФ*. — 1977. — № 3.
27. Rudnicki J. W., Rice J. R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // *J. Mech. Phys. Solids*. — 1975. — V. 23, N 6.

28. Никитин Л. В., Рыжак Е. И. Разрушение горной породы с внутренним трением и дилатансией // ДАН СССР.— 1976.— Т. 230, № 5.
29. Николаевский В. Н. Определяющие уравнения пластического деформирования сыпучей среды // ПММ.— 1971.— Т. 35, вып. 6.
30. Гарагаш И. А. Устойчивость и разрушение породных массивов с приложениями в механике подготовки землетрясений: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— М.: ИФЗ АН СССР, 1985.
31. Рыхлевский Я. О законе Гука // ПММ.— 1984.— Т. 48, вып. 3.
32. Чанышев А. И. О пластичности анизотропных сред // ПМТФ.— 1984.— № 2.
33. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Изд-во АН СССР, 1949.
34. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности.— М.: Наука, 1966.
35. Коврижных А. М. Вариант теории пластической деформации горных пород // ФТПРПИ.— 1983.— № 1.
36. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести.— М.: Высш. шк., 1968.

г. Новосибирск

Поступила 11/III 1988 г.,
в окончательном варианте — 21/IV 1988 г.

УДК 539.375+539.376

А. Г. Черепанов, Г. П. Черепанов

О РОСТЕ ТРЕЩИН В МЕТАЛЛАХ ПРИ ПОВЫШЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Ползучесть — это способность всех твердых тел к необратимой деформации при постоянных нагрузках, объясняющаяся тепловым движением и направленной миграцией под действием нагрузок основных источников необратимой деформации: включений, дырок, дислокаций и микротрещин. Последние, объединяясь на заключительной стадии, образуют макротрещину, разрезающую конструкционный элемент. Ползучесть в металлах становится ощутимо заметной обычно при температурах, больших одной трети температуры плавления (в К).

Феноменологический подход к ползучести полумпирический и основан на многих дополнительных допущениях о необратимых деформациях, оправдывающихся на опыте для конкретных материалов при определенных условиях [1].

Новый подход механики разрушения в ползучести и пластичности заключается в следующем: материал считается линейно- или нелинейно-упругим, а источники необратимой деформации рассматриваются в явном виде [2, 3]. При таком подходе необратимая деформация вычисляется как результат рождения, движения и развития этих источников, а разрушение представляется некоторым вычисляемым критическим моментом неустойчивости необратимой деформации. Можно рассматривать различные детерминированные и статистические системы источников, используя методы теории диффузии и миграции для изучения их движения и развития [2, 3].

С 70-х годов, начиная с [4], рост трещин ползучести в металлах был подвергнут массивному экспериментальному изучению в рамках классической механики разрушения, основанной на коэффициентах интенсивности напряжений [5] и на инвариантных энергетических интегралах [6—18].

Как показано в [19], δ_K -концепция в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла вытекает из общей энергетической Γ_c -концепции. Для линейных вязкоупругих материалов аналог δ_K -концепции разработан в [20]. В этом случае Γ_c - и δ_K -концепции различаются.

В теории упругости инвариантные интегралы методом Максвелла впервые найдены Эшелби в 1951 г. В [6] непосредственно из закона сохранения получен для произвольного твердого тела основной инвариантный энергетический интеграл (более общий, чем у Эшелби), использованный в качестве критерия в теории разрушения, и получено решение задачи о распределении напряжений и деформаций вблизи конца трещины в несжимаемом степенном нелинейно-упругом теле (позже найденное также в [25, 26]). Последнее решение использовано для анализа трещин ползучести [10]. В [7] интеграл Эшелби применен для расчета концентрации напряжений и деформаций в надрезах. В [9] инвариантный интеграл использован в качестве критерия в теории разрушения. В [21—24] инвариантный интеграл применялся для вычисления потока энергии в конце динамической движущейся трещины.

В качестве параметра, контролирующего рост трещины ползучести, экспериментаторы испытывали следующие параметры: коэффициент интенсивности напряжений K_I , раскрытие трещины δ , скорость раскрытия $\dot{\delta}$, инвариантные интегралы J и C^* , среднее напряжение в сечении нетто σ_{net} и др. [10—18]. Для различных сплавов и условий испытания найдены конкретные функциональные корреляции скорости роста трещины \dot{l} с тем или другим из указанных параметров, однако сколько-нибудь общей закономерности найдено не было. Даже вопрос о наилучшем параметре разрушения.