

УДК 517.958

## Семейство решений двумерного уравнения эйконала

Ан.Г. Марчук, Е.Д. Москаленский

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: mag@omzg.sccc.ru (Марчук Ан.Г.), edm@omzg.sccc.ru (Москаленский Е.Д.)

**Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 13, 2020.**

**Марчук Ан.Г., Москаленский Е.Д.** Семейство решений двумерного уравнения эйконала // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 2. — С. 155–164.

В статье рассматривается распространение волны от точечного источника в случае, когда скорость волны  $v$  в среде задаётся формулой  $v = \frac{1}{\sqrt{y}}$ . Получены точные решения соответствующего уравнения эйконала и проведена их верификация численными методами. Установлена неединственность решения этого уравнения в случае, когда точечный источник находится в начале координат.

**DOI:** 10.15372/SJNM20200204

**Ключевые слова:** *распространение волны, фронт волны, уравнение эйконала, точечный источник.*

**Marchuk An.G., Moskalensky E.D.** A family of solutions of the two-dimensional eikonal equation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 2. — P. 155–164.

The propagation of a wave from the point source in the case when the velocity in the medium  $v$  is expressed as  $v = \frac{1}{\sqrt{y}}$  is considered. Exact solutions of the corresponding eikonal equation are obtained and numerically verified. The ambiguity of the solution to this question in the case when the point source is situated at the origin is shown.

**Keywords:** *wave propagation, wave front, eikonal equation, point source.*

---

## Введение

Двумерное уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2(x, y)} \quad (1)$$

описывает фронт возмущения, распространяющегося в среде, в которой скорость распространения возмущения в точке  $(x, y)$  равна  $v(x, y)$ . При этом линии  $f(x, y) = t$  задают положение волнового фронта в момент времени  $t$ . Стандартная постановка задачи Коши для этого уравнения следующая: по заданной скорости  $v$  требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условию  $f(x, y) = 0$  на заданной кривой  $l$ . Другими словами, требуется найти функцию, описывающую положение фронта волны в момент времени  $t$ , если известно положение фронта при  $t = 0$ . Согласно [1] решение этой задачи

существует и единственно, например, если функция  $f$  имеет в рассматриваемой области непрерывные производные второго порядка. Однако в важном для практики случае, когда кривая  $l$  состоит из единственной точки (случай точечного источника), вопрос о единственности решения остаётся открытым.

В статье приводится решение задачи Коши для случая точечного источника, когда скорость в среде задаётся формулой

$$v = \frac{1}{\sqrt{y}}. \quad (2)$$

Показано, в частности, что если точечный источник находится в начале координат, то соответствующая задача Коши имеет семейство различных решений, т. е. единственность решения отсутствует. Полученные результаты подтверждены численными экспериментами.

## 1. Аналитическое исследование задачи

Итак, рассмотрим уравнение

$$f_x^2 + f_y^2 = y, \quad (3)$$

и пусть  $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$  т. е. точечный источник находится в начале координат.

Ищем решение в виде

$$f(x, y) = m(ax + by)^{\frac{3}{2}} + n(cx + dy)^{\frac{3}{2}},$$

где  $m, n, a, b, c, d$  — постоянные. Область определения этой функции задаётся условиями:

$$\begin{cases} ax + by \geq 0, \\ cx + dy \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Будем считать, что  $m$  и  $n$  неотрицательны, тогда, очевидно, что  $f(x, y) = 0$  только при  $x = 0$  и  $y = 0$ .

