Переходим к обсуждению возможных упрощений, следуя [1—3]. С использованием (1.13) правые части в (2.7), (2.8) имеют оценки

$$(2.9)\quad \left[\varepsilon u_x(x, y) + \sqrt{k}u(x, y)\right]_{x=x_j} \leqslant C_{1j}\exp(-\varkappa\eta_1) + C_{2j}\exp(-\varkappa\eta_2),$$

$$\left[\varepsilon u_y(x, y) + \sqrt{k}u(x, y)\right]_{y=y_j} \leqslant D_{1j}\exp(-\varkappa\xi_1) + D_{2j}\exp(-\varkappa\xi_2),$$

где $0 < \varkappa \leqslant \sqrt{k}$; C_{ij}, D_{ij} — константы. Из (2.9) вытекает, что правые части (2.7), (2.8) существенно отличны от нуля лишь вблизи угловых точек.

Если пренебречь второстепенными частями в равенствах (2.7) и (2.8), то получим решение исходной задачи (1.1), (1.2), которое совпадает с решением задачи, предложенным в [1—3]. В методе [1—3] не учитывается влияние угловых погранслоев.

Укороченная задача сформулирована в случае существования осей симметрии относительно граничных условий. Основная часть решения симметрична относительно этих же осей симметрии, и после упрощений возможно разделение пространственных переменных — это хорошо согласуется с результатами [9]. При отсутствии осей симметрии относительно граничных условий формулировка укороченной задачи существенно усложняется, так как краевые условия в угловых точках могут быть разрывными и построение угловых погранслоев существенно затруднено.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек // ПММ.— 1960.— Т. 24, вып. 5.
2. **Болотин В. В.** Асимптотический метод исследования задач о собственных значениях для прямоугольных областей // Проблемы механики сплошной среды. К семидесятилетию акад. М. И. Мусхелишвили.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.
3. **Прочность,** устойчивость, колебания. Справочник/Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко.— М.: Машиностроение, 1968.
4. **Бутузов В. Ф.** Асимптотика решения уравнения $\mu^2\Delta u - k^2(x, y)u = f(x, y)$ в прямоугольной области // ДУ.— 1973.— Т. 9, № 9.
5. **Бутузов В. Ф.** Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области // ДУ.— 1975.— Т. 11, № 6.
6. **Вишик М. И., Люстерник Л. А.** Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // УМН.— 1960.— Т. 15, вып. 3.
7. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** Динамический краевой эффект в стержнях. Формулировка укороченных задач // Изв. АН СССР. МТТ.— 1972.— № 4.
8. **Вахромеев Ю. М., Корнев В. М.** О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // ДУ.— 1977.— Т. 13, № 7.
9. **Krasny I.** Some problems arising from the application of the asymptotic methods to bending vibration of rectangular plates // Dynam. strojov.— Bratislava; Smolenice, 1970.— V. 2.

Поступила 24 / II 1986 г.

УДК 539.374

О КОРОТАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ ТЕОРИИ БОЛЬШИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

П. В. Трусов

(*Пермь*)

В последнее десятилетие резко повысился интерес к задачам упругопластичности с учетом больших деформаций, под которыми здесь будут пониматься деформации с градиентами перемещений, превышающими (покомпонентно) 0,1. Основной вопрос теории больших упругопластических деформаций — установление определяющих соотношений, в формулировке которых широкое распространение нашли некоторые типы объективных производных мер напряженного и деформированного состояний, называемые в зарубежной литературе коротационными. В данной работе сделана попытка определить с единых позиций коротационные производные, а также предлагается возможный вариант обобщения теории упругопластических процессов А. А. Ильюшина на случай больших пластических деформаций.

