с граничными условиями (2.5), (2.6). Отсюда вытекает, что функция z при $\lambda = 0$ терпит излом. Производная от плотности δ' в точке $\lambda = 0$ непрерывна. Решение можно построить численно. На фиг. 1 изображен профиль плотности для $n = 10$.

Поступила 21 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Беленький С. З., Фрадкин Е. С.** Теория турбулентного перемешивания.— «Труды ФИАН им. Лебедева», 1965, т. 29, с. 207—238.
2. **Неуважаев В. Е.** К теории турбулентного перемешивания.— «Докл. АН СССР», 1975, т. 222, № 5, с. 1053—1056.
3. **Колмогоров А. Н.** К вырождению изотропной турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости.— «Докл. АН СССР», 1941, т. 31, № 6, с. 538—541.

УДК 532.542

О КОЛЕБАНИЯХ ГАЗА В ТРУБЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ АКТИВНОЙ НАГРУЗКОЙ

А. П. Владиславлев, В. М. Писаревский, Ю. Б. Пономаренко

(*Москва*)

Вследствие особенностей рабочего процесса в цилиндре поршневого компрессора в присоединенной трубопроводной системе возникают колебания давления и скорости транспортируемой среды — пульсирующий поток газа. Колебательные газодинамические процессы в трубах приводят к существенному снижению эффективности и надежности эксплуатации всей компрессорной установки. Одним из наиболее результативных методов снижения влияния пульсирующего потока газа является согласование начального участка. Сущность метода заключается в установке после ближайшего к цилиндру участка трубопровода сосредоточенного сопротивления (нагрузки), величина которого равна волновому сопротивлению трубы [1]. Поскольку колебания газа являются низкочастотными, сопротивление нагрузки, как и в стационарном потоке, оказывается активным и нелинейным [2]. В связи с этим возможность согласования нелинейным сопротивлением нуждается в дополнительном исследовании.

Одномерное неустановившееся движение газа в круглой трубе постоянного сечения со скоростью движения, много меньшей скорости звука, описывается системой уравнений [3]

$$\dot{\rho} + w' = 0,\ \dot{w} + (w^2/\rho + \rho^\gamma/\gamma)' + (\lambda/\rho)w|w| = 0\ (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{1}$$

Система (1) записана в безразмерном виде (длина трубы, скорость звука и плотность равновесного газа равны 1); w — поток; ρ — относительная плотность; γ — показатель политропы; λ — безразмерный коэффициент гидравлического сопротивления. Точка означает дифференцирование по времени t; штрих — по координате x.

Граничные условия имеют вид

$$w = f(\omega t)\ (x = 0);\ (\rho^\gamma - 1)/\gamma = (\eta/\rho)w|w|\ (x = 1), \tag{2}$$

где f — заданная периодическая функция с периодом 2π; η — коэффициент гидравлического сопротивления сосредоточенного включения в формуле Дарси — Вейсбаха.

В дальнейшем будем считать $\eta \gg 1$, $\lambda \lesssim 1$, при этом основной нелинейный эффект связан с активным сопротивлением при $x = 1$.

Полагая в (1), (2) $w_* = \eta w$, $\xi_* = \eta(\rho - 1)$, $f_* = \eta f$ и пренебрегая обратными степенями η, получим, опуская индекс *,

$$\dot{\xi} + w' = 0, \ \dot{w} + \xi' = 0 \ (0 \leqslant x \leqslant 1); \tag{3}$$

$$(w)_0 = f(\theta), \ (\xi)_1 = (w|w|)_1 \ (\theta = \omega t). \tag{4}$$

Общее решение линейной системы (3) выражается через функцию G аргумента $\omega(t - x)$ и функцию H аргумента $\omega(t + x - 2)$ в виде

$$\xi = G + H, \ w = G - H. \tag{5}$$

Полагая $F(\theta) = G(\theta) - H(\theta)$, найдем из (5) и второго условия (4)

$$2G = F(|F| + 1), \ 2H = F(|F| - 1). \tag{6}$$

Для определения $F(\theta)$ из (5), (6) и первого условия (4) получаем разностное уравнение

$$2f = F|F| + F - F_-|F_-| + F_-. \tag{7}$$

Здесь и ниже используется обозначение $\varphi_-(\theta) = \varphi(\theta - 2\omega)$. В дальнейшем ограничимся нахождением $F(\theta)$ с периодом 2π. Их (7) имеем

$$F_- = F = f \ (\omega = \pi n, \ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

В случае $\omega = (1/2)\pi n$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$) для нахождения F заменим в (7) θ на $\theta - 2\omega$. При этом получаем

$$2f_- = F|F|_- + F_- - F|F| + F.$$

Отсюда и из (7) следует

$$f + f_- = F + F_-, \ f - f_- = F|F| - F_-|F_-|. \tag{9}$$

Если $f_- = -f$, то

$$f|f|^{-1/2} = -F_- = F. \tag{10}$$

В общем случае положим в (9)

$$f - f_- = 2\beta|\beta|, \ f + f_- = 2\alpha\beta, \ F = \beta(\alpha + \varkappa), \ F_- = \beta(\alpha - \varkappa). \tag{11}$$

Тогда для определения $\varkappa$ получаем уравнение

$$(\alpha + \varkappa)|\alpha + \varkappa| - (\alpha - \varkappa)|\alpha - \varkappa| = 2,$$

решение которого есть

$$\varkappa = \begin{cases} \sqrt{1 - \alpha^2}, & 2\alpha^2 \leqslant 1 \\ 1/(2|\alpha|), & 2\alpha^2 \geqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

При $f \to f_-$ из (11), (12) получается (8) в соответствии с тем, что частота возбуждения удваивается.

