

О ЗОНЕ И ФРОНТЕ ТРЕЩИН В УПРУГОМ ТЕЛЕ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ

В. П. Коряков

(Москва)

В работе [1] было предложено описание зоны и фронта трещин, появляющихся в хрупком упругом теле под действием высокого давления, возникающего на стенке полости внутри тела. В данной работе дается некоторый анализ этого описания и предлагается приближенное решение задачи о распространении фронта трещин и движении среды.

§ 1. Для сферически симметричного движения упругой среды уравнение движения имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} \quad (1.1)$$

Здесь r и t — координата и время, u — перемещение частицы вещества, ρ — плотность, σ_r и σ_θ — радиальное и азимутальное напряжения. Для сферически симметричного движения упругой среды, при котором благодаря радиальным трещинам отсутствуют азимутальные напряжения, вид уравнения движения следующий:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r}{r} \quad (1.2)$$

Используя закон Гука, из уравнений (1.1) и (1.2) получаем соответственно

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right), \quad c^2 = \frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1.4)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$u = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{r} \right), \quad \psi_1 = \psi_1 \left(t - \frac{r-r_0}{c} \right), \quad \psi_2 = \psi_2 \left(t + \frac{r-r_0}{c} \right) \quad (1.5)$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 — произвольные функции, r_0 — начальный радиус полости, введенный здесь для удобства в дальнейшем. Общее решение уравнения (1.4) следующее:

$$u = \frac{f_1 + f_2}{r}, \quad f_1 = f_1 \left(t - \frac{r-r_0}{c_0} \right), \quad f_2 = f_2 \left(t + \frac{r-r_0}{c_0} \right) \quad (1.6)$$

Здесь f_1 и f_2 — произвольные функции, которые, так же как ψ_1 и ψ_2 , находятся из граничных условий. Для сплошной упругой среды

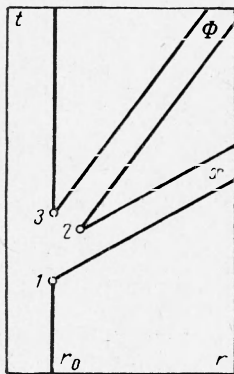
$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma_r = \frac{E[(1-\sigma)u_{rr} + 2\sigma u_{\theta\theta}]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \quad (1.7)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{E(u_{\theta\theta} + \sigma u_{rr})}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad u_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad u_{\theta\theta} = \frac{u}{r}$$

Для зоны радиальных трещин

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma_r = E \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1.8)$$

Далее, как и в [1], рассматривается следующая задача. В некоторый момент времени на сфере радиуса r_0 внутри твердого тела начинает действовать давление, вызывающее сферическую упругую волну. Возникающие в этой волне растягивающие напряжения приводят к образованию зоны радиальных трещин, в которой отсутствуют азимутальные напряжения. Линию раздела между этими зонами называем фронтом трещин. Так как упругая волна идет по невозмущенной, покоящейся среде, она



Фиг. 1

будет представлять волну, бегущую в одном направлении, и описываться одной функцией ψ_1 . Для определения вида этой функции достаточно одного условия на одной границе, например, на стенке полости или на фронте трещин. Движение в области трещин, которая распространяется по возмущенной зоне, должно описываться функциями f_1 и f_2 , для определения которых нужны условия на двух границах: полости и фронте трещин. В работе [1] была выписана система уравнений, в которой на основе не сформулированных там явно физических условий пренебрегалось отраженной волной (функцией f_2). При этом система становится переопределенной. Более подробно об этом приближенном рассмотрении будет сказано в конце статьи.

Выпишем условия сохранения массы и импульса на фронте трещин

$$\rho_2 (v_2 - R) = \rho_1 (v_1 - R), \quad \rho_2 (v_2 - R)^2 - \sigma_{r2} = \rho_1 (v_1 - R)^2 - \sigma_{r1} \quad (1.9)$$

Здесь R — скорость фронта, ρ_1 , v_1 и σ_{r1} — плотность, массовая скорость и радиальное напряжение в упругой зоне перед фронтом трещин, ρ_2 , v_2 и σ_{r2} — величины за фронтом в зоне трещин. Для плотности (в случае сферической симметрии) имеем следующее выражение:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - (1 - 2\sigma) \left(\frac{-\sigma_r - 2\sigma_\theta}{E} \right) \quad (1.10)$$

Здесь ρ_0 — начальная плотность среды. В соответствии с представлениями работы [1], в зоне трещин $\sigma_\theta \equiv 0$, а на фронте трещин $\sigma_\theta = \sigma_{\theta*}$ (критическое).