1. В дальнейшем изложении потребуются определения индифферентных тензоров. Для этого, следуя [1], введем два движения $\mathbf{r}(\xi^i, t)$ и $\mathbf{r}'(\xi^i, t)$ рассматриваемого объема сплошной среды, отличающиеся на жесткое перемещение:

$$(1.1)\qquad \mathbf{r}'(\xi^i, t) = \mathbf{p}'(t) + [\mathbf{r}(\xi^i, t) - \mathbf{p}(t)]\cdot\mathbf{O}(t).$$

Здесь $\mathbf{p}(t)$ — радиус-вектор частицы, выбранной за полюс, в движении $\mathbf{r}(\xi^i, t)$, $\mathbf{p}'(t)$ — в движении $\mathbf{r}'(\xi^i, t)$; $\mathbf{O}(t)$ — собственно ортогональный тензор; (ξ^i, t) — лагранжевы переменные. Отсчетную конфигурацию обозначим как $\mathcal{K}_0$, актуальные в движениях $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — $\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{K}'_t$ соответственно. Базисные векторы в $\mathcal{K}_0$ есть $\overset{\circ}{e}_i = \dfrac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \xi^i}$, в $\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{K}'_t$

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i},\quad \widehat{\mathbf{e}}'_i = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial \xi^i},\quad i = \overline{1, 3}.$$

Из (1.1)

$$\widehat{\mathbf{e}}'_i = \widehat{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}^T\cdot\widehat{\mathbf{e}}_i,\quad \widehat{\mathbf{e}}_i = \widehat{\mathbf{e}}'_i\cdot\mathbf{O}^T = \mathbf{O}\cdot\widehat{\mathbf{e}}'_i.$$

Из свойств ортогонального тензора аналогичные соотношения следуют и для векторов сопряженного базиса:

$$\widehat{\mathbf{e}}'^i = \widehat{\mathbf{e}}^i\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}^T\cdot\widehat{\mathbf{e}}^i,\ \widehat{\mathbf{e}}^i = \widehat{\mathbf{e}}'^i\cdot\mathbf{O}^T = \mathbf{O}\cdot\widehat{\mathbf{e}}'^i.$$

Произвольный тензор $\mathbf{Q} = \widehat{Q}^{i_1\ldots i_n}\widehat{\mathbf{e}}_{i_1}\ldots\widehat{\mathbf{e}}_{i_n}$ ранга n называется индифферентным, если в движениях $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ его компоненты в базисах $\widehat{\mathbf{e}}_i$ и $\widehat{\mathbf{e}}'_i$ не изменяются:

$$(1.2)\quad \mathbf{Q}'(\mathbf{r}') = \widehat{Q}'^{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}')\,\widehat{\mathbf{e}}'_{i_1}\ldots\widehat{\mathbf{e}}'_{i_n} = \widehat{Q}^{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r})\,\widehat{\mathbf{e}}_{i_1}\cdot\mathbf{O}\ldots\widehat{\mathbf{e}}_{i_n}\cdot\mathbf{O}\quad \forall t.$$

Сам тензор $\mathbf{Q}$, естественно, в указанных движениях отличается, $\mathbf{Q}'(\mathbf{r}') \neq \mathbf{Q}(\mathbf{r})$. Для двухвалентного тензора, например, из (1.2) $\mathbf{Q}'(\mathbf{r}') = \mathbf{O}^T\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{O}$.

Введем также понятие инвариантного по отношению к жесткому движению тензора: произвольный тензор $\mathbf{Q}$ ранга n называется инвариантным к жесткому движению, если его компоненты в базисе $\overset{\circ}{\mathbf{e}}_i$ в движениях $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одинаковы $\forall t$:

$$(1.3)\qquad \overset{\circ}{Q}'^{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}') = \overset{\circ}{Q}^{i_1\ldots i_n}(\mathbf{r}).$$

Из (1.3) в силу неизменности базиса в $\mathcal{K}_0$ вытекает $\mathbf{Q}'(\mathbf{r}') = \mathbf{Q}(\mathbf{r})$.

К индифферентным тензорам относятся, например, тензор деформаций Альманси $\mathbf{A}$, правый тензор искажений $\mathbf{V}$, логарифмическая мера деформации $\widehat{\mathbf{H}} = \ln\mathbf{V}$, тензор напряжений Коши (Эйлера) $\boldsymbol{\sigma}$. Инвариантными по отношению к жесткому движению являются тензор деформаций Коши — Грина $\mathbf{C}$, левый тензор искажений $\mathbf{U}$, логарифмическая мера деформации $\overset{\circ}{\mathbf{H}} = \ln\mathbf{U}$, второй тензор Пиола — Кирхгофа.

