УДК 539.374

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВОВ НЕОБРАТИМЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

А. А. Буренин, О. В. Дудко, К. Т. Семенов

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041 Владивосток
E-mail: burenin@iacp.dvo.ru

Получены ограничения на напряженные состояния пластически сжимаемой упругопластической среды, при которых возможно возникновение разрывов необратимых деформаций. В качестве поверхностей нагружения используются кусочно-линейные замкнутые поверхности. Вычислены скорости движения поверхностей разрывов необратимых деформаций.

Ключевые слова: динамика упругопластических сред, необратимая сжимаемость, разрыв деформаций, диссипативные ударные волны.

Введение. Условия возникновения и закономерности распространения поверхностей разрывов необратимых деформаций (диссипативных ударных волн) являются необходимым элементом постановки краевых задач динамики необратимого деформирования, что обусловливает постоянный интерес к их изучению [1–8]. Использование в модельных соотношениях негладких поверхностей нагружения с учетом необратимого характера изменения объемных деформаций существенно затруднено. Возникающие при этом разрывы деформаций являются комбинированными, а условия их возникновения существенно различаются в зависимости от того, каким точкам поверхности нагружения соответствуют предварительные напряжения. В данной работе рассматриваются кусочно-линейные поверхности нагружения.

1. Исходные соотношения модели. Пусть деформации, допускаемые упругопластической средой, малы, т. е. компоненты e_{ij} тензора деформаций определяются соотношениями

$$e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 = e^e_{ij} + e^p_{ij}, \tag{1.1}$$

где u_i — компоненты вектора перемещений точек среды; e^e_{ij}, e^p_{ij} — обратимая (упругая) и необратимая (пластическая) составляющие полных деформаций соответственно.

Напряжения σ_{ij} в изотропной среде определяются обратимыми деформациями e^e_{ij} согласно закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e^e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e^e_{ij}.$$

Необратимые деформации e^p_{ij} начинают накапливаться в деформируемой среде при достижении напряженными состояниями поверхности нагружения:

$$f^{(s)}(\sigma_{ij}, \tau) = k, \qquad k = \mathrm{const}, \quad s = 1, 2, \dots . \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08-01-00001-а, 06-01-96005-р-восток-а).

Постоянная k обычно отождествляется с пределом текучести, а для параметров истории деформирования τ_j формулируется кинетическое уравнение, например в виде [9, 10]

$$\dot{\tau}_j = A^j_{em}\dot{e}^p_{em}. \tag{1.3}$$

Принимая принцип максимума Мизеса (при этом соотношения (1.2) становятся пластическим потенциалом), согласно ассоциированному закону пластического течения для скорости пластического деформирования можно записать соотношение

$$\varepsilon^p_{ij} = \dot{e}^p_{ij} = \sum_{s=1}^{n} \psi_s \frac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Здесь $\psi_s > 0$ при $\dfrac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} > 0$ и $\psi_s = 0$ при $\dfrac{\partial f^{(s)}}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} \leqslant 0$.

В качестве поверхности нагружения будем использовать соотношения

$$\max|\sigma_i - \sigma_j|/2 + q\sigma = k \quad (i \ne j), \qquad \sigma + \varphi(\tau) = 0; \tag{1.4}$$

$$\max|\sigma_i - \sigma| + q\sigma = 2k/3, \qquad \sigma + \varphi(\tau) = 0, \tag{1.5}$$

где σ_i — главные значения тензора напряжений; $\sigma = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$; функция $\varphi(\tau)$ задается на основе экспериментальных данных; k, q — постоянные упругопластической среды.

Соотношения (1.4) задают в пространстве главных напряжений пирамиду Кулона — Мора, сдвиг основания которой зависит от значения единственного параметра истории деформирования τ. Заметим, что в [10] в качестве такого параметра принималась плотность среды, в [9] — объемная деформация.

Поверхность нагружения (1.5) отличается от пирамиды Кулона — Мора только тем, что ее основанием является шестиугольник максимального приведенного касательного напряжения, а не шестиугольник максимального касательного напряжения. Условия максимального приведенного касательного напряжения сформулированы впервые, по-видимому, А. Ю. Ишлинским [11]. Свойства получаемых в этих условиях модельных систем уравнений изучались Д. Д. Ивлевым [12] и его учениками. Поэтому используемое в данной работе условие пластичности (1.5) будем называть пирамидой Ишлинского — Ивлева. Так же как и в теории идеальной пластичности, не учитывающей необратимое изменение объема, эти кусочно-линейные поверхности нагружения обладают экстремальными свойствами [12, 13]. В случае если в уравнениях этих поверхностей постоянные k и q одинаковы и используется одна и та же экспериментальная зависимость $\varphi(\tau)$, все возможные невогнутые поверхности нагружения будут располагаться между пирамидами Кулона — Мора и Ишлинского — Ивлева. В частности, к числу таких поверхностей относится классическая поверхность нагружения, представляющая собой конус Мизеса — Шлейхера.