В упругости из-за малого смещения полости граничное условие обычно сносят на начальный радиус полости, а давление на стенку всегда задается независимо от движения в упругой среде. Такое приближенное рассмотрение, конечно, может потребовать уточнения, связанного с учетом смещения границы или учетом движения газа внутри полости, так как возможно, что внезапный разрыв упругой среды приведет к образованию волны, идущей к центру полости, а это повысит давление на границе с упругой средой. Задача усложняется, когда среда перестает быть упругой.

Рассмотрим подробнее возможные типы разрывов на фронте трещин в обычном для упругости приближении. На стенке полости задано давление $p(t)$. В момент образования фронта трещин t_* давление остается непрерывным. На фиг. 1 схематически представлены стенка, фронт трещин (ϕ) и характеристика (x), выходящая из точки образования фронта трещин. В работе [1] предполагалось, что $\sigma_{\theta*}$ достигается на стенке полости,

а затем остается тем же на фронте трещин. Это соответствует предположению непрерывности σ_θ на характеристике. Здесь следует указать, что более общим, хотя еще и достаточно простым, было бы предположение, что на характеристике σ_θ имеет место скачок, т. е. образование фронта трещин происходит при некотором σ_θ , например, большем, чем то, которое затем существует на фронте трещин. Естественным в данном случае является также предположение о непрерывности смещения при переходе через характеристику. Из этих двух предположений, так как на обеих сторонах характеристики (точки 1 и 2 на фиг. 1)

$$-\frac{\sigma_\theta}{\rho c^2} = \frac{\sigma}{(1-\sigma)} \frac{\psi''}{c^2 r} - \frac{(1-2\sigma) u}{(1-\sigma) r} \quad (1.11)$$

следует, что ψ'' также непрерывно на характеристике. Тогда, так как на обеих сторонах характеристики

$$-\frac{\sigma_r}{\rho c^2} = \frac{\psi''}{c^2 r} + \frac{2(1-2\sigma) u}{(1-\sigma) r} \quad (1.12)$$

следует, что σ_r также непрерывно на характеристике. Из условия сохранения массы и импульса на характеристике при этом следует непрерывность на характеристике также v , ψ и ψ' . В силу непрерывности давления на стенке полости (в точках 1 и 3, так как точки 1, 2 и 3 представляют одну физическую точку), σ_r непрерывно и на фронте трещин (точки 2 и 3 на фиг. 1). Из (1.9) и (1.10) видно, что непрерывность σ_r приводит либо к условию

$$v_1 = v_2 = R^*, \quad \frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{2\sigma_{\theta*}}{E} \quad (1.13)$$

но при этом фронт трещин не образуется, так как он движется вместе с границей полости, либо к условию

$$v_1 = v_2, \quad \rho_1 = \rho_2 \quad (1.14)$$

т. е. непрерывности всех функций на фронте трещин. Но это условие может быть удовлетворено точно, как следует из (1.10), лишь при $\sigma_{\theta*} = 0$. Не занимаясь пока более подробным анализом этого обстоятельства, рассмотрим случай $\sigma_{\theta*} = 0$. Этот случай безусловно важен практически, так как многие трещиноватые материалы в действительности не обладают прочностью на растяжение, а для многих материалов $\sigma_{\theta*} \ll E$, что как раз и нужно, чтобы $\rho_1 \approx \rho_2$.

§ 2. Условие $\sigma_{\theta*} = 0$ и непрерывность радиального напряжения на фронте трещин приводят к соотношениям

$$-\frac{\sigma_r}{E} R = \frac{1}{(1-2\sigma)} \frac{\psi''}{c^2} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\psi'}{cR} + \frac{\psi}{R^2} \right) = \frac{f_1 - f_2}{c_0} + \frac{f_1 + f_2}{R} \quad (2.1)$$

$$\psi = \psi \left(t - \frac{R-r_0}{c} \right), \quad f_1 = f_1 \left(t - \frac{R-r_0}{c_0} \right), \quad f_2 = f_2 \left(t + \frac{R-r_0}{c_0} \right)$$

Здесь R — радиус фронта трещин.