В формулировке определяющих соотношений теории пластичности используются обычно производные от тензоров — мер напряженного и деформированного состояний. Очевидно, полные (субстанциональные) производные приведенных выше инвариантных тензоров также инвариантны по отношению к жесткому движению. Нетрудно показать, что субстанциональные производные индифферентных тензоров неиндифферентны. В силу этого в механике сплошных сред широко используются индифферентные производные индифферентных тензоров, к которым относятся и некоторые коротационные производные.

Следует отметить, что в большинстве работ, посвященных геометрически нелинейным проблемам, различные индифферентные производные вводятся формальным образом, без выяснения их физического смысла. Исключение в этом смысле представляют работы [1—4]. В [1—3] рассматривается физический смысл производной Яуманна, в [4] — производные Яуманна, Олдройда, Коттер и Ривлина и некоторые другие. Однако объективные производные в цитируемых работах определяются через компоненты тензоров, что, во-первых, усложняет выводы, во-вторых, требует для проведения последних некоторых предположений (например, о совпадении текущей и отсчетной лагранжевых и эйлеровой систем координат в исследуемый момент времени), в-третьих, нередко приводит к неполному толкованию объективных производных тензоров как производных тех или иных компонент анализируемого тензора. В настоящей работе коротационные производные тензоров вводятся как относительные скорости изменения тензоров, определяемые наблюдателем в той или иной подвижной системе координат. При этом все выводы проведены в тензорной (символической, бескомпонентной) форме, что существенно упрощает выкладки и устраняет необходимость введения упомянутых выше предположений.

Рассмотрим произвольную частицу $\mathscr{M}$ сплошной среды вместе с ее малой окрестностью, состояние которой можно считать однородным. Свяжем с частицей некоторую подвижную систему координат $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ с базисом $\mathbf{q}_i$ (сопряженный базис $\mathbf{q}^i$), причем будем полагать, что при жестком движении частицы (с малой окрестностью) система координат $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ совершает идентичное движение. Пусть вектор $\mathbf{a}$ и тензор 2-го ранга $\mathbf{Q}$, представляющие собой характеристики движущейся среды, являются индифферентными.

Коротационными производными тензоров будем называть относительные скорости их изменения по отношению к системе $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ с базисом $\mathbf{q}_i$ (или $\mathbf{q}^i$). Так, для вектора а и тензора $\mathbf{Q}$ относительные скорости $\mathbf{a}^r$ и $\mathbf{Q}^r$, согласно известному в общей механике определению, можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{a}^r(\mathbf{q}_i) = \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q}^i)\right]\mathbf{q}_i = (\dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{q}^i + \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{q}}^i)\,\mathbf{q}_i; \tag{1.4}$$

$$\mathbf{Q}^r(\mathbf{q}_i) = (\mathbf{q}^i\cdot\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{q}^j + \dot{\mathbf{q}}^i\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{q}^j + \mathbf{q}^i\cdot\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{q}}^j)\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j; \tag{1.5}$$

$$\mathbf{a}^r(\mathbf{q}^i) = (\dot{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{q}_i + \mathbf{a}\cdot\dot{\mathbf{q}}_i)\mathbf{q}^i; \tag{1.6}$$

$$\mathbf{Q}^r(\mathbf{q}^i) = (\mathbf{q}_i\cdot\dot{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{q}_j + \dot{\mathbf{q}}_i\cdot\mathbf{Q}\cdot\mathbf{q}_j + \mathbf{q}_i\cdot\mathbf{Q}\cdot\dot{\mathbf{q}}_j)\mathbf{q}^i\mathbf{q}^j. \tag{1.7}$$

В случае жесткой декартовой ортогональной системы $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ различие между (1.4) и (1.6), (1.5) и (1.7) исчезает.

Соотношения (1.4)—(1.7) позволяют получить известные коротационные производные. Рассмотрим некоторые из них. Пусть в качестве подвижной системы выбрана лагранжева сопутствующая система $\mathscr{M}\ \xi^1\xi^2\xi^3$ с базисом $\hat{\mathbf{e}}_i$. Можно показать, что

