

ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ОСЕВЫМ ЭЛЕКТРОДОМ-ЭМИТТЕРОМ

В. И. Грабовский

(Москва)

Рассматривается течение несжимаемой невязкой униполярно заряженной жидкости в плоском канале $|x| < \infty$, $|y| \leq h$ с проводящими стенками, когда электрод-эмиттер заряженных частиц располагается вдоль оси $y = 0$. Предполагается, что подвижность заряженных частиц постоянна, а распределение заряда на эмиттере аппроксимируется единичной функцией Хевисайда. Решение задачи проводится с помощью линеаризации уравнений по параметру электрогидровзаимодействия. Определяется поведение электрических параметров и находятся деформированные профили скорости и давления, реализующиеся вниз по потоку от зоны, в которой электростатические силы имеют вихревой характер. Эти профили удается определить, не решая линеаризованную систему гидродинамических уравнений в частных производных во всей области течения. Однако деформированные профили зависят от распределения электрических параметров по всей длине канала.

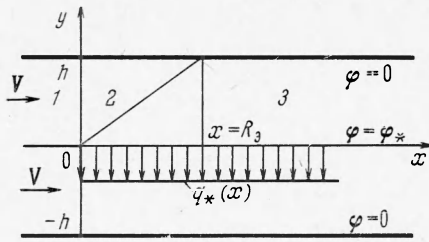
Исследование электрогидродинамических невязких течений в каналах в большинстве случаев проводится в одномерном приближении (см., например, [1,2]). Однако во многих устройствах введение электрического заряда в поток жидкости осуществляется таким образом, что на определенном участке течения электрические силы оказываются непотенциальными, и поэтому течение приобретает пространственный характер (в простейшем случае оно становится двумерным). Один из примеров таких течений рассмотрен в работе [3], в которой изучалось движение жидкости с нулевой подвижностью заряженных частиц в плоском канале с непроводящими стенками. В указанной статье определялось возмущенное движение жидкости при различных законах подачи заряженных частиц через электрод-эмиттер.

Наряду с каналами, имеющими непроводящие стенки (когда эмиттер и нейтрализатор располагаются в поперечных сечениях канала), целесообразно рассмотреть также другие схемы расположения электродов и ввода зарядов в поток жидкости. Необходимость рассмотрения таких схем связана с тем, что существуют самые разнообразные способы введения зарядов в поток: эмиттирующие сетки, продольно расположенные иглы, с которых стекают заряды, и т. д. Одной из возможных является схема устройства с проводящими стенками, когда электрод-эмиттер располагается вдоль оси канала. Эта схема может моделировать некоторые процессы, происходящие в коронирующих устройствах.

Данная статья посвящена описанию электрических полей и асимптотического возмущенного движения несжимаемой среды в указанной выше схеме канала. При этом, так же как и в работе [3], исследование проводится в предположении невязкой жидкости, что возможно, когда длина рабочей зоны канала не намного превышает его поперечные размеры. Анализ выполняется с помощью метода возмущений (параметр электрогидровзаимодействия считается малым). Подвижность заряженных частиц предполагается произвольной постоянной величиной.

1. Рассмотрим плоское движение невязкой несжимаемой жидкости в канале $|x| < \infty$, $|y| \leq h$. Пусть при $x = -\infty$ задан поток с однородной скоростью U (фиг. 1). Будем считать, что стенки представляют собой электроды, находящиеся под нулевым потенциалом. Пусть в середину потока (по оси Ox) введен электрод-эмиттер положительных электрических зарядов, в силу своей малой толщины не вносящий гидродинамические возмущения в поток.

Так как процессы в верхней и нижней частях канала симметричны, то в дальнейшем можно, например, рассматривать только верхнюю область $0 \leq y \leq h$, симметрично распространив полученное решение на нижнюю зону.