В качестве примера рассмотрим случай гармонического возбуждения

(13) $$f = \varepsilon \cos \theta.$$

Из (5), (8) имеем

(14) $$2w(x, t) = \varepsilon \cos \theta_- + \varepsilon^2 \cos \theta_- |\cos \theta_-| - \varepsilon^2 \cos\theta_+ |\cos \theta_+| + \varepsilon^2 \cos \theta_+ (\theta_\pm = \theta \pm \omega x,\ \omega = \pi n,\ n = 1, 2, \ldots).$$

При $\varepsilon \ll 1$ решение (14) близко к гармоническому, являющемуся решением линейной задачи (3), (4) с условием $(\zeta)_1 = 0$. Это и следовало ожидать в связи с тем, что рассматриваемые частоты отличаются от собственных частот линейной задачи, и поэтому при $\varepsilon \ll 1$ нелинейные эффекты несущественны.

При $\varepsilon \gtrsim 1$ форма колебаний может отличаться от гармонической. Для оценки амплитуд гармоник высших порядков представим (14) через коэффициенты ряда [4]

(15) $$\cos \theta |\cos \theta| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)\theta, \quad a_k = \frac{8(-1)^k}{\pi(1-4k^2)(2k+3)}$$

в виде

(16) $$2w = (\varepsilon + \varepsilon^2 a_0) \cos \theta_- + (\varepsilon - \varepsilon^2 a_0) \cos \theta_+ + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k [\cos(2k+1)\theta_- - \cos(2k+1)\theta_+].$$

Из (15) следует, что амплитуды высших гармоник относительно малы, и поэтому режим согласования оказывается возможным.

По аналогии с линейными волноводами можно определить согласование как режим, в котором скорость (16) не содержит первой гармоники обратной волны (коэффициент при $\cos \theta_+$ равен нулю). В этом случае

(17) $$w = \varepsilon \left[\cos \omega (t - x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{a_0} \sin(2k+1)\omega t \sin(2k+1)\omega x \right],$$

$$\varepsilon = \frac{1}{a_0} = \frac{3\pi}{8} \approx 1{,}18.$$

Отличие амплитуды скорости (17) от постоянной обусловлено малыми высшими гармониками и поэтому невелико. Для частот $\omega = (1/2)\pi n$ $(n = 1, 3, 5, \ldots)$ из (5), (6), (10), (13) получаем

(18) $$2w = \varepsilon \cos \theta_- + \sqrt{\varepsilon}\, b(\theta_-) + \varepsilon \cos\theta_+ - \sqrt{\varepsilon}\, b(\theta_+),$$
$$b(\theta) = \cos \theta |\cos \theta|^{-1/2}.$$

В отличие от (14) при $\varepsilon \ll 1$ скорость $w \sim \sqrt{\varepsilon} \gg \varepsilon$ и определяется нелинейными эффектами. Это связано с тем, что рассматриваемые частоты являются резонансными частотами линейной задачи. Запишем (18) в виде ряда, используя разложение [3],

$$b(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos(2k+1)\theta, \quad b_k = \frac{2(-1)^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(k+\frac{5}{4}\right)}{(4k+1)\,\Gamma\left(k+\frac{7}{4}\right)},$$

тогда в случае согласования получим

$$\varepsilon = b_0^2 = \frac{4}{\pi}\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma^{-2}\left(\frac{7}{4}\right) \approx 1{,}23, \tag{19}$$

$$w = \varepsilon\left[\cos\omega(t-x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{b_0}\sin(2k+1)\,\omega t\sin(2k+1)\,\omega x\right].$$

Из (17), (19) видно, что значения ε при согласовании близки.