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v} = \hat{\nabla}\mathbf{v}^T\cdot\hat{\mathbf{e}}_i; \tag{1.8}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}^i = -\hat{\nabla}\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}}^i = -\hat{\mathbf{e}}^i\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v}^T, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости перемещения; $\hat{\nabla}(\cdot) = \hat{\mathbf{e}}^i\dfrac{\partial(\cdot)}{\partial\xi^i}$ — оператор Гамильтона (набла). Используя (1.9), из (1.4), (1.5) получаем так называемую производную Олдройда [5] вектора и тензора 2-го ранга:

$$\mathbf{a}^{\mathrm{Ol}} = \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v} = \dot{\mathbf{a}} - \hat{\nabla}\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{a},\quad \mathbf{Q}^{\mathrm{Ol}} = \dot{\mathbf{Q}} - \hat{\nabla}\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\cdot\hat{\nabla}\mathbf{v}.$$

Связывая подвижную систему координат с векторами сопряженного базиса $\hat{\mathbf{e}}^i$, из (1.8), (1.6), (1.7) определяем соответствующие относительные скорости изменения вектора и тензора, называемые производными Коттер и Ривлина [6]:

$$\mathbf{a}^{CR} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v}^T, \quad \mathbf{Q}^{CR} = \dot{\mathbf{Q}} + \hat{\nabla}\mathbf{v} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v}^T.$$

Заметим, что тензор деформации скорости $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v} + \hat{\nabla}\mathbf{v}^T)$ представляет собой производную Коттер и Ривлина тензора деформаций Альманси: $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{CR}$. Можно показать также, что известная [1] производная Трусделла тензора напряжений Коши

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \hat{\nabla}\mathbf{v}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\nabla}\mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma}(\hat{\nabla} \cdot \mathbf{v})$$

с точностью до скалярного множителя совпадает с производной Олдройда тензора Кирхгофа $\mathbf{t} = \frac{\mathring{\rho}}{\hat{\rho}}\boldsymbol{\sigma}$, т. е.

$$\boldsymbol{\sigma}^{Tr} = \frac{\hat{\rho}}{\mathring{\rho}}\mathbf{t}^{\text{Ol}}$$

($\mathring{\rho}$, $\hat{\rho}$ — плотность среды в $\mathscr{K}_0$ и $\mathscr{K}_t$).

Недостатком приведенных выше производных является, на наш взгляд, деформируемость систем координат, по отношению к которым эти производные определяют скорость изменения тензоров. Естественно, деформации самой сопутствующей системы требуют при этом дополнительного учета.

Вероятно, в связи с этим большее распространение получили скорости изменения тензоров по отношению к жестким недеформируемым системам координат. Пусть $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ — декартова ортогональная система координат с ортонормированным базисом $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}^i$, поступательно перемещающаяся со скоростью частицы $\mathscr{M}$ и вращающаяся как жесткое целое. Выбор последнего движения осуществляется, вообще говоря, бесчисленным множеством способов. Одновременно с этим можно говорить о бесчисленном множестве представлений движения частицы сплошной среды совокупностью поступательного и вращательного движений как жесткого целого (эту часть движения будем называть «квазитвердым» и отождествлять его с движением системы координат $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$) и деформационного движения. После выбора квазитвердого движения деформационная часть определяется однозначно.

Полагая, что в каждый момент времени система $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ вращается с угловой скоростью материальных волокон, совпадающих с главными осями тензора $\mathbf{D}$ (характеризующейся тензором вихря $\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\hat{\nabla}\mathbf{v}^T - \hat{\nabla}\mathbf{v})$), так что $\dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}^i = \mathbf{W} \cdot \mathbf{q}_i = -\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{W}$, приходим к относительной скорости, называемой производной Яуманна — Нолла [1]:

$$\mathbf{a}^J = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{W} = \dot{\mathbf{a}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{a}; \tag{1.10}$$

$$\mathbf{Q}^J = \dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{W}. \tag{1.11}$$

Пусть квазитвердое мгновенное вращение характеризуется тензором-спином $\boldsymbol{\Omega}$ (определяющим угловую скорость вращения главных осей правого тензора искажений $\mathbf{V}$ относительно главных осей левого тензора искажений $\mathbf{U}$). Тогда относительная скорость изменения характеризуется часто используемой коротационной производной Зарембы [7—9 и др.]

$$\mathbf{a}^Z = \dot{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}; \tag{1.12}$$

$$\mathbf{Q}^Z = \dot{\mathbf{Q}} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \tag{1.13}$$

Аналогичные коротационные производные можно построить, отождествляя мгновенное движение жесткой системы $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$ с движением главных осей правого тензора искажений.