Условие непрерывности скорости на фронте дает

$$vR = \frac{\psi''}{c} + \frac{\psi'}{R} = f_1' + f_2' \quad (2.2)$$

Условие на границе полости ($r = r_0$) для области трещин имеет вид

$$\frac{f_{10}' - f_{20}'}{c_0 r_0} + \frac{f_{10} + f_{20}}{r_0^2} = \frac{p(t)}{E}$$

$$f_{10} = f_1(t), \quad f_{20} = f_2(t), \quad f_{10}' = f_1'(t), \quad f_{20}' = f_2'(t) \quad (2.3)$$

Легко показать, что условие непрерывности смещения на фронте

$$f_1 + f_2 = \frac{\psi^*}{c} + \frac{\psi}{R} \quad (2.4)$$

не дает ничего нового. Продифференцируем (2.4) вдоль $R(t)$

$$f_1 \dot{\left(1 - \frac{R^*}{c_0}\right)} + f_2 \dot{\left(1 + \frac{R^*}{c_0}\right)} = \left(\frac{\psi^{**}}{c} + \frac{\psi^*}{R}\right) \left(1 - \frac{R^*}{c}\right) - \frac{\psi}{R^2} R^*$$

или

$$f_1 \dot{\left(1 - \frac{R^*}{c_0}\right)} + f_2 \dot{\left(1 + \frac{R^*}{c_0}\right)} - \left(\frac{\psi^{**}}{c} + \frac{\psi^*}{R}\right) = R^* \left[\frac{f_1 - f_2}{c_0} - \left(\frac{\psi^{**}}{c^2} + \frac{\psi^*}{cR} + \frac{\psi}{R^2}\right) \right]$$

Используя соотношение, следующее из условия $\sigma_{\theta^*} = 0$, и (2.4) получаем

$$f_1 \dot{\left(1 - \frac{R^*}{c_0}\right)} + f_2 \dot{\left(1 + \frac{R^*}{c_0}\right)} - \left(\frac{\psi^{**}}{c} + \frac{\psi^*}{R}\right) = R^* \left[\frac{f_1 - f_2}{c_0} + \frac{f_1 + f_2}{R} - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\psi^*}{cR} + \frac{\psi}{R^2}\right) \right] \quad (2.5)$$

Видно, что из (2.5) и (2.1) сразу же следует (2.2), а из (2.5) и (2.2) следует последняя часть (2.1), непрерывность напряжения.

Таким образом, для четырех неизвестных функций R , ψ , f_1 и f_2 имеем четыре уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{(1-2\sigma)} \frac{\psi^{**}}{c^2} &= \frac{\psi^*}{cR} + \frac{\psi}{R^2}, & \frac{f_1 - f_2}{c_0} &= \frac{(1-\sigma)}{\sigma} \frac{(f_1 + f_2)}{R} \\ \frac{\psi^{**}}{c} + \frac{\psi^*}{R} &= f_1 + f_2, & \frac{f_{10} - f_{20}}{c_0 r_0} + \frac{f_{10} + f_{20}}{r_0^2} &= \frac{p}{E} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Начальные условия в точке $R = r_0$, $t = t_*$, как и сама эта точка, находятся по известному движению, предшествующему образованию зоны трещин. Решение для сферически симметричного движения упругой среды при заданном законе изменения давления на стенке сферической полости имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{r_0^3 (1-\sigma)}{\rho c^2 \sqrt{1-2\sigma}} e^{-\alpha\tau} (J_1 \sin \beta\tau - J_2 \cos \beta\tau) \\ \psi^*(\tau) &= \frac{r_0^2}{\rho c} e^{-\alpha\tau} [J_1 (\cos \beta\tau - \sqrt{1-2\sigma} \sin \beta\tau) + J_2 (\sin \beta\tau + \sqrt{1-2\sigma} \cos \beta\tau)] \\ \psi^{**}(\tau) &= \frac{r_0}{\rho} \frac{2\sqrt{1-2\sigma}}{(1-\sigma)} e^{-\alpha\tau} \left[-J_1 \sqrt{1-2\sigma} \left(\cos \beta\tau + \frac{\sigma}{\sqrt{1-2\sigma}} \sin \beta\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + J_2 \sigma \left(\cos \beta\tau - \frac{\sqrt{1-2\sigma}}{\sigma} \sin \beta\tau \right) \right] + \frac{r_0}{\rho} p(\tau) \\ J_1 &= \int_0^{\tau} p(\tau) e^{\alpha\tau} \cos \beta\tau d\tau, & J_2 &= \int_0^{\tau} p(\tau) e^{\alpha\tau} \sin \beta\tau d\tau \\ \alpha &= \frac{(1-2\sigma)c}{(1-\sigma)r_0}, & \beta &= \frac{\sqrt{1-2\sigma}c}{(1-\sigma)r_0} \end{aligned}$$