Имеем

$$f_x = \frac{3}{2} ma\sqrt{ax + by} + \frac{3}{2} nc\sqrt{cx + dy}, \quad f_y = \frac{3}{2} mb\sqrt{ax + by} + \frac{3}{2} nd\sqrt{cx + dy},$$

тогда

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{9}{4} \left( (m^2a^3 + n^2c^3 + m^2b^2a + n^2d^2c)x + 2mn(ac + bd)\sqrt{ax + by}\sqrt{cx + dy} + (m^2a^2b + n^2c^2d + m^2b^3 + n^2d^3)y \right).$$

С учётом (3) получаем систему

$$\begin{cases} ac + bd = 0, \\ am^2(a^2 + b^2) + cn^2(c^2 + d^2) = 0, \\ bm^2(a^2 + b^2) + dn^2(c^2 + d^2) = \frac{4}{9}. \end{cases}$$

Умножая почленно второе уравнение системы на  $c$ , а третье уравнение на  $d$  и складывая, получим  $n^2(c^2 + d^2)^2 = \frac{4}{9}d$ , значит  $d > 0$  и  $n = \frac{2\sqrt{d}}{3(c^2 + d^2)}$ .

Из первого уравнения системы получаем  $a = -\frac{bd}{c}$  и  $a^2 + b^2 = \frac{c^2 + d^2}{d^2} b^2$ . После подстановки во второе уравнение системы получим

$$(c^2 + d^2) \left( -\frac{m^2 b^3 d}{c^3} + cn^2 \right) = 0.$$

Отсюда  $c^4 n^2 - b^3 dm^2 = 0$ , и значит,

$$m = \frac{2c^2}{3b\sqrt{b}(c^2 + d^2)},$$

где  $b > 0$ . Подставляя найденные для  $m$ ,  $n$  и  $a$  выражения в (3), после упрощений получим

$$f(x, y) = \frac{2}{3(c^2 + d^2)} \left( \sqrt{c}(-dx + cy)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{d}(cx + dy)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Введём обозначение  $k = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}}$ . После подстановки в правую часть последней формулы приходим к окончательному выражению для  $f$ :

$$f(x, y) = \frac{2}{3(1 + k^4)} \left( k(-x + k^2 y)^{\frac{3}{2}} + (k^2 x + y)^{\frac{3}{2}} \right), \tag{5}$$

где  $k$  неотрицательно.

Область определения этой функции задаётся условием (4), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{cases} -x + k^2 y \geq 0, \\ k^2 x + y \geq 0. \end{cases}$$

Прямые  $-x + k^2 y = 0$  и  $k^2 x + y = 0$ , или  $y = \frac{1}{k^2} x$  и  $y = -k^2 x$  проходят через начало координат взаимно перпендикулярны и разбивают координатную плоскость на 4 области. Точки  $(x, y)$ , координаты которых удовлетворяют приведённой выше системе, принадлежат закрашенной на рисунке 1 области.

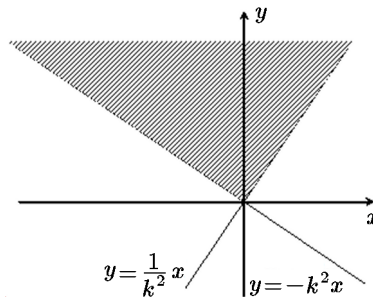
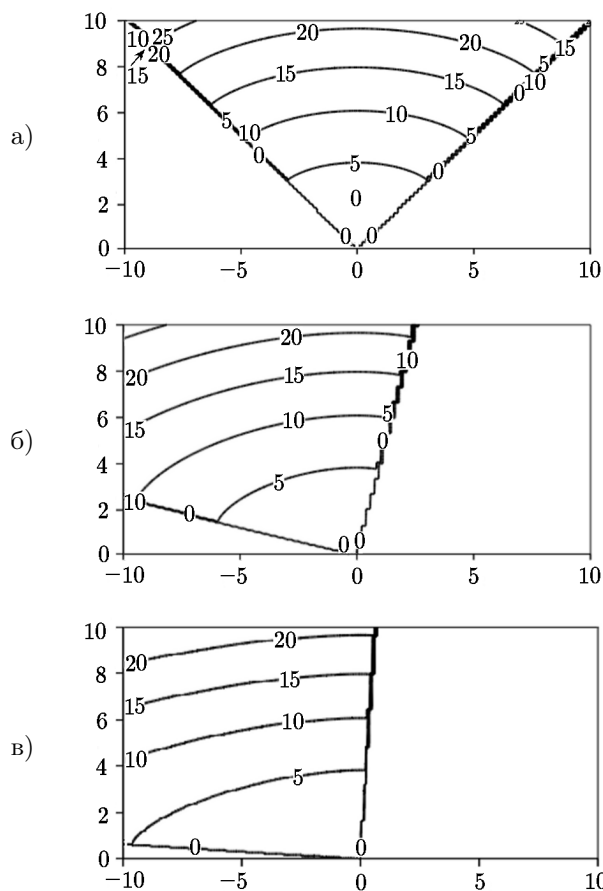