На каждом плоском участке поверхностей нагружения (1.4), (1.5), так же как и на ребрах этих поверхностей и в их угловых точках, выписанные соотношения совместно с уравнениями движения упругопластической среды

$$\sigma_{ij,j} + \rho\chi_i = \rho\dot{v}_i \tag{1.6}$$

составляют замкнутые системы уравнений. В соотношениях (1.6) χ_i — плотности распределения массовых сил; v_i — компоненты скорости перемещений точек среды ($v_i = \dot{u}_i$).

2. Соотношения на поверхности разрывов. Положим, что в деформируемой упругопластической среде, занимающей объем V, с постоянной скоростью c движется поверхность разрывов деформаций $\Sigma(t)$. Поверхность $\Sigma(t)$ делит объем V на две части: V_1 и V_2 ($V = V_1 + V_2$); поверхность S, ограничивающая объем V, также оказывается разделенной на части S_1 и S_2 ($S = S_1+S_2$). Будем считать, что движение поверхности $\Sigma(t)$ происходит в направлении ее положительной единичной нормали $\boldsymbol{\nu}$ из V_1 в V_2.

Параметры напряженно-деформированного состояния и движения точек среды, непрерывные в V_1 и V_2 и претерпевающие разрыв на $\Sigma(t)$, должны удовлетворять условиям совместности разрывов.

Законы сохранения позволяют записать динамические условия совместности разрывов напряжений и скоростей перемещений

$$[\sigma_{ij}]\nu_j = -\rho c[v_i], \qquad [\sigma_{ij}v_i]\nu_j + \rho c([v_iv_i] + 2[W])/2 = 0. \tag{2.1}$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок величины на поверхности $\Sigma(t)$: $[m] = m^+ - m^-$ (m^+, m^- — значения величины непосредственно перед поверхностью $\Sigma(t)$ и за ней соответственно); W — массовая плотность распределения внутренней энергии. Кинематика движущейся поверхности разрывов также вносит ограничение на возможные разрывы $[v_i] = -c[u_{i,j}]\nu_j$ (условия Адамара).

Согласно модели упругопластической среды в ней должен иметь место только один источник внутренней энергии — необратимое деформирование (теплопроводностью среды пренебрегается). Тогда для разрыва $[W]$ получаем

$$\rho[W] = \frac{1}{2}\,[\sigma_{ij}e^e_{ij}] - \int\limits_{e^{p+}_{ij}}^{e^{p-}_{ij}} \sigma_{ij}\,de^p_{ij}. \tag{2.2}$$

С учетом соотношения (2.2) закон сохранения энергии на $\Sigma(t)$ (второе условие в (2.1)) принимает вид

$$\frac{1}{2}\,\rho c[v_iv_i] + [\sigma_{ij}v_i]\nu_j + \frac{1}{2}\,c[\sigma_{ij}e^e_{ij}] - c\int\limits_{e^{p+}_{ij}}^{e^{p-}_{ij}} \sigma_{ij}\,de^p_{ij} = 0. \tag{2.3}$$

Используя кинематическое условие совместности разрывов Адамара, из соотношений (1.1) получаем

$$[e_{ij}] = -([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i)/(2c) = [e^e_{ij}] + [e^p_{ij}]. \tag{2.4}$$

Согласно теореме Бэтти при переходе через поверхность $\Sigma(t)$ напряжения и обратимые деформации связаны соотношением $\sigma^+_{ij}[e^e_{ij}] = e^{e+}_{ij}[\sigma_{ij}]$, используя которое совместно с зависимостью (2.4) и первым равенством в (2.1) условие (2.3) можно привести к виду

$$\frac{\sigma^+_{ij} + \sigma^-_{ij}}{2}\,[e^p_{ij}] = -\int\limits_{e^{p+}_{ij}}^{e^{p-}_{ij}} \sigma_{ij}\,de^p_{ij}. \tag{2.5}$$