Для ступеньки $p = p_0 = \text{const}$

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \frac{p_0 r_0^3 (1-\sigma)}{\rho c^2} \frac{1}{2(1-2\sigma)} [1 - e^{-\alpha\tau} (\cos \beta\tau + \sqrt{1-2\sigma} \sin \beta\tau)] \\ \psi^*(\tau) &= \frac{p_0 r_0^2 (1-\sigma)}{\rho c} \frac{1}{\sqrt{1-2\sigma}} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau \\ \psi^{**}(\tau) &= \frac{p_0 r_0}{\rho} e^{-\alpha\tau} (\cos \beta\tau - \sqrt{1-2\sigma} \sin \beta\tau) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно, что критическое растягивающее напряжение, в данном случае $\sigma_{\theta*} = 0$, достигается, в первую очередь, на стенке полости. Выпишем зависимость для параметров на стенке

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{\theta 0}}{p_0} &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1+\sigma}{1-\sigma} e^{-\alpha\tau} (\cos \beta\tau - \sqrt{1-2\sigma} \sin \beta\tau) \right] \\ \frac{u_0}{r_0} &= \frac{p_0}{\rho c^2} \frac{(1-\sigma)}{2(1-2\sigma)} [1 - e^{-\alpha t} (\cos \beta t - \sqrt{1-2\sigma} \sin \beta t)] \\ \frac{v_0}{c} &= \frac{p_0}{\rho c^2} e^{-\alpha t} \left(\cos \beta t + \frac{\sigma}{\sqrt{1-2\sigma}} \sin \beta t \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Момент образования фронта трещин t_* для ступеньки находим из первого уравнения (2.8), в котором βt_* обозначено через ξ_*

$$e^{-\sqrt{1-2\sigma}\xi_*} (\cos \xi_* - \sqrt{1-2\sigma} \sin \xi_*) = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \quad (2.9)$$

Видно, что ξ_* или безразмерное время $t_{1*} = t_* c / r_0$ для ступеньки есть функция только σ . Знание t_* позволяет вычислить все нужные начальные условия для системы (2.6).

Решение системы (2.6) представляется весьма сложным и, по-видимому, может быть получено только численно. Приближенное решение в виде разложения вблизи начальной точки фронта, которое будет полезно и при численном решении, можно построить, находя значения функций и их производных в этой точке.

Дифференцируя первые три уравнения (2.6) по t вдоль $R(t)$ и разрешая их затем относительно \dot{R} , получим

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{\sigma \psi''' / c^2 - (1-2\sigma)v}{\sigma \psi''' / c^2 + (1-2\sigma)\sigma_r / E} = \frac{\sigma(f_1'' - f_2'') / c_0 - (1-\sigma)v}{\sigma(f_1'' + f_2'') / c_0^2 + (1-\sigma)\sigma_r / E} = \\ &= \frac{\psi''' / c - (1-2\sigma)c^2\sigma_r / E - (f_1'' + f_2'')}{\psi''' / c^2 + v - (f_1'' - f_2'') / c_0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

В начальной точке фронта известны v и σ_r / E ; поэтому эти три соотношения (2.10) вместе с соотношением, получающимся при дифференцировании последнего из уравнения (2.6) по t вдоль границы каверны ($r = r_0$),

$$\frac{f_{10}'' - f_{20}''}{c_0 r_0} + \frac{f_1' + f_2'}{r_0^2} = \frac{p'}{E}, \quad \text{или} \quad \frac{f_{10}'' - f_{20}''}{c_0} = \frac{p' r_0}{E} - v_0 \quad (2.11)$$

дают возможность вычислить в начальной точке R_* , ψ_* , $f_{1*}'' + f_{2*}''$ и $f_{1*}'' - f_{2*}''$ (легко видеть, что на характеристике ψ имеет разрыв).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\sigma}{(1-2\sigma)} \frac{\psi'''}{c^2 v}, \quad y = -\frac{(f_1'' + f_2'') c}{c_0^2 v} \\ m &= -\frac{f_1'' - f_2''}{c_0 v}, \quad N = -\frac{\sigma_r}{E} \frac{c}{v}, \quad x = \frac{R}{c} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Тогда вместо (2.10) получаем

$$x = \frac{1+z}{N+z} = \frac{1-\sigma+\sigma m}{(1-\sigma)N+\sigma y} = \frac{N+y(1+\sigma)/(1-\sigma)-z/\sigma}{(1+m)/(1-2\sigma)-z/\sigma} \quad (2.13)$$