Рис. 1. Область определения функции  $f$

На рис. 2 показаны изолинии функции  $f$  при различных значениях параметра  $k$ .

Таким образом, (5) даёт семейство различных решений поставленной задачи. Волновой фронт для каждого из этих решений локализован внутри прямого угла, ограниченного каустиками  $y = \frac{1}{k^2} x$  и  $y = -k^2 x$ , где  $y \geq 0$ . Заметим, что частный случай, соответствующий значению  $k = 1$ , ранее был приведён в [2].



**Рис. 2.** Изолинии функции  $f$  при  $k = 1$  (а),  $k = 0.5$  (б),  $k = 0.25$  (в)

Обратимся к общему случаю: пусть требуется найти решение уравнения (3) при условии, что источник находится в точке  $(0, y_0)$ ,  $y_0 \geq 0$ :

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = y_0. \end{cases}$$

Опираясь на приведённую в [3, п. 2.6] формулу, получим решение поставленной задачи в виде

$$f(x, y) = \frac{1}{3} \sqrt{4(y + y_0)^3 - 3(4yy_0 - x^2)(y + y_0) - (4yy_0 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

или, после упрощений,

$$f(x, y) = \frac{1}{3} \left( 2(y + y_0) + \sqrt{4yy_0 - x^2} \right) \sqrt{y + y_0 - \sqrt{4yy_0 - x^2}}. \quad (6)$$

Область определения этой функции задаётся условием  $4yy_0 - x^2 \geq 0$ , волновой фронт локализован внутри этой области, ограниченной параболической каустикой. Представление о поведении фронта волны в зависимости от  $y_0$  можно получить из рис. 3

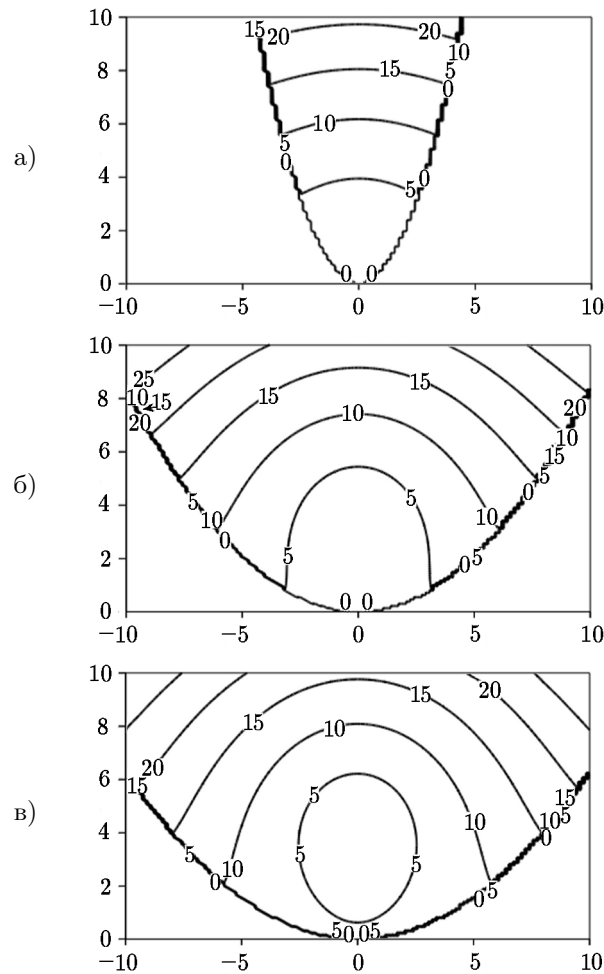


Рис. 3. Изолинии функции  $f$  при  $y_0 = 0.5$  (а),  $y_0 = 3$  (б),  $y_0 = 4$  (в)