Для мощности поверхностных сил запишем следующие соотношения:

$$\int\limits_S \sigma_{ij}v_iN_j\,dS = \int\limits_{S_1} \sigma_{ij}v_iN_j\,dS + \int\limits_{S_2} \sigma_{ij}v_iN_j\,dS +$$

$$+ \int\limits_\Sigma \sigma^-_{ij}v^-_i\nu_j\,dS - \int\limits_\Sigma \sigma^+_{ij}v^+_i\nu_j\,dS + \int\limits_\Sigma [\sigma_{ij}v_i]\nu_j\,dS =$$

$$= \int\limits_{V_1} (\sigma_{ij}v_i)_{,j}\,dV + \int\limits_{V_2} (\sigma_{ij}v_i)_{,j}\,dV + \int\limits_\Sigma [\sigma_{ij}v_i]\nu_j\,dS =$$

$$= \int\limits_{V_1} \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\, dV + \int\limits_{V_2} \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}\, dV + \int\limits_{V_1} \sigma_{ij} v_{i,j}\, dV + \int\limits_{V_2} \sigma_{ij} v_{i,j}\, dV -$$

$$- \int\limits_{V_1} \rho \chi_i v_i\, dV - \int\limits_{V_2} \rho \chi_i v_i\, dV + \int\limits_{\Sigma} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j\, dS =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int\limits_{V_1} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_i + \sigma_{ij} e^e_{ij})\, dV + \int\limits_{V_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_i + \sigma_{ij} e^e_{ij})\, dV \Big] +$$

$$+ \int\limits_{V_1} \sigma_{ij} \varepsilon^p_{ij}\, dV + \int\limits_{V_2} \sigma_{ij} \varepsilon^p_{ij}\, dV - \int\limits_{V} \rho \chi_i v_i\, dV + \int\limits_{\Sigma} [\sigma_{ij} v_i] \nu_j\, dS =$$

$$= \frac{d}{dt} \int\limits_{V} \frac{1}{2} (\rho v_i v_i + \sigma_{ij} e^e_{ij})\, dV + \int\limits_{V} \sigma_{ij} \varepsilon^p_{ij}\, dV - \int\limits_{V} \rho \chi_i v_i\, dV +$$

$$+ \int\limits_{\Sigma} \Big(\rho c \frac{[v_i v_i]}{2} + c \frac{[\sigma_{ij} e^e_{ij}]}{2} + [\sigma_{ij} v_i] \nu_j \Big)\, dV.$$

С учетом соотношений (2.3) и (2.5) окончательно получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{V} \frac{1}{2} (\rho v_i v_i + \sigma_{ij} e^e_{ij})\, dV + \int\limits_{V} \sigma_{ij} \varepsilon^p_{ij}\, dV - \int\limits_{\Sigma} \frac{\sigma^+_{ij} + \sigma^-_{ij}}{2} [e^p_{ij}]\, dS =$$

$$= \int\limits_{S} \sigma_{ij} v_i N_j\, dS + \int\limits_{V} \rho \chi_i v_i\, dV. \qquad (2.6)$$

Равенство (2.6) является обобщением уравнения скорости виртуальных работ [12, 13] на случай, когда в теле распространяется поверхность разрывов деформаций. Равенство (2.6) легко распространить на случай, когда в объеме V присутствует не одна, а несколько поверхностей разрывов. Отметим, что равенство (2.6) является следствием законов сохранения в предположении, что допускаемые средой деформации малы, а связь между напряжениями и обратимыми деформациями линейна, при этом модель пластического течения несущественна.

Согласно равенству (2.6) мощность внешнего воздействия на тело (правая часть равенства) расходуется на изменение кинетической и потенциальной энергии тела (первое слагаемое в левой части) и на производство внутренней энергии в объеме и на поверхности разрывов (второе и третье слагаемые левой части соответственно). В соответствии с механическим смыслом последние два слагаемых в левой части уравнения (2.6) должны быть положительными. Из равенств (2.3) и (2.5) следует механический смысл последнего слагаемого в левой части (2.6) как необратимого источника внутренней энергии на поверхности $\Sigma(t)$. Уравнение возможных мощностей, аналогичное (2.6), но без слагаемого, учитывающего источник внутренней энергии на поверхности разрывов необратимых деформаций, обычно используется для доказательства единственности распределения напряжений и скоростей их изменения в упругопластических телах [13]. Для переноса выводов [13] на случай присутствия в упругопластическом теле поверхностей необратимых деформаций необходимы дополнительные условия. В качестве такого условия примем обобщение принципа максимума Мизеса на диссипативный процесс на $\Sigma(t)$: при изменении необратимых деформаций на поверхности разрывов от значения e^{p+}_{ij} до значения e^{p-}_{ij} напряжения изменяются таким образом, что произведение $(\sigma^+_{ij} + \sigma^-_{ij})[e^p_{ij}]$ принимает максимальное значение для всех возможных напряжений, удовлетворяющих условиям $f^{(s)}(\sigma^+_{ij}, \tau^+) \leqslant k$, $f^{(s)}(\sigma^-_{ij}, \tau^-) = k$. Данное условие, представляющее собой естественное обобщение принципа максимума Мизеса на процессы в ударной волне ($[e^p_{ij}] \neq 0$), является классическим принципом максимума, когда σ^+_{ij} стремится к значению σ^-_{ij}, а $[e^p_{ij}]$ переходит в $\dot{e}^p_{ij} = \varepsilon^p_{ij}$. В [4] показано, что следствием условия экстремальности напряженно-деформированных состояний на поверхности разрывов, аналогичного приведенному выше обобщению принципа максимума, является неизменность главных направлений тензора напряжений при переходе через поверхность разрывов $\Sigma(t)$. Данный результат лежит в основе всех выводов [4] об условиях существования и закономерностях распространения поверхностей сильных разрывов. Позднее аналогичные выводы о неизменности главных направлений при переходе через поверхность сильных разрывов были сделаны с помощью экстремальных условий переходного процесса на ударной волне, сформулированных в иной форме [5–8, 14].