Как видно из (2.11),

$$m_0 = 1 - \frac{p' r_0}{E v_0} \quad (2.14)$$

В начальной точке фронта (r_0, t_*) имеем достаточно соотношений для определения значений всех функций. Для $x_* = R_* / c$ получаем квадрат-

ное уравнение

$$\left[N_* + \frac{\sigma(1+m_*)}{1-2\sigma} \right] x_*^2 + (N_* - 1)x_* + (1 + \sigma) \left(1 + \frac{\sigma m_*}{1-\sigma} \right) = 0 \quad (2.15)$$

Для z_* и y_* получаем выражения

$$z_* = \frac{N_* x_* - 1}{1 - x_*}, \quad y_* = \frac{(1-\sigma)/\sigma + m_*}{x_*} - \frac{(1-\sigma)}{\sigma} N_* \quad (2.16)$$

Повторяя дифференцирование системы уравнений, можем находить следующие производные неизвестных функций в начальной точке. Дифференцирование (2.13), которое удобнее провести по безразмерному времени $t_1 = tc / r_0$, дает (здесь точкой обозначено дифференцирование по t_1)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{z'(1-x)^2 - Nx(1-x)}{N-1} = \frac{\sigma m'x - x^2[(1-\sigma)N + \sigma y']}{1-\sigma + \sigma m} = \\ &= \frac{\sigma N' + y'\sigma(1+\sigma)/(1-\sigma) - xm'\sigma/(1-2\sigma) - z'(1-x)}{(1+m)\sigma/(1-2\sigma) - z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь

$$N' = -\frac{r_0}{R} [xNm + (1-x)z/\sigma - Nyc_0^2/c^2] \quad (2.18)$$

а m_*' и y_*' связаны следующим образом (здесь используется условие на стенке полости):

$$y_*' = -m_*' / x_* + \beta_1 \quad (2.19)$$

$$\beta_1 = -\left(\frac{m_*}{x_*} + y_* \right) \left[x_* (m_* - 1) - y_* \frac{c_0^2}{c^2} \right] - \frac{1}{x_*} \left(1 - \frac{c^2}{c_0^2} x_*^2 \right) \left(\frac{c_0^2}{c^2} y_* + \frac{p_*''}{E} \frac{c}{v_*} \right)$$

Здесь p'' обозначает вторую производную по безразмерному времени t_1 . Таким образом, неизвестные функции z_*' и m_*' определяются системой

$$a_1 z_*'(1-x_*) - b_1 = a_2 m_*' - b_2 = -a_3 m_*' - a_4 z_*'(1-x_*) + b_3 \quad (2.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1-x_*}{N_*-1}, \quad b_1 = a_1 N_*' x_*, \quad a_2 = \frac{2x_*}{(1-\sigma)/\sigma + m_*} \\ b_2 &= \frac{1}{2} a_2 x_* [N_*'(1-\sigma)/\sigma + \beta_1] \\ a_3 &= a_4 \left[\frac{\sigma x_*}{1-2\sigma} + \frac{\sigma(1+\sigma)}{(1-\sigma)} \frac{1}{x_*} \right], \quad a_4 = \frac{1}{(m_*+1)\sigma/(1-2\sigma) - z_*} \\ b_3 &= a_4 \sigma \left[N_*' + \frac{(1+\sigma)\beta_1}{1-\sigma} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

Решение (2.20) имеет вид

$$z_*'(1-x_*) = \frac{a_2(b_1+b_3) + a_3(b_1-b_2)}{a_1(a_2+a_3) + a_2a_4}, \quad m_*' = \frac{a_1(b_2+b_3) - a_4(b_1-b_2)}{a_1(a_2+a_3) + a_2a_4} \quad (2.22)$$

При помощи (2.17) вычисляется x_*' . Вычисление R_*' и R_*'' позволяет выписать разложение для $\Delta R_1 = R / r_0 - 1$

$$\Delta R_1 = x_* \Delta t_1 + \frac{1}{2} x_*' (\Delta t_1)^2 + \dots, \quad \Delta t_1 = t_1 - t_{1*} \quad (2.23)$$