## 2. Результаты численного расчёта кинематики волнового фронта

Для подтверждения полученных аналитических результатов были проведены серии численных расчётов распространения возмущения (волны) от точечного источника в области, где скорость распространения волн определяется по формуле (2).

Область определения функции задаётся условием (4), которое, в данном случае, принимает вид

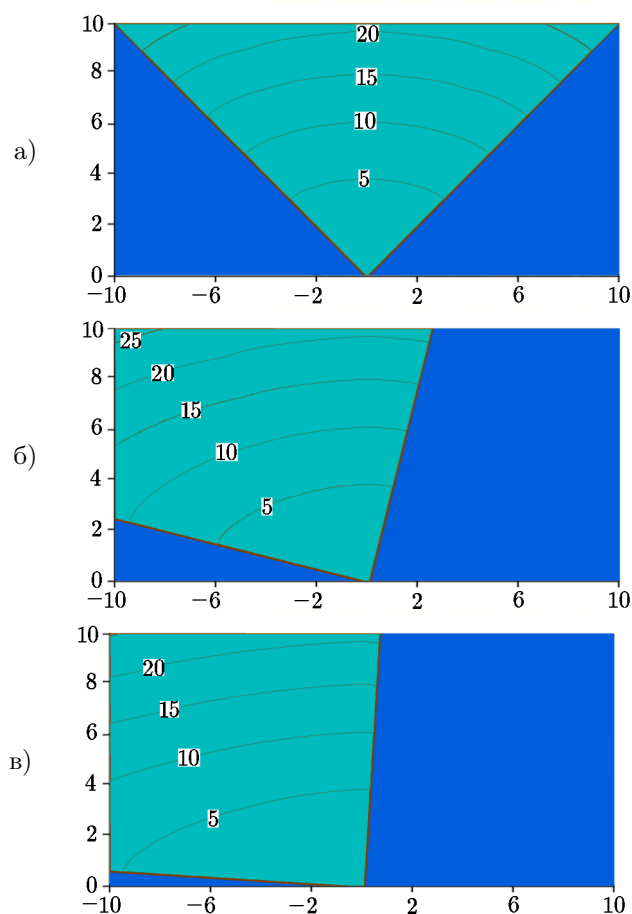
$$\begin{cases} -x + k^2y \geq 0, \\ k^2x + y \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, область определения ограничена взаимно перпендикулярными прямыми  $y = x \frac{1}{k^2}$  и  $y = -k^2x$ , проходящими через начало координат. Так, например, для  $k = 1$  область определения можно видеть на рис. 2а.

Для построения изохрон (положений волнового фронта в разные моменты времени) был использован метод нахождения времён вступления волны в узлы прямоугольной сетки, базирующийся на принципе Гюйгенса [4]. Этот метод предполагает дифракцию волны, вследствие чего волна от точечного источника, расположенного бесконечно близ-

ко к береговой линии (где скорость распространения возмущений бесконечна), мгновенно распространится вдоль всей береговой линии. Далее прямолинейный фронт будет двигаться в направлении от берега. Но это будет так, если задачу решать во всей полуплоскости  $y \geq 0$ . В том случае если решение искать только внутри прямого угла, ограничивающего область определения аналитического решения (8), то в соответствии с найденным аналитическим решением (5) ожидается, что фронт волны не будет отрезком прямой линии.