Фиг. 1

Электрод-эмиттер находится под постоянным потенциалом $\varphi_* > 0$, и под действием возникающего электрического поля заряд с эмиттера выносятся в поток жидкости. В канале образуется область пространственного электрического заряда, форма которой зависит от величин скорости потока жидкости и электрического поля (внешнего и индуцированного). В свою очередь, взаимодействие жидкости с заряженными частицами этой области изменяет гидродинамические параметры потока. Указанное движение жидкости описывается следующей системой уравнений электрогидродинамики:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + SqE_x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + SqE_y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [q(uR_s + E_x)] + \frac{\partial}{\partial y} [q(vR_s + E_y)] = 0$$

$$\Delta\varphi = -Nq, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (\mathbf{j} = q\mathbf{V}R_s + q\mathbf{E}) \quad (1.2)$$

$$\left(\mathbf{V} = (u, v, 0), \mathbf{E} = (E_x, E_y, 0), R_s = \frac{Uh}{b\varphi_*}, S = \frac{q_*\varphi_*}{\rho U^2}, N = \frac{4\pi q_* h^2}{\varepsilon\varphi_*} \right)$$

Система (1.1), (1.2) записана в безразмерном виде. За характерные скорость, давление и размер выбраны U , ρU^2 и h (ρ — плотность жидкости). Характерными значениями для φ (потенциала электрического поля), \mathbf{E} , q (плотности электрического заряда) и j (плотности электрического тока) являются соответственно φ_* , φ_*/h , q_* и $bq_*\varphi_*/h$ (b — подвижность заряженных частиц).

Безразмерный критерий S по порядку величины равен отношению электростатической силы к силе инерции. Параметр N характеризует величину индуцированного электрического поля. Электрическое число Рейнольдса R_s по порядку величины определяет отношение конвекционного тока к току проводимости.

Сформулируем граничные условия, при которых должна решаться система (1.1), (1.2). Из условий однородности потока при $x = -\infty$ и непротекания жидкости через электроды получаем

$$u(-\infty, y) \equiv 1, \quad v(x, 1) = v(x, 0) \equiv 0$$

$$\left(\int_0^1 u dy = 1, \quad x \in (-\infty, \infty) \right) \quad (1.3)$$

Для электрических величин граничные условия очевидны

$$\varphi(x, 0) \equiv 1, \quad \varphi(x, 1) \equiv 0 \quad (1.4)$$

Кроме того, на эмиттере необходимо задать распределение плотности зарядов $q(x, 0) = f(x)$. Пусть для определенности $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.1), (1.2) с граничными условиями (1.3), (1.4) и (1.5) и заданными значениями безразмерных критериев S , N , R_s полностью определяет описанное движение жидкости.

Если параметр электрогидровзаимодействия S достаточно мал, то решение задачи можно искать с помощью метода возмущений. В этом слу-

чае электрические величины находятся по невозмущенным распределениям гидродинамических параметров и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\Delta\varphi = -Nq \quad (\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi) \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \left(R_a - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = q \Delta \varphi \quad (1.7)$$

$$\varphi(x, 0) \equiv 1, \quad \varphi(x, 1) \equiv 0, \quad q(x, 0) = \theta(x)$$

Система (1.6), (1.7) получается из (1.2), в которой полагается $u \equiv 1$, $v \equiv 0$, $p = \text{const}$.

Система уравнений для определения возмущений гидродинамических параметров (снабженных нижним индексом 1) находится путем линеаризации системы (1.1) около решения $u \equiv 1$, $v \equiv 0$, $p = \text{const}$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} - Sg \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial p_1}{\partial y} - Sg \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (1.9)$$

$$u_1(-\infty, y) \equiv 0, \quad v_1(x, 0) = v_1(x, 1) \equiv 0 \quad \left(\int_0^1 u_1 dy \equiv 0 \right) \quad (1.10)$$

Величины q и φ , входящие в (1.8), представляют собой решение системы (1.6), (1.7).

В дальнейшем будет проведено исследование полученных систем (1.6), (1.7) и (1.8), (1.9).