Аналогичное разложение можно выписать и для скорости движения стенки каверны

$$v_0 = v_* + v_{0*}' \Delta t_1 + \frac{1}{2} v_{0*}'' (\Delta t_1)^2 + \dots$$

Используемое здесь обозначение v_{0*}' и v_{0*}'' показывает, что по времени дифференцируется v_0 . Производные v_0 выражаются через ψ_*'' , ψ_*''' и ψ_*'''' , которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_*'' &= (1 - 2\sigma) cr_0 N_* v_*, & \psi_*''' &= -c^2 v_* z_* (1 - 2\sigma) / \sigma \\ \psi_*'''' &= -\frac{(1 - 2\sigma)}{\sigma} \frac{v_* c^3}{r_0 (1 - x_*)} \{z_*' - z_* [y_* c_0^2 / c^2 + x_* (1 - m_*)]\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{0*}' / v_* &= (1 - 2\sigma) (N_* - z / \sigma) \\ v_{0*}'' / v_* &= -\frac{1 - 2\sigma}{\sigma} \left\{ z_* + \frac{z_*' - z_* [y_* c_0^2 / c^2 + x_* (1 - m_*)]}{1 - x_*} \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из (1.11) следовало, что ψ'' непрерывно при переходе через характеристику, выходящую из точки (r_0, t_*) . Пользуясь второй формулой (2.24), легко убедиться, что ψ''' (как отмечалось выше) при переходе через эту характеристику имеет разрыв.

Таблица 1

σ	ξ_*	N_*	x_*	z_*	y_*	$z_*(1-x_*)$	m_*	x_*
0.10	0.1061	1.1175	0.9033	0.0990	1.0117	0.0087	0.9037	0.0069
0.25	0.3031	1.4027	0.7533	0.2294	1.1021	0.0422	0.7621	0.0235
0.35	0.4860	1.7709	0.6236	0.2773	1.2927	0.4253	1.1727	0.2004

§ 3. Рассмотрим самый простой и практически важный случай задания давления на стенке полости в виде ступенчатой функции: в некоторый момент (обозначим его $t = 0$) возникает давление p_0 , которое затем остается постоянным. Для упругого решения и определения t_* выше были выписаны формулы (2.7) — (2.9). Условие

$$p = p_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

приводит к упрощению расчетных формул. Так

$$N_* = \frac{p_0 c}{E v_*} = \frac{(1 - \sigma)}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\exp(\sqrt{1 - 2\sigma} \xi_*)}{[\cos \xi_* + (\sigma / \sqrt{1 - 2\sigma}) \sin \xi_*]} \quad (3.2)$$

и так как ξ_* есть функция только коэффициента Пуассона σ , то N_* — также функция только σ . При выполнении (3.1) $m_* = 1$ и, как видно из (2.15), (2.16), x_* , z_* и y_* также являются функциями только σ . Таким образом, начальная скорость фронта трещин R_* есть функция только σ и c , которые являются характеристиками среды. В табл. 1, а также ниже приведены результаты расчетов для различных коэффициентов Пуассона.

σ	$f_{1*}' / r_0 v_*$	f_{2*}' / f_{1*}'	$f_{1*}'' / c_0 v_*$	f_{2*}'' / f_{1*}''
0.10	1.0525	-0.0499	-1.0002	0.0002
0.25	1.1402	-0.1230	-1.0030	0.0030
0.35	1.1989	-0.1659	-1.0102	0.0101

В дополнение к выписанным ранее формулам приведем еще некоторые расчетные формулы

$$\begin{aligned} \frac{f_{1*}'}{r_0 v_*} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_0}{c} N_* \right), & \frac{f_{2*}'}{r_0 v_*} &= 1 - \frac{f_{1*}'}{r_0 v_*} \\ \frac{f_{1*}''}{c_0 v_*} &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{c_0}{c} y_* \right), & \frac{f_{2*}''}{c_0 v_*} &= 1 + \frac{f_{1*}''}{c_0 v_*} \\ \frac{f_{1*}''' r_0}{v_* c_0 c} &= -\frac{m_* + y_* c_0 / c + (m_* + y_* c_0 / c) [x_* (m_* - 1) - y_* c_0^2 / c^2]}{2(1 - x_* c_0 / c)} \\ \frac{f_{2*}''' r_0}{v_* c_0 c} &= \frac{m_* - y_* c_0 / c + (m_* - y_* c_0 / c) [x_* (m_* - 1) - y_* c_0^2 / c^2]}{2(1 + x_* c_0 / c)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

