УДК 532.517

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ ВОЛНЫ, БЕГУЩЕЙ ПО ПЛАСТИНЕ

Л. Б. Айзин, А. Г. Володин

(*Новосибирск*)

В линейном приближении рассматривается двумерная задача об устойчивости потока несжимаемой жидкости над жесткой поверхностью, возмущенной волной, бегущей в направлении распространения потока. Задача решается в системе координат, покоящейся относительно бегущей волны. Параметры этой волны не являются собственными значениями соответствующей линейной задачи об устойчивости. Решение ищется в виде ряда по степеням амплитуды волны с точностью до квадратичного члена включительно. Проведены расчеты зависимости кривой нейтральной устойчивости от амплитуды, длины волны и фазовой скорости.

1. Используются безразмерные величины, в качестве масштабов выбирали u_0 — скорость набегающего потока и $\delta^* = 1{,}73\sqrt{\nu u_0/X}$, где X — расстояние от начала пластины; ν — кинематическая вязкость. Рассмотрение проводится в системе координат, покоящейся относительно бегущей волны, поэтому координата стенки имеет вид

$$y = \varepsilon \cos \beta x, \tag{1.1}$$

где y, x — соответственно нормальная и продольная координаты; ε — амплитуда; β — волновое число. Введем следующие координаты: η — функция тока, ξ — потенциал соответствующей невязкой задачи, т. е.

$$\Delta\eta = 0;\ \eta = 0,\ y = \varepsilon \cos \beta x;\ y \to \infty,\ \partial\eta/\partial y \to 1.$$

Коэффициенты Ламэ [1]

$$h_\eta^{-2} = h_\xi^{-2} = h = 1 + 2\varepsilon\beta \cos \beta\xi\, e^{-\beta\eta} + O(\varepsilon\beta)^2. \tag{1.2}$$

Линеаризованное уравнение для функции тока возмущения ψ в новых координатах имеет вид

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi, h\Delta\psi)}{\partial(\eta, \xi)} - \frac{\partial(h\Delta\Psi, \psi)}{\partial(\eta, \xi)} = \frac{\Delta(h\Delta\psi)}{\mathrm{Re}}, \tag{1.3}$$

где t — время; Re — число Рейнольдса.

Коэффициенты уравнения (1.3) являются периодическими функциями ξ и не зависят от t. Поэтому решение (1.3) будем искать в виде

$$\psi = e^{pt}\varphi(\eta, \xi). \tag{1.4}$$

Согласно [1], функция тока стационарного течения имеет вид

$$\Psi = \int (u - c)\, d\eta + \varepsilon(\Psi_{11} + \Psi_{-11}) + \varepsilon^2(\Psi_{02} + \Psi_{22} + \Psi_{-22}) + O(\varepsilon^3), \tag{1.5}$$

где первый индекс означает номер гармоники; u — профиль скорости Блазиуса; c — фазовая скорость волны, бегущей по стенке. Подставляя выражение (1.4) в уравнение (1.3), полученную задачу запишем в форме

$$L\varphi = \varepsilon(e^{-i\beta\xi}H_-\varphi + e^{i\beta\xi}H_+\varphi) + \varepsilon^2 M\varphi + O(\varepsilon^3). \tag{1.6}$$

Вид L, H_-, H_+ определяется выражениями (1.2), (1.3), (1.5). Так как собственные значения оператора L являются простыми [2], решение уравнения (1.6) будем искать в виде [2]

$$p = \sum_{0}^{\infty} p_n \varepsilon^n, \quad \varphi = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\beta} \varphi_n, \quad \varphi_n = \sum_{k=|n|}^{\infty} \varphi_{nk} \varepsilon^k. \tag{1.7}$$