Коротационные производные (1.10)—(1.13) по сравнению с производными Олдройда и Коттер и Ривлина обладают двумя замечательными качествами: а) коротационные производные скалярного произведения тензоров 2-го ранга $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и тензора 2-го ранга на вектор определяются по обычным правилам дифференцирования, например: $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^Z = \mathbf{A}^Z\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}^Z$; б) в случае равенства нулевому тензору коротационной производной вектора или тензора 2-го ранга их инварианты в данный момент времени стационарны. Коротационные производные могут быть определены, вообще говоря, для любых тензоров.

Как отмечается в [10, 11], приемлемые меры деформации и скорости деформации — тензор деформации Генки и его коротационные производные. Приведем выражения для $\widehat{\mathbf{H}}^Z$, $\widehat{\mathbf{H}}^J$, вывод которых более подробно изложен в [10, 11]:

$$\widehat{\mathbf{H}}^Z = \mathbf{D} + \mathbf{L}_Z,\ \widehat{\mathbf{H}}^J = \mathbf{D} + \mathbf{L}_J; \tag{1.14}$$

$$\mathbf{L}_Z = \sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{3} \left\{\left[\frac{2V_kV_i}{V_k^2 - V_i^2}\ln\left(\frac{V_k}{V_i}\right) - 1\right](\widehat{\mathbf{p}}^i\cdot\mathbf{D}\cdot\widehat{\mathbf{p}}^k)\,\widehat{\mathbf{p}}_k\widehat{\mathbf{p}}_i\right\}, \tag{1.15}$$

$$\mathbf{L}_J = \sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{3} \left\{\left[\frac{V_k^2 + V_i^2}{V_k^2 - V_i^2}\ln\left(\frac{V_k}{V_i}\right) - 1\right](\widehat{\mathbf{p}}^i\cdot\mathbf{D}\cdot\widehat{\mathbf{p}}^k)\,\widehat{\mathbf{p}}_k\widehat{\mathbf{p}}_i\right\},$$

$\widehat{\mathbf{p}}_i = \widehat{\mathbf{p}}^i$ — главные векторы; V_i — главные значения правой меры искажения; $\mathscr{L}_Z^{ik} = 0$, $\mathscr{L}_J^{ik} = 0$ при $V_i = V_k$ [10, 11]. Нетрудно видеть, что $\widehat{\mathbf{H}}^Z$, $\widehat{\mathbf{H}}^J$ полностью определяются тензором деформации скорости, положением главных осей и главными значениями тензора $\mathbf{V}$. Первые инварианты $\widehat{\mathbf{H}}^Z$, $\widehat{\mathbf{H}}^J$ совпадают с первыми инвариантами $d\widehat{\mathbf{H}}/dt$, $\mathbf{D}$ и характеризуют скорость изменения объема.

2. В существующих в настоящее время исследованиях [12, 13 и др.] в качестве определяющих используются обычно соотношения теории течения с заменой тензоров приращений напряжений и деформаций производной тензора напряжений Коши в смысле Яуманна — Нолла и тензором деформации скорости соответственно. Однако, как показано в [7], даже при использовании модели гипоупругого материала подобные соотношения приводят к осцилляции напряжений. Сделанный на основании решения задачи простого сдвига с использованием вместо σ^J коротационной производной σ^Z вывод о неприемлемости производной Яуманна — Нолла и пригодности для формулировки определяющих соотношений производной вида (1.13) представляется необоснованным.

Появление осцилляций в определяющих соотношениях указанного вида в большей степени объясняется, на наш взгляд, несоответствием коротационных производных меры напряженного и меры деформированного состояний. Действительно, как показано выше, σ^J есть скорость изменения тензора напряжений Коши, измеряемая наблюдателем, вращающимся вместе с жесткой системой координат с угловой скоростью, соответствующей тензору $\mathbf{W}$. В то же время тензор деформации скорости $\mathbf{D}$, представляющий в анализируемых определяющих соотношениях скорость меры деформированного состояния, есть скорость изменения тензора Альманси, фиксируемая наблюдателем в подвижной деформируемой сопутствующей лагранжевой системе координат с базисом $\widehat{\mathbf{e}}^i$.