3. Разрывы при условиях текучести Ишлинского — Ивлева. Для того чтобы записать соотношения на поверхности разрывов, будем считать ее тонким переходным слоем толщиной $2h$, в котором проявляются только пластические свойства среды. Полагаем, что во всем переходном слое напряженное состояние соответствует грани пирамиды Ишлинского — Ивлева (1.5). При этом для всех возможных случаев напряженного состояния выполняются следующие соотношения:

$$(2+q)\sigma_1 + (q-1)(\sigma_2+\sigma_3) = 2k; \tag{3.1}$$

$$(q-2)\sigma_1 + (q+1)(\sigma_2+\sigma_3) = 2k. \tag{3.2}$$

Выбор одного из равенств (3.1) или (3.2) конкретизирует грань. При этом на других гранях решения будут аналогичными с точностью до переобозначения главных напряжений.

Интегрируя уравнения движения среды (1.6) по переходному слою с использованием ассоциированного закона пластического течения и других зависимостей модели, можно получить соотношения в разрывах; например, в случае выполнения условия (3.1) имеем

$$\begin{gathered} -c([\sigma_1]l_il_j + [\sigma_2]m_im_j + [\sigma_3]n_in_j) = (\lambda[v_i] - \eta\Phi)\delta_{ij} + \mu([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i) - 3\mu l_il_j\Phi, \\ (\mu - \rho c^2)[v_i] - (\eta\nu_i + 3\mu l_il_3)\Phi + (\lambda+\mu)[v_3]\nu_i = 0, \\ (2+q)[\sigma_1] + (q-1)([\sigma_2]+[\sigma_3]) = 0, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\Phi = \int\limits_{-h}^{h} \psi\,dx_3, \qquad \eta = \frac{3}{2}\,\lambda q + \mu(q-1), \qquad l_il_j + m_im_j + n_in_j = \delta_{ij},$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_1 l_il_j + \sigma_2 m_im_j + \sigma_3 n_in_j, \qquad \varepsilon^p_{ij} = \varepsilon^p_1 l_il_j + \varepsilon^p_2 m_im_j + \varepsilon^p_3 n_in_j.$$

При записи соотношений (3.3), как и всюду в дальнейшем, система координат выбрана таким образом, чтобы ось x_3 была направлена по нормали к поверхности $\Sigma(t)$, а для осей x_1 и x_2 выполнялось условие $l_2 = 0$.

Из (3.3) и системы уравнений в разрывах в случае использования соотношения (3.2) следует возможность существования продольных ($[v_1] = [v_2] = 0$, $[v_3] \neq 0$) диссипативных разрывов. Условием существования таких разрывов является коллинеарность нормали к поверхности разрывов одному из главных направлений тензора напряжений. Для скоростей движения этих поверхностей справедливы соотношения

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{q(3\lambda+6\mu+4\eta)+6\lambda+12\mu+2\eta}{q(\eta+\mu)+2\mu}, \qquad c^2 = \frac{2\mu}{3\rho}\,\frac{(1-q)(3\lambda-2\eta)}{q(\eta+\mu)+2\mu},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{q(-3\lambda+2\mu+4\eta)+6\lambda+8\mu-2\eta}{q(\eta+\mu)+2\mu}, \qquad c^2 = \frac{2\mu}{3\rho}\,\frac{(1+q)(3\lambda+4\mu+2\eta)}{q(\eta+\mu)+2\mu}.$$

Исключив из этих соотношений пластическую сжимаемость ($q = 0$), получаем известные значения $c^2 = (3\lambda + 5\mu)/(3\rho)$ и $c^2 = (3\lambda + 2\mu)/(3\rho)$ [14].