Группируя в (1.6) члены при одинаковых гармониках и степенях ε, получим систему уравнений

$$\begin{gathered} T(\alpha, p_0)\varphi_{00} = 0, \quad T(\alpha, p_0)\varphi_{01} = p_1 \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \alpha^2\right)\varphi_{00}, \\ T(\alpha \mp \beta, p_0)\varphi_{\mp 11} = e^{\mp i\alpha\xi} H_+ e^{\pm i\alpha\xi}\varphi_{00}, \\ T(\alpha, p_0)\varphi_{02} = p_2 \operatorname{Re}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \alpha^2\right)\varphi_{00} + e^{-i(\alpha+\beta)\xi} H_- e^{i(\alpha+\beta)\xi}\varphi_{11} + \\ + e^{-i(\alpha-\beta)\xi} H_+ e^{i(\alpha-\beta)\xi}\varphi_{-11} + M_0\varphi_{00}, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где $T(\alpha, p)$ — оператор Орра — Зоммерфельда. Из условия разрешимости системы (1.8) получим поправку к собственному значению с точностью до ε^2

$$\begin{gathered} p_1 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{\mathrm{Re}} \int_0^\infty \left(e^{-i(\alpha+\beta)\xi} H_- e^{i(\alpha+\beta)\xi}\varphi_{11} + \right. \\ \left. + e^{-i(\alpha-\beta)\xi} H_+ e^{i(\alpha-\beta)\xi}\varphi_{-11} + M_0\varphi_{00}\right)\chi d\eta \Big/ \int_0^\infty (\varphi_{00}'' - \alpha^2\varphi_{00})\chi d\eta \end{gathered} \tag{1.9}$$

(χ — собственная функция оператора, сопряженного оператору Орра — Зоммерфельда).

2. Приведем выражения для операторов, входящих в формулы (1.7),

$$\begin{gathered} H_+ = \operatorname{Re}\left(p_0\Delta + \frac{\partial(\Psi_{11}, \Delta)}{\partial(\eta, \xi)} - \frac{\partial(\Delta\Psi_{11},)}{\partial(\eta, \xi)} + i\beta^2 e^{-\beta\eta}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\eta}\Delta + \right. \\ \left. + \beta^2 e^{-\beta\eta}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right) - 2i\beta^2 e^{-\beta\eta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi} - i\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \\ M_i = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial\Delta\Psi_{i2}}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\partial\Psi_{i2}}{\partial\eta}\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}\right), \quad M = \Sigma M_i, \\ H_- = H_+ + \operatorname{Re}(p_0 - \bar{p}_0)\Delta, \end{gathered}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}; \quad \Psi_0 = \int (u - c)\,d\eta; \quad \Psi_{11} = \left(F + (u - c)\frac{e^{-\beta\eta}}{2}\right)e^{i\beta\xi}.$$

Здесь F — решение задачи [1]

$$i\beta \operatorname{Re}((u - c)(F'' - \beta^2 F) - u''F) = \Delta^2 F + \frac{e^{-\beta\eta}}{2}(u^{\mathrm{IV}} - 2\beta u'''),$$

$$F(0) = \frac{c}{2}, \quad F'(0) = -\frac{1}{2}(u'(0) - \beta c), \quad \eta = \infty, \quad F = F' = 0.$$

Главный член в Ψ_{02} определяется из уравнения

$$\Delta^2\Psi_{02} = -2\beta \operatorname{Im} (\overline{F}'(F'' - \beta^2 F)) - F(\overline{F}''' - \beta^2\overline{F}')),$$

при $\eta = 0$ $\Psi_{02} = \Psi'_{02} = 0$, при $\eta = \infty$ $\Psi''_{02} = \Psi''_{02} = 0$.

3. Область применимости используемой методики расчета можно определить, анализируя поведение ряда (1.5). Так как расчеты проводятся при значениях β и c, близких к собственному значению оператора Орра — Зоммерфельда, о поведении ряда следует судить по отношению Ψ_{13} к Ψ_{11}

$$\Psi_{11} \sim \frac{\beta \int (u - c)\, u'\chi d\eta}{\Delta c \int (\partial^2/\partial\eta^2 - \beta^2)\, \varphi_{00}\chi d\eta} \sim \frac{\beta u'^2 y_c^2}{\Delta c}\, \varphi_{00},$$