Вышесказанное физически оправдывает использование при установлении определяющих соотношений коротационных производных одного вида для меры как напряженного, так и деформированного состояния. Применение различных типов коротационных производных, вероятно, ведет к необходимости введения дополнительных членов в определяющие соотношения, учитывающих различие движений подвижных систем координат. Для упомянутой модельной задачи простого сдвига полосы из квазиупругого материала решение с использованием вместо $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{CR}$ в качестве скорости меры деформированного состояния производной Яуманна — Нолла тензора Альманси $\mathbf{A}^J$ не содержит осциллирующих членов.

Кроме указанного недостатка существующих определяющих соотношений следует отметить, что теория течения даже в случае малых деформаций применима лишь для ограниченного класса процессов пластического деформирования по траекториям малой кривизны [14]. В то же время для малых деформаций разработана и получила всеобщее признание теория упругопластических процессов [15]. В связи с этим предпринята попытка обобщения теории упругопластических процессов на случай больших пластических деформаций.

Одним из основных понятий теории упругопластических процессов является понятие образа процесса нагружения [15]. При этом для построения траектории деформации исследуемой частицы в каждый момент времени необходимо рассматривать деформирование одной и той же тройки материальных волокон. Анализ возможных способов разложения движения на квазитвердое и деформационное дает возможность заключить, что последнему требованию удовлетворяет представление конечного перемещения с применением полярного разложения градиента места. В этом случае для выделения квазитвердого движения используется ортогональная декартова подвижная система координат $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$, вращающаяся в каждый момент времени с угловой скоростью, соответствующей тензору спина $\mathbf{\Omega}$, тогда деформационная часть описывается производной Зарембы тензора деформации. В качестве последнего используется логарифмическая мера деформации $\hat{\mathbf{H}}$. Траектория деформации и вектор напряжения [15] в каждый момент времени строятся по компонентам $\hat{\mathbf{H}}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в базисе $\mathbf{q}^i$ подвижной системы $\mathscr{M}\zeta^1\zeta^2\zeta^3$. Как удалось показать, в достаточно общей форме определяющие уравнения в этом случае имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma}^Z = \mathbf{F} : \hat{\mathbf{H}}^Z + \mathbf{R}, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{F}$ — четырехвалентный тензор свойств (различный для разных частных теорий); $\mathbf{R}$ — двухвалентный тензор, не зависящий от $\hat{\mathbf{H}}^Z$; $\hat{\mathbf{H}}^Z$ определяется согласно (1.14), (1.15). При этом все входящие в (2.1) тензоры индифферентны. В [10] приведены выражения тензоров $\mathbf{F}$ и $\mathbf{R}$ для различных частных теорий. Например, для деформирования по траекториям средней кривизны тензор $\mathbf{R}$ нулевой, а

$$\mathbf{F} = \frac{\Phi'(s) - k(s)\,\sigma_{\text{и}}(s)}{\sigma_{\text{и}}^2(s)}\,\mathbf{SS} + \frac{\sigma_{\text{и}}(s)\,k(s)}{2}\,(\mathbf{C}_{\text{II}} + \mathbf{C}_{\text{III}}) + \frac{K - \sigma_{\text{и}}(s)\,k(s)}{3}\,\mathbf{C}_{\text{I}}.$$

Здесь $\Phi(s)$ — универсальная функция, характеризующая скалярные свойства материала; $\Phi'(s) = \partial\Phi(s)/\partial s$; $\sigma_{\text{и}}(s)$ — интенсивность напряжений; $\mathbf{S}$ — девиатор тензора напряжений; $\mathbf{C}_{\text{I}}$, $\mathbf{C}_{\text{II}}$, $\mathbf{C}_{\text{III}}$ — изотропные тензоры 4-го ранга [1]; K — модуль объемного сжатия; $k(s)$ — функция, характеризующая изменение угла сближения (угла между вектором напряжения и касательной к траектории деформации); s — длина дуги траектории деформации:

$$s = \int_0^t \left(\hat{\mathbf{h}}^Z : \hat{\mathbf{h}}^Z\right)^{\frac{1}{2}} d\tau, \quad \hat{\mathbf{h}}^Z = \hat{\mathbf{H}}^Z - \frac{1}{3} I_1\left(\hat{\mathbf{H}}^Z\right)\mathbf{E}.$$