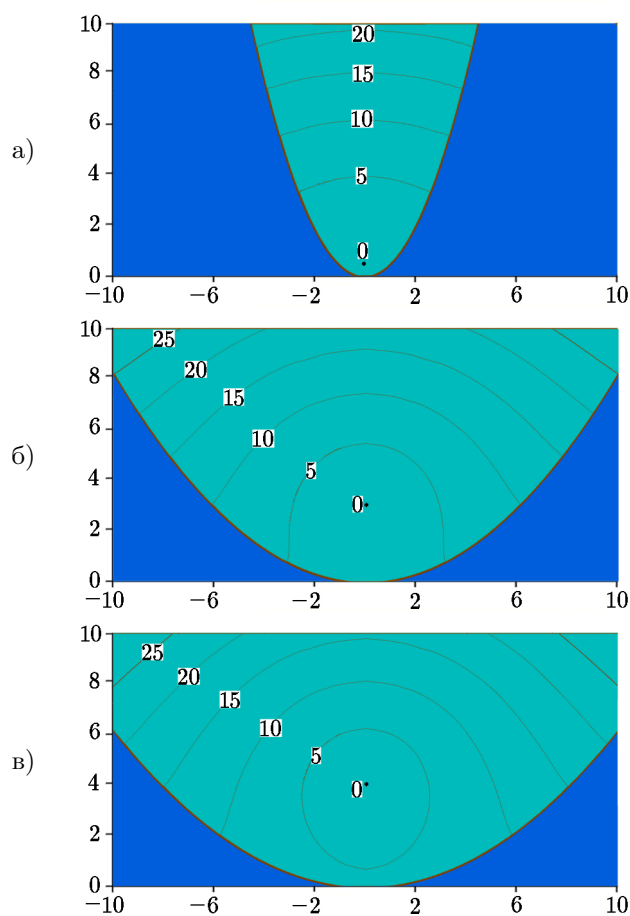
Численные расчёты проводились в сеточной области  $2000 \times 1000$  расчётных узлов, где пространственный шаг сетки в обоих направлениях составлял 0.01 м. В численных расчётах нет возможности задать бесконечную скорость распространения, поэтому на нижней границе области скорость распространения волн (проводимость среды) задавалась величиной 1000 м/с. Это значит, что если решать задачу во всей области, то от источника, расположенного в центральной точке нижней границы (начало координат), до боковых границ возмущение дойдёт за 0.01 секунды. В первой серии расчётов решение (время вступления фронта волны в узлы сетки) от этого точечного источника ищется в области, ограниченной взаимно перпендикулярными прямыми  $y = x \frac{1}{k^2}$  и  $y = -k^2 x$  с разными значениями параметра  $k$ . На рис. 4а показаны изолинии полученного численным методом решения уравнения эйконала при проводимости среды, задаваемой формулой (7), для  $k = 1.0$ .



**Рис. 4.** Изолинии численного решения уравнения эйконала для  $k = 1$  (а),  $k = 0.5$  (б),  $k = 0.25$  (в) при источнике, расположенном в точке  $(0, 0)$

Из рисунков 4а–4в становится ясным, что при дальнейшем уменьшении параметра  $k$  и его стремлении к нулю мы придём к решению в виде волны с прямолинейным фронтом, о которой шла речь в начале пункта. Только в данном случае такая волна будет двигаться от нижней границы лишь в половине верхней полуплоскости. Ещё можно добавить, что для  $k > 1$  результаты будут выглядеть как зеркальное отражение визуализированных результатов для значений параметра  $k$ , не превосходящих единицы, относительно вертикальной линии, делящей область пополам. При этом значения параметров в этих зеркальных задачах должны соотноситься как  $k_2^2 = \frac{1}{k_1^2}$ .