В табл. 1 приведены также коэффициенты разложения ΔR_1 . Если бы трещины не образовывались, а продолжалось бы обычное упругое движение, то v_0 / v_* выражалось бы формулой

$$\frac{v_0}{v_*} = \exp[-\alpha(t - t_*)] \frac{\cos \beta t + (\sigma / \sqrt{1 - 2\sigma}) \sin \beta t}{\cos \beta t_* + (\sigma / \sqrt{1 - 2\sigma}) \sin \beta t_*} \quad (3.4)$$

Вычисление разложения (3.4) вблизи t_* показывает, что наличие зоны трещин приводит к более медленному падению скорости движения стенки полости. При образовании фронта трещин в момент t_* скорость стенки непрерывна, но уже ее первая производная терпит разрыв.

§ 4. Как видно из расчета, производные функции f_2 очень малы по сравнению с производными f_1 . Поэтому может быть предложено приближенное решение, основанное на пренебрежении производными f_2 . Тогда из четвертого уравнения (2.6) получаем уравнение для определения f_1

$$\frac{df_1(t)}{dt} + \frac{c_0}{r_0} f_1(t) = \frac{pc_0 r_0}{E} \quad (4.1)$$

Для $p = p_0 = \text{const}$ решение имеет вид

$$f_1(t) = p_0 r_0^2 / E + K \exp(-c_0 t / r_0)$$

Здесь K — постоянная интегрирования, которую можно выразить через скорость в точке (r_0, t_*) , в нашем приближении $v_* = \dot{f}_{1*} / r_0$. Из второго и четвертого уравнений (2.6) следует также

$$\frac{v_*}{c_0} = \frac{\dot{f}_{1*}}{c_0 r_0} = \frac{(1 - \sigma) \dot{f}_{1*}}{\sigma r_0^2}, \quad \frac{\dot{f}_{1*}}{c_0 r_0} + \frac{\dot{f}_{1*}}{r_0^2} = \frac{p_0}{E}$$

Отсюда окончательно для $f_1(t)$ получаем выражение

$$f_1(t) = \frac{v_* r_0^2}{c_0} \left\{ \frac{1}{1 - \sigma} - \exp\left[-\frac{c_0(t - t_*)}{r_0}\right] \right\} \quad (4.2)$$

Теперь, пользуясь вторым уравнением (2.6), можно найти уравнение движения фронта трещин

$$\Delta t_1 = \frac{c}{c_0} [\Delta R_1 + \ln(1 + \sigma \Delta R_1)] \quad (4.3)$$

Эта функция представлена на фиг. 2 (пунктиром показано x_* из табл. 1). К сожалению, пока нет возможности сравнить это решение с точным решением (2.6), но можно сравнить значения различных функций в начальной точке фронта. Во-первых, для самой точки образования фронта получаем выражение

$$t_* = \text{arc tg} \frac{\sqrt{1 - \sigma^2} - \sqrt{1 - 2\sigma}}{\sqrt{(1 - \sigma^2)(1 - 2\sigma)} + \sigma} \quad (4.4)$$

Это выражение можно использовать как первое приближение при решении трансцендентного уравнения (2.18). Для параметров в начальной точке получаем

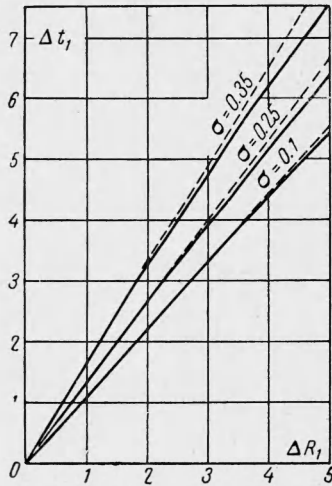
$$N_* = \frac{1}{(1 - \sigma)} \frac{c}{c_0}, \quad x_* = \frac{1}{(1 + \sigma)} \frac{c}{c_0} \quad (4.5)$$

$$x_*^* = \frac{\sigma^2}{(1 + \sigma)^3} \frac{c_0^2}{c^2}$$

Таблица 2

σ	x_*	x_*^*	N_*
0.1	0.9	0.00817	1.12
0.25	0.73	0.0366	1.46
0.35	0.585	0.053	1.95

В табл. 2 приведены значения этих параметров для различных σ . Сравнение величин в табл. 1 и 2 свидетельствует о применимости приближенного метода, особенно для



Фиг. 2.