Альтернативой к используемому подходу, вероятно, может быть применение для обобщения теории упругопластических процессов инвариантных тензоров и субстанциональных производных от них (также инвариантных). Подобное построение определяющих соотношений более эффективно при использовании лагранжева подхода и обладает тем преимуществом, что снимается вопрос о неединственности разложения движения деформируемой среды на квазитвердое и деформационное. При этом отпадает необходимость в использовании коротационных производных, поскольку жесткое движение при применении инвариантных тензоров не приводит к их изменению. Окончательный вывод о приемлемости определяющего соотношения вида (2.1) может быть сделан только на основе результатов экспериментов на сложное нагружение при больших пластических деформациях. В настоящее время такие данные, к сожалению, отсутствуют. Следует отметить, что последние получаются только на основе предварительного теоретического анализа возможных типов определяющих соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
2. **Прагер В.** Элементарный анализ определений скорости изменения напряжений // Сб. пер. Механика.— 1960.— № 3 (61).
3. **Прагер В.** Введение в механику сплошных сред.— М.: ИЛ, 1963.
4. **Седов Л. И.** Введение в механику сплошной среды.— М.: Физматгиз, 1962.
5. **Oldroyd J. G.** On the formulation of reological equations of state // Proc. Roy. Soc.— 1950.— V. A200.— P. 523.
6. **Cotter B. A., Rivlin R. S.** Tensors associated with time-dependent stress // Quart. Appl. Math.— 1955.— V. 13.— P. 177.
7. **Dafalias Y. E.** Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations // Trans. ASME. J. Appl. Mech.— 1983.— V. 50, N 3.
8. **Gurtin M. E. and Spear K.** On the relationship between the logarithmic strain rate and stretching tensor // Intern. J. Solids and Struct.— 1983.— V. 19, N 5.
9. **Maaskant R., Chaaban A., Godolek P. E. G. et al.** Interrelationships among stress rates // Mech. Res. Commun.— 1984.— V. 11, N 1.
10. **Трусов П. В.** О построении образа процесса нагружения и методе корректирующего анализа при исследовании больших пластических деформаций.— Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1984.— М., 1984.— Деп. в ВИНИТИ, № 5939—84.
11. **Трусов П. В., Мулюков В. В., Онискив В. Д.** Коротационные производные и определяющие соотношения в теории больших деформаций.— Пермь: Перм. политехн. ин-т, 1985.— М., 1985.— Деп. в ВИНИТИ, № 8020—85.
12. **Lubarda V.** The elastic-plastic constitutive relation // Teor. i primen. meh.— 1981.— V. 7.— P. 101.
13. **Sidoroff F.** Incremental constitutive equation for large strain elastoplasticity // Intern. J. Engng Sci.— 1982.— V. 20, N 2.
14. **Ленский В. С.** Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // Упругость и неупругость.— М.: Изд-во МГУ, 1978.— Вып. 5.
15. **Ильюшин А. А.** Пластичность. Основы общей математической теории.— М.: Изд-во АН СССР, 1963.

Поступила 12/II 1986 г.

УДК 533.95 : 538.4

ОБЩИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В РЕЛЬСОТРОННЫХ УСКОРИТЕЛЯХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Ю. Л. Башкатов, Г. А. Швецов

(Новосибирск)

Вопрос об энергетических соотношениях — один из важнейших при описании работы рельсотронных ускорителей твердых тел и рассмотрении их потенциальных возможностей. При ограниченном запасе энергии в источнике питания эффективность преобразования электромагнитной энергии в кинетическую энергию ускоряемого тела определяет, по существу, возможный масштаб эксперимента. Этой задаче посвящено большое количество работ (например, [1—9]). При анализе КПД преобразования энергии источника в кинетическую энергию тела возникает вопрос об оптимальном выборе параметров рассматриваемой системы, обеспечивающих наиболее эффективный переход энергии источника в кинетическую энергию ускоряемого тела: энергии источника, индуктивности и активного сопротивления цепи, погонной индуктивности и длины ускорителя, массы тела и других параметров, характеризующих только данный тип источников. Так как число определяющих параметров невелико, основной метод сводился к численному решению определяющих процесс ускорения уравнений в сочетании с аналитическим исследованием асимптотических режимов. Такой подход