Рассмотрим случай существования диссипативных комбинированных разрывов ($[v_1] \neq 0$, $[v_2] = 0$ и $[v_3] \neq 0$), движущихся со скоростями, меньшими скорости упругой сдвиговой волны. Из системы (3.3) и ее аналога в случае использования соотношения (3.2) следует

$$[v_2] = 0, \qquad [v_3] = \frac{1}{2}\,[v_1]\,\frac{1-2l_1^2}{l_1 l_3}. \tag{3.4}$$

Для существования комбинированных разрывов необходимо выполнение условия $m_2 = \pm 1$ или $n_2 = \pm 1$, т. е. нормаль к поверхности разрывов должна быть ортогональной одному из указанных главных направлений тензора предварительных напряжений. Для скоростей распространения таких разрывов возможны следующие значения:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{(1-q)(3\lambda-2\eta)}{q(-3\lambda+2\eta)+12\lambda+9\mu-2\eta} \quad \text{при} \quad \Phi = 2[v_3]\,\frac{\lambda+\mu}{3\mu+2\eta},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{(1+q)(3\lambda+4\mu+2\eta)}{q(3\lambda+4\mu+2\eta)+12\lambda+13\mu+2\eta} \quad \text{при} \quad \Phi = 2[v_3]\,\frac{\lambda+\mu}{\mu+2\eta}.$$

Заметим, что в зависимости от вида предварительного напряженного состояния данный разрыв может приводить либо к увеличению, либо к уменьшению деформации изменения формы и объема. При $q \to 0$ (переход к пластической несжимаемости) для скоростей движения данных разрывов получаем одно значение:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{3\lambda+2\mu}{12\lambda+11\mu}.$$

Пусть соотношения пластического течения в переходном слое замыкаются условием принадлежности напряженных состояний ребру пирамиды Ишлинского — Ивлева. С точностью до переобозначения главных напряжений это условие можно записать в форме

$$\sigma_1 - \sigma + q\sigma = \sigma - \sigma_3 + q\sigma = 2k/3.$$

При этом система уравнений в разрывах принимает вид

$$\begin{gathered} -c([\sigma_1](l_i l_j + m_i m_j/2) + [\sigma_3](m_i m_j/2 + n_i n_j)) = \lambda[v_i]\delta_{ij} + \mu([v_i]\nu_j + [v_j]\nu_i) + \beta_{ij}, \\ (\mu - \rho c^2)[v_i] + (\lambda+\mu)[v_3]\nu_i + \beta_{i3} = 0, \\ (q+1)[\sigma_1] + (q-1)[\sigma_3] = 0, \end{gathered} \tag{3.5}$$

где

$$\beta_{ij} = -(3/2)\lambda q\delta_{ij}(\Phi_1+\Phi_2) - \mu\delta_{ij}((q-1)\Phi_1 + (q+1)\Phi_2) - 3\mu(\Phi_1 l_i l_j - \Phi_2 n_i n_j),$$

$$\Phi_1 = \int\limits_{-h}^{h} \psi_1\,dx_3, \qquad \Phi_2 = \int\limits_{-h}^{h} \psi_2\,dx_3.$$

Из (3.5) следует возможность существования в этих условиях только продольных поверхностей разрывов ($[v_1] = [v_2] = 0$, $[v_3] \neq 0$). Для существования таких диссипативных разрывов необходимо, чтобы нормаль к поверхности разрывов была коллинеарна одному из главных направлений тензора напряжений. В этом случае результат оказывается аналогичным результату, полученному в случае, когда необратимая сжимаемость не учитывается [14]. Различие обусловлено только уточнением значения для скоростей распространения таких разрывов:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{3\lambda + 2\mu}{q^2(3\lambda + 2\mu) + 3\mu}, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(q-1)^2}{q^2(3\lambda + 2\mu) + 3\mu}, \quad c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(q+1)^2}{q^2(3\lambda + 2\mu) + 3\mu}.$$

Исключив из этих соотношений пластическую сжимаемость ($q = 0$), получаем известное значение $c^2 = (3\lambda + 2\mu)/(3\rho)$ [4, 7].