сред с небольшим коэффициентом Пуассона. Отметим еще одну особенность движения фронта трещин, которая видна уже из табл. 1. С самого начала фронт трещин движется с ускорением $\dot{x}_* > 0$. Это же видно и из приближенного решения, первая и вторая производные которого имеют вид

$$\frac{d(\Delta t_1)}{d(\Delta R_1)} = \frac{c}{c_0} \left(1 + \frac{\sigma}{1 + \sigma \Delta R_1} \right), \quad \frac{d^2(\Delta t_1)}{d(\Delta R_1)^2} = -\frac{c}{c_0} \frac{\sigma^2}{(1 + \sigma \Delta R_1)^2}$$

С увеличением R ускорение уменьшается, а R' стремится к c_0 .

Отметим, что аналогичное приближенное решение можно получить для $\sigma_{\theta*} \neq 0$. Обозначим $\delta = \sigma_{\theta*} / p_0$. Тогда движение фронта описывается уравнением

$$\Delta t_1 = \frac{c}{c_0} \left[\Delta R_1 + \ln \frac{(1 - \delta)(1 + \sigma \Delta R_1)}{1 - \delta(1 + \Delta R_1)^2} \right] \quad (4.6)$$

Видно, что Δt_1 обращается в ∞ при $\delta(1 + \Delta R_1)^2 = 1$; откуда $R_\infty = r_0 / \sqrt{\delta}$. Это выражение в $\sqrt{2}$ больше полученного в [1]. Для производных $d(\Delta t_1) / d(\Delta R_1)$ и $d^2(\Delta t_1) / d(\Delta R_1)^2$ получаем выражения

$$\frac{d(\Delta t_1)}{d(\Delta R_1)} = \frac{c}{c_0} \left[1 + \frac{\sigma}{1 + \sigma \Delta R_1} + \frac{2\delta(1 + \Delta R_1)}{1 - \delta(1 + \Delta R_1)^2} \right]$$

$$\frac{d^2(\Delta t_1)}{d(\Delta R_1)^2} = \frac{c}{c_0} \left\{ -\frac{\sigma^2}{(1 + \sigma \Delta R_1)^2} + 2\delta \frac{1 + \delta(1 + \Delta R_1)^2}{[1 - \delta(1 + \Delta R_1)^2]^3} \right\}$$

Для начальной точки фронта и некоторых величин в этой точке имеем выражения

$$\xi_* = \arctg \frac{(1 - \delta) \sqrt{1 - \sigma^2} - (1 - 2\delta) \sqrt{1 - 2\sigma}}{(1 - 2\delta) [\sigma + \sqrt{(1 - \sigma^2)(1 - 2\sigma)}]}, \quad \dot{V}_* = \frac{1}{(1 - \sigma)(1 - \delta)} \frac{c}{c_0}$$

$$x_* = \frac{c_0 / c}{1 + \sigma + 2\delta / (1 - \delta)}, \quad \dot{x}_* = -\frac{c_0^2 [-\sigma^2 + 2\delta(1 + \delta) / (1 - \delta)^2]}{c^2 [1 + \sigma + 2\delta / (1 - \delta)]^3}$$

$$\left[\frac{d(\Delta t_1)}{d(\Delta R_1)} \right]_* = \frac{1}{x_*}, \quad \left[\frac{d^2(\Delta t_1)}{d(\Delta R_1)^2} \right]_* = \frac{c}{c_0} \left[-\sigma^2 + 2\delta \frac{(1 + \delta)}{(1 - \delta)^2} \right]$$

Величина $[d^2(\Delta t_1) / d(\Delta R_1)^2]_*$ становится положительной для $\sigma = 0.1$ — начиная с $\delta = 0.005$, для $\sigma = 0.25$ — начиная от значения $\delta = 0.0283$, для $\sigma = 0.35$ — начиная с $\delta = 0.0534$. Таким образом, наличие некоторого $\sigma_{\theta*}$ приводит к замедлению и остановке фронта трещин.

Автор благодарит С. С. Григоряна за внимание к данной работе и ценные замечания.

Поступила 29 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Корявов В. П. Некоторые представления о зоне и фронте трещин. Докл. АН. СССР, 1962, т. 114, № 6.