2. Решение системы (1.6), (1.7) проводится методом последовательных приближений. Нулевое приближение характеризуется тем, что в канале отсутствуют электрические заряды и, соответственно, индуцированные поля. Поэтому для нулевого приближения имеем

$$q \equiv 0, \quad \varphi = 1 - y \quad (2.1)$$

Найдем теперь объемный электрический заряд в первом приближении. Для этого в уравнение (1.7) поставим нулевое приближение для потенциала. Полученное таким способом уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial x} R_a + \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

решалось методом характеристик [4]. Оно имеет одно семейство характеристик, которые, исходя из точек линии $y = 0$, заполняют все пространство между стенками. Таким образом, при задании граничного условия для q на линии $y = 0$ распределение заряда определяется всюду.

При выбранном граничном условии (1.5) решение уравнения (2.2) имеет вид

$$q = \theta(x - R_a y) = \begin{cases} 0 & (x < R_a y) \\ 1 & (x \geq R_a y) \end{cases} \quad (2.3)$$

Прямая $y = x / R_a$ является граничной для заряда. Ее возникновение связано с наличием двух факторов: сносом зарядов потоком жидкости и движением зарядов во внешнем электрическом поле. Наклон этой линии к оси Ox зависит от величины R_a .

Таким образом, можно выделить три области, которые характеризуются различным распределением заряда: область 1 ($x \leq 0$), где заряд отсутствует; область 2 ($0 \leq x \leq R_a$), где объемный заряд с плотностью, равной единице, занимает только половину области; область 3 ($x \geq R_a$), где плотность заряда всюду тождественно равна единице (фиг. 1).

Перейдем теперь к расчету потенциала в первом приближении. Для этого в уравнение (1.6) необходимо подставить распределение заряда

(2.3). Для решения полученного таким образом уравнения введем вспомогательный потенциал $\psi = \varphi - 1 + y$, для которого получаем уравнение

$$\Delta\psi = -N\theta(x - R_0 y), \quad \psi(x, 0) = \psi(x, 1) \equiv 0 \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) можно найти методом Фурье, представляя искомую функцию в каждой из областей 1, 2, 3 в виде следующих рядов:

$$\psi_i(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}(x) \sin(k\pi y) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в уравнение (2.4), где правая часть также представляется в виде ряда Фурье, для функций $a_{ik}(x)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения, граничные условия для решения которых следуют из ограниченности потенциала на бесконечности и непрерывности нормальных и касательных составляющих электрических полей на границах между областями 1, 2, 3.

Соответствующее решение для φ имеет вид

$$\begin{aligned} & \{x < 0\} \\ \varphi_1 &= 1 - y + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi y) \sin^2 \alpha \frac{N}{(k\pi)^2} e^{k\pi x} \{1 - \cos(k\pi) e^{-k\pi \operatorname{ctg} \alpha}\} \\ & \{0 \leq x \leq \operatorname{ctg} \alpha\} \\ \varphi_2 &= 1 - y + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi y) \sin^2 \alpha \frac{N}{(k\pi)^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{2}{\sin^2 \alpha} [1 - \cos^2 \alpha \cos(k\pi x \operatorname{tg} \alpha)] - \cos(k\pi) e^{k\pi(x - \operatorname{ctg} \alpha)} - e^{-k\pi x} \right\} \\ & \{x \geq \operatorname{ctg} \alpha\} \\ \varphi_3 &= 1 - y + \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi y) \sin^2 \alpha \frac{N}{(k\pi)^2} \left\{ e^{k\pi(\operatorname{ctg} \alpha - x)} \cos(k\pi) - e^{-k\pi x} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sin^2 \alpha} [1 - \cos(k\pi)] \right\} \\ & (\operatorname{ctg} \alpha = R_0) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Полученное решение позволяет проанализировать поведение электрических величин во всем канале при наличии объемного заряда.

На фиг. 2 изображено распределение продольной составляющей электрического поля¹ по длине канала при $y = \operatorname{const}$. На фиг. 3 показана зависимость поперечной составляющей электрического поля от осевой координаты при $y = \operatorname{const}$. (Принималось, что $N = 0.5$, $R_0 = 1$.) Из графиков следует, что все максимумы или изломы расположены на линии $y = x$, т. е. все существенные изменения электрических величин находятся вблизи границы области существования зарядов.