В случае если напряженные состояния перед поверхностью разрывов и в переходном слое соответствуют ребру пирамиды, образованному пересечением ее грани и дна, условия (3.1), (3.2) следует дополнить требованием $\sigma = -\varphi(\tau)$. Тогда система уравнений в разрывах (аналог (3.3)) будет включать экспериментально полученную функцию $\varphi(\tau)$, полагаемую в данной работе известной. Однако следует отметить, что условия возникновения диссипативных разрывов, налагаемые на предварительно напряженное состояние, остаются теми же, что и на грани пирамиды. В случае комбинированного разрыва справедливыми остаются также зависимости (3.4). Выход напряженного состояния с грани на ребро оказывает влияние на скорости распространения возможных разрывов. Так, в случае продольного разрыва, который также существует при условии коллинеарности нормали к поверхности разрывов одному из главных направлений тензора напряжения, имеем

$$c^2 = \frac{4\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(q-1)^2}{\theta}, \qquad c^2 = \frac{4\mu}{\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(A\varphi' q(q+1) - \mu) + A\varphi'(3\lambda + 5\mu)}{\theta},$$

$$c^2 = \frac{4\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(q+1)^2}{\theta}, \qquad c^2 = \frac{4\mu}{\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(A\varphi' q(q-1) - \mu) - A\varphi'(3\lambda + 5\mu)}{\theta},$$

$$\theta = 3q^2 A\varphi'(3\lambda + 2\mu) - 8\mu^2 - 12\mu(\lambda - A\varphi'),$$

где параметр A — инвариант тензора A_{ij} (1.3), зависящий от истории деформирования материала [15].

В случае комбинированного разрыва, возникающего при выполнении одного из соотношений $m_2 = \pm 1$ или $n_2 = \pm 1$, получаем два значения скоростей распространения возможных разрывов в зависимости от того, используется ли грань (3.1) или (3.2) соответственно:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(q-1)^2}{(3\lambda + 2\mu)(q^2 A\varphi' - 2qA\varphi' - \mu) + A\varphi'(12\lambda + 11\mu)},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(q+1)^2}{(3\lambda + 2\mu)(q^2 A\varphi' + 2qA\varphi' - \mu) + A\varphi'(12\lambda + 11\mu)}.$$

Пусть напряженное состояние среды соответствует сингулярной точке пирамиды, образованной при пересечении ее ребра и дна. В рассматриваемом случае возможно распространение только продольных разрывов, необходимым условием существования которых является коллинеарность нормали к поверхности разрывов одному из главных направлений тензора напряжений. Скорости распространения подобных разрывов задаются следующими соотношениями:

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)(q^2 A\varphi' - \mu) + 3\mu A\varphi'}, \qquad c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(q-1)^2}{(3\lambda + 2\mu)(q^2 A\varphi' - \mu) + 3\mu A\varphi'}.$$

4. Разрывы при условиях текучести Кулона — Мора. Пусть напряженное состояние во всем переходном слое соответствует грани пирамиды Кулона — Мора (1.4).

Уравнение каждой грани (с точностью до переобозначения главных напряжений) можно записать в форме

$$(\sigma_1-\sigma_3)/2+q\sigma=k. \tag{4.1}$$

В этом случае система уравнений в разрывах на $\Sigma(t)$ принимает вид

$$\begin{gathered}
-c([\sigma_1]l_il_j+[\sigma_2]m_im_j+[\sigma_3]n_in_j)=(\lambda[v_3]-(\lambda+2\mu/3)q\Phi)\delta_{ij}+\mu([v_i]\nu_j+[v_j]\nu_i)+\mu\Phi(n_in_j-l_il_j),\\
(\mu-\rho c^2)[v_i]+(\lambda+\mu)[v_3]\nu_i-q(\lambda+2\mu/3)\Phi\nu_i+\mu\Phi(n_in_3-l_il_3)=0,\\
(1/2+q/3)[\sigma_1]+q[\sigma_2]/3+(-1/2+q/3)[\sigma_3]=0.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Так же как в случае пирамиды Ишлинского — Ивлева, система (4.2) допускает существование продольных и комбинированных разрывов.

Скорости распространения продольных разрывов ($[v_1]=[v_2]=0$, $[v_3]\neq 0$) принимают значения

$$c^2=\frac{\mu}{3\rho}\,\frac{2q(2q+3)(3\lambda+2\mu)+9(\lambda+\mu)}{q^2(3\lambda+2\mu)+3\mu},\qquad c^2=\frac{\mu}{3\rho}\,\frac{4q^2(3\lambda+2\mu)+9(\lambda+\mu)}{q^2(3\lambda+2\mu)+3\mu},$$
$$c^2=\frac{\mu}{3\rho}\,\frac{2q(2q-3)(3\lambda+2\mu)+9(\lambda+\mu)}{q^2(3\lambda+2\mu)+3\mu}.$$

В случае если необратимая сжимаемость не учитывается ($q=0$), получаем известное значение $c^2=(\lambda+\mu)/\rho$ [14].