Во время второй серии расчётов определялись изохроны волн от источника, расположенного на некотором расстоянии от нижней границы области, где ордината равна нулю. Как и в предыдущих расчётах, на нижней границе скорость распространения возмущений задаётся равной 1000 м/с и при удалении от границы убывает по формуле (2). Естественно речь идёт о скорости в узлах расчётной сетки с пространственным шагом 0.01 м. Как показано в пункте 1, область определения решения в этом случае ограничено параболой  $4yy_0 - x^2 \geq 0$ . На рис. 5а визуализированы изолинии поля времён вступления волны от точечного источника, расположенного на расстоянии 0.5 м от нижней границы области. При сравнении результатов с изолиниями точного аналитического решения, представленными на рис. 3а, видна полная их идентичность.



**Рис. 5.** Изолинии поля времён вступления волны в узлы расчётной сетки в случае расположения источника в точке  $(0, 0.5)$  (а),  $(0, 3.0)$  (б),  $(0, 4.0)$  (в), которая обозначена чёрной точкой

Рисунки 5б и 5в показывают изохроны волны от точечного источника, расположенного на удалении 3 м от нижней границы (рис. 5б) и 4 м (рис. 5в).

Сравнение с точным решением, приведённым на рисунках 3б и 3в, также демонстрирует совпадение численных результатов с точными решениями, представленными в пункте 1, что подтверждает справедливость полученных аналитических решений уравнения эйконала.

В заключение приводим результат численного решения уравнения эйконала в секторе с раствором угла примерно  $127^\circ$ , которое не может быть получено аналитически. На рис. 6 отчётливо видна несимметричность решения относительно прямой  $x = 0$ . В предельном случае, когда правая граница расчётной области лежит на оси абсцисс, волновые фронты в правой половине области, где  $x > 0$ , являются прямыми горизонтальными линиями. Отсюда следует, что для нахождения решений в любых областях на верхней полуплоскости можно “склеивать” аналитическое решение, найденное для двух разных областей (где оно определено). Например, для точечного источника, находящегося на нижней границе, аналитическое решение в секторе с раствором больше  $90^\circ$  может быть составлено из решений, найденных в секторе между левым лучом и нормалью к нему и между правым лучом и нормалью к нему (рис. 6). Склейка производится по вертикальной линии, выходящей из источника.

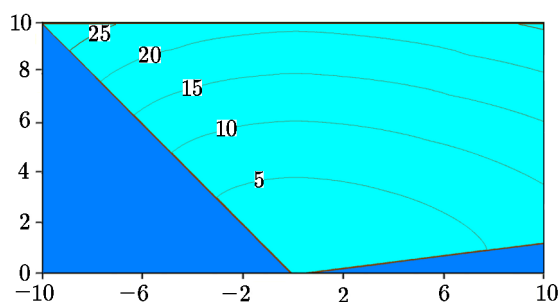


Рис. 6. Изолинии численного решения уравнения эйконала в секторе с раствором более  $90^\circ$

Нечто подобное получается при численном расчёте во всей полуплоскости волновых фронтов с учётом дифракции от точечного источника, расположенного на расстоянии 3 м от нижней границы. В области, ограниченной параболой  $y = x^2/12$ , решение совпадает с аналитическим (рис. 3б), а вне её волновые фронты параллельны горизонтальной оси (рис. 7).

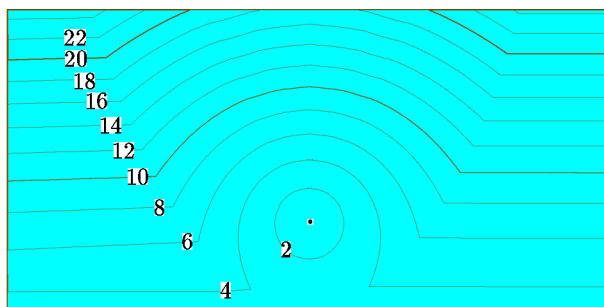


Рис. 7. Волновые фронты во всей расчётной области от точечного источника ( $y = 3$ )



### 3. Заключение

Найдены два семейства решений уравнения эйконала для двумерной среды, где скорость распространения возмущений зависит только от расстояния до прямолинейной границы и выражается формулой (2). Проведённые численные расчёты показали верность полученных решений. Анализ аналитических решений для источников, находящихся на разном расстоянии от оси абсцисс, показывает, что практически вся волновая энергия за счёт рефракции в конечном итоге направляется в сторону увеличения ординаты. При этом чем дальше от оси абсцисс расположен точечный источник, тем шире область регистрации бездифракционных волн на какой-либо прямой  $y = y_1$ , где  $y_1$  больше ординаты любого из рассмотренных источников.