При произвольных частотах задачу (3), (4), (13) можно решить приближенно методом гармонического баланса. Эта задача допускает решение, меняющее знак при замене θ на $\theta + \pi$ (в частных случаях (14), (18) это видно непосредственно). Для отыскания этого решения положим

$$w(1, t) = \sum v_n e^{in\psi} = v(\psi) \quad (\psi = \theta - \varphi,\ v_{-n} = \bar{v}_n,\ n = \pm 1, \pm 3, \ldots), \tag{20}$$

где φ выбрано так, что

$$v(0) = 0,\quad -v(\psi + \pi) = v(\psi) > 0 \quad (0 < \psi < \pi). \tag{21}$$

Тогда из (3), (20) и первого* условия (4) найдем

$$\xi = \sum_m \frac{ie^{im\psi}}{\sin m\omega}\left[v_m\cos m\omega x - \frac{1}{2}\varepsilon\delta_{|m|1}e^{im\varphi}\cos m\omega(1-x)\right]; \tag{22}$$

$$w = \sum_m \frac{e^{im\psi}}{\sin m\omega}\left[v_m\sin m\omega x - \frac{1}{2}\varepsilon\delta_{|m|1}e^{im\varphi}\sin m\omega(1-x)\right].$$

Из второго граничного условия (4) имеем

$$\xi(1, t) = v|v| = \sum_m e^{im\psi}\left(\frac{2i}{\pi}\sum_{n,p}\frac{v_n v_p}{n+p-m}\right). \tag{23}$$

Из сравнения коэффициентов (22), (23) и из (20), (21) получается

$$v_m\cos m\omega - \frac{\varepsilon}{2}\delta_{m1}e^{i\varphi} = \frac{2}{\pi}\sin m\omega\sum_{n,p}\frac{v_n v_p}{n+p-m},$$

$$\sum v_n = 0 \quad (v_{-m} = \bar{v}_m,\ m = 1, 3, 5, \ldots). \tag{24}$$

В гармоническом приближении учитывается лишь первая гармоника. При этом из равенства $v_1 + v_{-1} = 0$ следует $v_1 = -ir$, и для вещественных r, φ из (24) при $m = 1$ имеем

$$(16/3\pi)(\sin\omega)r^2 - i(\cos\omega)r = (\varepsilon/2)e^{i\varphi}. \tag{25}$$

Отсюда

$$[(16/3\pi)r^2\sin\omega]^2 + r^2\cos^2\omega = \varepsilon^2/4,\quad \operatorname{ctg}\varphi = -(16/3\pi)r\operatorname{tg}\omega. \tag{26}$$

С учетом (25) первая гармоника скорости (22) равна

$$(r + (16/3\pi)r^2)\sin(\psi - \omega x + \omega) + (r - (16/3\pi)r^2)\sin(\psi + \omega x - \omega).$$

При $r = 3\pi/16$ имеет место согласование. В этом случае из (26) $\varepsilon = 2r = 3\pi/8$ при любых ω. Найденное значение ε совпадает с точным зна-

* Это условие отражено в (22) членами с символом Кронекера δ_{mn}.

чением (17) и мало отличается от (19). Таким образом, гармоническое приближение оказывается достаточно точным.

В заключение необходимо отметить зависимость амплитуды от частоты при различных значениях ε. Если $\varepsilon \ll 1$, то максимальная амплитуда $\sim \sqrt{\varepsilon}$ и достигается на резонансных частотах $\omega = (1/2)\pi n$ ($n = 1, 3, \ldots$), а минимальная $\sim \varepsilon$ на частотах $\omega = \pi n$ ($n = 1, 2, \ldots$). При $\varepsilon \sim 1$ амплитуда слабо зависит от ω; при $\varepsilon \gg 1$ максимальная амплитуда $\sim \varepsilon^2$ достигается на частотах $\omega = \pi n (n = 1, 2, \ldots)$, а минимальная $\sim \varepsilon$ — на резонансных.

Отмеченные свойства амплитуды связаны с изменением (из-за нелинейности) самого характера граничного условия: при $\varepsilon \to 0$ конец трубы почти открыт ($\xi_1/w_1 \to 0$, так как $w_1 \to 0$), при $\varepsilon \to \infty$ труба почти закрыта. При промежуточных значениях $\varepsilon \sim 1$ достигается режим согласования, в котором отсутствует отраженная от конца волна основной частоты, а амплитуды высших гармоник малы.

Проведенное рассмотрение задачи о колебаниях газа в трубе с нелинейным сопротивлением позволяет отметить следующее:

1) зависимость амплитуды колебаний от частоты существенно изменяется при изменении амплитуды возбуждения (в этом отношении квадратичное сопротивление сильно нелинейное);

2) искажения гармонически возбуждаемых колебаний высшими гармониками относительно невелики (поэтому оказывается возможным режим согласования). В этом отношении квадратичное сопротивление слабо нелинейное.

Поступила 15 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Владиславлев А. С.** и др. Трубопроводы поршневых компрессорных машин. М., «Машиностроение», 1972.
2. **Писаревский В. М.** Импеданс плоской диафрагмы в трубопроводных системах поршневых компрессоров.— В кн.: Вибрация технологических трубопроводов на нефтеперерабатывающих нефтехимических предприятиях. М., ЦНИИТЭнефтехим, 1968.
3. **Чарный И. А.** Основы газовой динамики. М., Гостоитехиздат, 1961.
4. **Рыжик И. С., Градштейн И. М.** Таблицы сумм, рядов, интегралов и произведений. М., Физматгиз, 1962.