Ограничения на скачки скоростей перемещений $[v_i]$ на поверхностях комбинированных разрывов принимают вид

$$[v_2]=0,\qquad [v_3]=\frac{1}{2}\,[v_1]\,\frac{1-2n_2^2}{n_2n_3}\quad\text{или}\quad [v_3]=\frac{1}{2}\,[v_1]\,\frac{1-2l_1^2}{l_1l_3}. \tag{4.3}$$

При этом две из трех возможных скоростей распространения комбинированных разрывов определяются зависимостями

$$c^2=\frac{\mu}{\rho}\,\frac{(4q^2+12q+9)(3\lambda+2\mu)}{4q(q+3)(3\lambda+2\mu)+9(4\lambda+3\mu)},\qquad c^2=\frac{\mu}{\rho}\,\frac{(4q^2-12q+9)(3\lambda+2\mu)}{4q(q-3)(3\lambda+2\mu)+9(4\lambda+3\mu)}.$$

В случае если необратимая сжимаемость не учитывается ($q=0$), получаем известное значение $c^2=(\mu/\rho)(3\lambda+2\mu)/(4\lambda+3\mu)$ [14].

Третья скорость в случае комбинированного разрыва, допускаемая системой (4.2), представляет интерес, поскольку она возможна только в пластически сжимаемой среде ($q\neq 0$):

$$c^2=\frac{\mu}{\rho}\,\frac{q^2(3\lambda+2\mu)}{q^2(3\lambda+2\mu)+9(\lambda+\mu)}\quad\text{при}\quad \Phi=3[v_3]\,\frac{\lambda+\mu}{q(3\lambda+2\mu)}.$$

Пусть напряженное состояние в переходном слое соответствует ребру пирамиды Кулона — Мора (1.4). Все возникающие при этом возможности исчерпываются (с точностью до переобозначения главных значений тензора напряжений) условиями

$$(\sigma_1-\sigma_3)/2+q\sigma=(\sigma_1-\sigma_2)/2+q\sigma=k. \tag{4.4}$$

В данном случае система уравнений в разрывах принимает вид

$$\begin{gathered}
-c([\sigma_1]l_il_j+[\sigma_3](m_im_j+n_in_j))=\lambda[v_3]\delta_{ij}+\mu[v_j]\nu_i+\beta_{ij},\\
(\mu-\rho c^2)[v_i]+(\lambda+\mu)[v_3]\nu_i+\beta_{i3}=0,\\
(2q+3)[\sigma_1]+(4q-3)[\sigma_3]=0,
\end{gathered} \tag{4.5}$$

где

$$\beta_{ij} = -q\delta_{ij}(\lambda + 2\mu/3)(\Phi_1 + \Phi_2) + \mu\Phi_1(n_i n_j - l_i l_j) + \mu\Phi_2(m_i m_j - l_i l_j).$$

Система (4.5) допускает существование только продольных диссипативных разрывов, распространяющихся со скоростями

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(4q^2 + 12q + 9)}{4q^2(3\lambda + 2\mu) + 9\mu}, \qquad c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(16q^2 - 24q + 9)}{q^2(3\lambda + 2\mu) + 3\mu}.$$

При $q = 0$ из этих соотношений следуют известные значения $c^2 = (\lambda + 2\mu/3)/\rho$ [4, 14]. Как и выше, необходимым условием существования таких разрывов является коллинеарность нормали $\boldsymbol{\nu}$ одному из главных направлений тензора напряжений.

Пусть напряженное состояние среды соответствует ребру пирамиды Кулона — Мора, образованному пересечением ее грани и дна. Для того чтобы получить систему уравнений в разрывах для данного случая, достаточно к соотношению (4.1) добавить равенство $\sigma = -\varphi(\tau)$. При этом условия возникновения диссипативных разрывов, налагаемые на предварительно напряженное состояние, остаются теми же, что и на грани пирамиды. Для скачков скоростей $[v_i]$ на комбинированной поверхности разрыва остаются верными соотношения (4.3), скорости распространения таких разрывов принимают значения

$$c^2 = -\frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(4q^2 + 12q + 9)}{(3\lambda + 2\mu)(-4q^2A\varphi' - 12qA\varphi' + \mu) + 9A\varphi'(4\lambda + 3\mu)},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(4q^2 - 12q + 9)}{(3\lambda + 2\mu)(4q^2A\varphi' - 12qA\varphi' - \mu) + 9A\varphi'(4\lambda + 3\mu)},$$

$$c^2 = -\frac{\mu}{\rho}\,\frac{A\varphi' q^2(3\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 2\mu)(-q^2A\varphi' + \mu) - 9A\varphi'(\lambda + \mu)}.$$