Полученные решения имеют отношение в числе прочего и к проблеме цунами. Ввиду того, что скорость распространения фронта волны цунами не зависит от её амплитуды и длины, а только от глубины [4, 5] по формуле  $v = \sqrt{gD}$ , рассмотренная в статье проводимость среды соответствует гиперболическому (с точностью до положительного множителя) рельефу дна в прибрежной области. Конкретнее малые значения ординаты означают близость к оси глубоководного жёлоба. А источники, рассмотренные во второй серии расчётов, располагаются над континентальным склоном в области субдукции, где и располагается большинство очагов цунамигенных землетрясений. Точки, расположенные ближе к верхней границе области, соответствуют местоположению регистраторов волны над шельфом и вблизи берега. Замечание, сделанное по поводу ширины области регистрируемых волн, применительно к цунами означает большую область эффективного воздействия волн на побережье в случае более близкого к шельфу расположения источника.

### Литература

1. **Смирнов В.И.** Курс высшей математики. Том 4. Часть 2. — М.: Наука, 1981. Перевод: Smirnov V.I. A Course of Higher Mathematics. Vol. 1–5. — New York, Oxford: Pergamon Press, 1964.
2. **Москаленский Е.Д.** Новые семейства точных решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда скорость в среде зависит только от одной координаты // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 259–271. Перевод: Moskalensky E.D. The novel class of exact solutions of the two-dimensional eiconal equation when the velocity in a medium depends on one spatial coordinate // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 3. — P. 208–219.
3. **Боровских А.В.** Двумерное уравнение эйконала // Сиб. мат. журнал. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 993–1018.
4. **Марчук Ан.Г.** Минимизация погрешностей при численных расчётах волновых лучей и фронтов цунами // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. — 2013. — Т. 11, вып. 3. — С. 27–36.
5. **Стокер Дж.Дж.** Волны на воде. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. Перевод: Stocker J.J. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. — New York: Interscience Publishers, 1957.

*Поступила в редакцию 28 декабря 2018 г.*

*После исправления 16 апреля 2019 г.*

*Принята к печати 19 декабря 2019 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Smirnov V.I.** Kurs vysshei matematiki. Tom 4. Chast' 2. — М.: Nauka, 1981. Perevod: Smirnov V.I. A Course of Higher Mathematics. Vol. 1–5. — New York, Oxford: Pergamon Press, 1964.
2. **Moskalenskii E.D.** Novye semeistva tochnykh reshenii dvumernogo uravneniya eikonala dlya sluchaya, kogda skorost' v srede zavisiat tol'ko ot odnoi koordinaty // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 259–271. Perevod: Moskalensky E.D. The novel class of exact solutions of the two-dimensional eiconal equation when the velocity in a medium depends on one spatial coordinate // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 3. — P. 208–219.
3. **Borovskikh A.V.** Dvumernoe uravnenie eikonala // Sib. mat. zhurnal. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 993–1018.
4. **Marchuk An.G.** Minimizatsiya pogreshnostei pri chislennykh raschetakh volnovykh luchej i frontov tsunami // Vestnik NGU. Seriya: Informatsionnye tekhnologii. — 2013. — Т. 11, vyp. 3. — С. 27–36.
5. **Stoker Dzh.Dzh.** Volny na vode. — М.: Izd-vo inostrannoi literatury, 1959. Perevod: Stocker J.J. Water Waves. The Mathematical Theory with Applications. — New York: Interscience Publishers, 1957.