Распределение электрического заряда во втором приближении находится из уравнения (1.7), в котором потенциал φ и его производные определяются с помощью формул (2.6). Соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial x} \left(R_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -qN\theta(x - yR_0), \quad q(x, 0) = \theta(x) \quad (2.7)$$

Характеристиками уравнения (2.7) являются линии, определяемые соотношением

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \varphi / \partial y}{R_0 - \partial \varphi / \partial x} \quad (2.8)$$

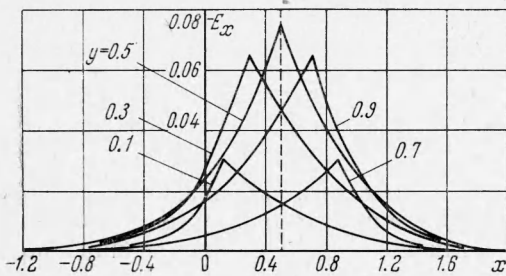
¹ На фиг. 2 допущена неточность: значения $y = 0.7$ и $y = 0.9$ надлежит поменять местами.

Распределение плотности электрического заряда на этих характеристиках дает выражение

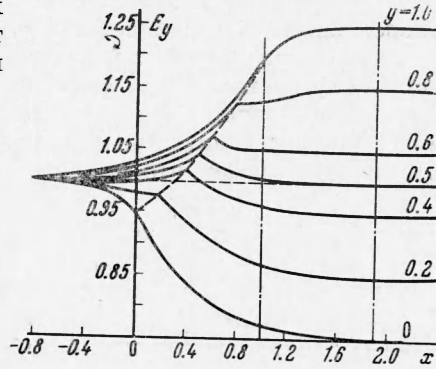
$$q = \exp \left\{ -N \int_0^y \frac{\theta(x - yR_0)}{E_y} dy \right\} \quad (2.9)$$

Выражения (2.8), (2.9) позволяют определить деформацию области существования объемного заряда по сравнению с первым приближением.

Оценим точность описанного процесса последовательных приближений, который останавливается на вычислении электрического заряда по формулам (2.8) и (2.9). Для этого произведем сравнение приближенно рассчитанных параметров при $x = \infty$ с их точными значениями. (Последние могут быть определены путем интегрирования



Фиг. 2



Фиг. 3

обыкновенных дифференциальных уравнений. Это следует из того, что при $x = \infty$ все электрические параметры зависят только от y .) Естественно, что быстрота сходимости указанного метода зависит от величины параметра N . Так, расхождение между приближенными и точными значениями плотности электрического заряда при $y = 1$ в случае $N = 0.5$ оказывается меньше 10%. Если же $N = 0.3$, то расхождение не превышает 5%.

3. Определим теперь возмущения гидродинамических параметров u_1 , v_1 , p_1 .

Следует отметить, что для расчета возмущений, реализующихся далеко вниз по потоку от края зоны объемных зарядов, нет необходимости получать решение системы (1.8), (1.9) во всей области течения. Для этого, как было показано в [3], надо лишь проинтегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения. Получим соответствующие дифференциальные уравнения в данном случае. Принимая во внимание, что при $x = \infty$ параметры задачи не зависят от x , из уравнений (1.8) и (1.9) следует:

$$\frac{\partial v_1^+}{\partial y} = 0, \quad \frac{dp_1^+}{dy} = Sq^+ E_y^+ \quad (3.1)$$

(с индексом плюс — значения соответствующих величин при $x = \infty$).

Исключая из уравнений (1.8) давление p_1 , интегрируя полученное соотношение по x в пределах $(-\infty, x)$ и учитывая, что $q(-\infty, y) \equiv 0$, $u_1(-\infty, y) \equiv 0$, получаем

$$\frac{du_1^+}{dy} = S \left[\frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} q E_x dx - q^+ E_y^+ \right] \quad (3.2)$$

На основании решений (2.6) и (2.9) имеем

$$q^+ = \frac{2 - N}{2Ny - N + 2}, \quad E_y^+ = Ny + 1 - \frac{N}{2}, \quad E_x^+ \equiv 0$$