Для поверхностей продольных разрывов имеем

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(4q^2A\varphi' + 6qA\varphi' - \mu) + 9A\varphi'(\lambda + \mu)}{(q^2A\varphi' - \mu)(3\lambda + 2\mu) + 3\mu A\varphi'},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(4q^2A\varphi' - 6qA\varphi' - \mu) + 9A\varphi'(\lambda + \mu)}{(q^2A\varphi' - \mu)(3\lambda + 2\mu) + 3\mu A\varphi'},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{(3\lambda + 2\mu)(4q^2A\varphi' - 4\mu) + 9A\varphi'(\lambda + 2\mu)}{(q^2A\varphi' - \mu)(3\lambda + 2\mu) + 3\mu A\varphi'}.$$

В случае если напряженное состояние среды соответствует сингулярной точке пирамиды (1.4), образованной при пересечении ее ребра и дна, для получения системы уравнений в разрывах необходимо в соотношениях (4.4) положить $\sigma = -\varphi(\tau)$. В данном случае возможно распространение только продольных разрывов со скоростями

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(4q^2 - 12q + 9)}{(3\lambda + 2\mu)(4q^2A\varphi' - \mu) + 9\mu A\varphi'},$$

$$c^2 = \frac{\mu}{3\rho}\,\frac{A\varphi'(3\lambda + 2\mu)(16q^2 + 24q + 9)}{(3\lambda + 2\mu)(4q^2A\varphi' - \mu) + 9\mu A\varphi'}.$$

Заключение. Таким образом, учет пластической сжимаемости не только позволяет уточнить значения скоростей продвижения поверхностей разрывов, но и приводит к существенному увеличению числа возможных разрывов, которые могут распространяться с разными скоростями. Иными словами, там, где в пластически несжимаемой среде возникает одна поверхность разрывов, учет сжимаемости приводит к возникновению комбинации двух разрывов с разными скоростями их движения. Однако условия возникновения разрывов, используемые в качестве ограничений на предварительные напряжения, в основном совпадают с аналогичными ограничениями, сформулированными в классических моделях типа моделей Прандтля — Рейсса [4, 14]. При этом они оказываются аналогичными как в случае пирамиды Кулона — Мора, так и в случае пирамиды Ишлинского — Ивлева.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Рахматулин Х. А.** Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х. А. Рахматулин, Ю. А. Демьянов. М.: Физматгиз, 1961.
2. **Мандель Ж.** Пластические волны в неограниченной трехмерной среде // Механика: Сб. пер. 1963. № 5. С. 119–141.
3. **Чернышов А. Д., Лимарев А. Е.** О распространении ударных волн в упругопластической среде с упрочнением // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 6. С. 1083–1088.
4. **Быковцев Г. И., Кретова Л. Д.** О распространении ударных волн в упругопластических средах // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 106–116.
5. **Друянов Б. А.** О сильных разрывах в сжимаемых пластических средах // Реологические модели и процессы деформирования пористых, порошковых и композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. С. 23–33.
6. **Кукуджанов В. Н.** Нелинейные волны в упругопластических средах // Волновая динамика машин. М.: Ин-т машиноведения АН СССР, 1991. С. 126–140.
7. **Садовский В. М.** К теории распространения упругопластических волн в упрочняющихся средах // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 5. С. 166–172.
8. **Буренин А. А., Быковцев Г. И., Рычков В. А.** Поверхность разрывов скоростей в динамике необратимо сжимаемых сред // Проблемы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. к 60-летию акад. В. П. Мясникова. Владивосток: Ин-т автоматики и процессов управления ДВО РАН, 1996. С. 106–127.
9. **Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н.** К теории сжимаемых идеально пластических сред // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 589–592.
10. **Григорян С. С.** Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 6. С. 1052–1072.
11. **Ишлинский А. Ю.** Гипотеза прочности формоизменения // Учен. зап. Моск. гос. ун-та. 1940. Вып. 46. С. 104–114.
12. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
13. **Быковцев Г. И.** Теория пластичности / Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев. Владивосток: Дальнаука, 1998.
14. **Садовский В. М.** Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука. Физматлит, 1997.
15. **Быковцев Г. И., Рычков В. А.** Определяющие уравнения пластически сжимаемых сред // Прикладные задачи механики деформируемых сред: Сб. науч. тр. Владивосток: Изд-во ДВО АН СССР, 1991. С. 49–56.

Поступила в редакцию 26/V 2008 г.,
в окончательном варианте — 15/VIII 2008 г.