$$\Psi''_{02} \sim 2\beta \operatorname{Re} \int\limits_{\infty}^{\eta} \Psi'^2_{11}\, d\eta \sim \frac{2\beta^3 \operatorname{Re} y_c^4 u'^4}{\Delta c} \int\limits_{\infty}^{\eta} \varphi'^2_{00} d\eta,$$

$$\Psi_{13} \sim \varphi_{00} \int\limits_{\infty}^{\eta} \Psi'_{11}\Psi''_{02}\chi d\eta/\Delta c \int\limits_{\infty}^{\eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \beta^2\right) \varphi_{00}\chi d\eta \sim \frac{2\beta^4 \operatorname{Re} y_c^8 u'^6}{\Delta c^4}\, \varphi_{00}.$$

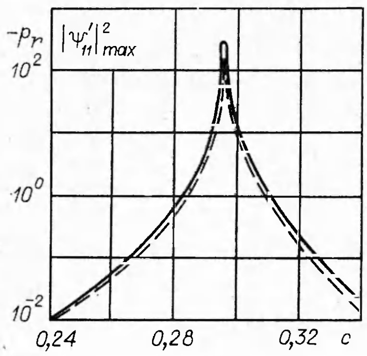
В оценках полагалось $\varphi'_{00} \sim \chi' \sim 1$. Масштаб этих функций $y_c = 2{,}5(\beta \operatorname{Re} u')^{-1/3}$ [3]. Из приведенных оценок следует, что используемая методика пригодна в области выполнения неравенства

$$500\beta(\varepsilon u')^2/\Delta c^3 \operatorname{Re} \ll 1. \tag{3.1}$$

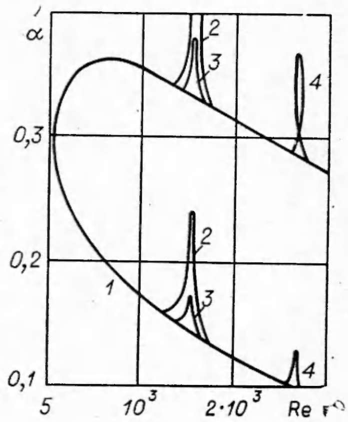
Здесь Δc — расстояние от c до собственного значения оператора Орра — Зоммерфельда, а β и ε — параметры волны (1.1). При численном интегрировании уравнения Орра — Зоммерфельда применялся метод ортогонализации [4]. На фиг. 1 сплошной кривой представлена зависимость поправки к коэффициенту нарастания p_2 для заданной волны Толмина — Шлихтинга от фазовой скорости распространения волны на стенке, а штриховой — зависимость $|\Psi'_{11}|^2_{\max}$ от c. Эти результаты соответствуют нижней ветви кривой нейтральной устойчивости при значениях $\operatorname{Re} = 1450$, $\beta = 0{,}141$, $\alpha = 0{,}142$. Как видно из графика, эффект влияния волнистости стенки на устойчивость в основном связан с изменением добавки к основному стационарному потоку. Некоторое увеличение эффекта вызывается сдвигом максимума $|\Psi'_{11}|$ в область критического слоя. При $c = 0$ поправка к коэффициенту нарастания возмущения снижается до минимума и $p_2 \sim 1/\operatorname{Re}$.

Аналогичные результаты были получены и для второй ветви кривой нейтральной устойчивости. В этом случае волнистость стенки приводит к дестабилизации потока. Поправка к коэффициенту нарастания из-за Ψ_{02} при расчетах составляла не более 10% от поправки из-за Ψ_{11} в районе нейтральной кривой. Смена знака поправки происходит в области максимальных коэффициентов нарастания возмущений.

На фиг. 2 представлена зависимость кривой нейтральной устойчивости от ε при заданных c и β. Цифрой *1* обозначена нейтральная кривая для гладкой стенки. Возмущение поверхности монохроматической волной приводит к искажению кривой нейтральной устойчивости в узкой зоне, где $i p_0 \approx c\beta$ и $\beta \approx \alpha$. Цифрами *2*, *3* обозначены искажения нейтральной кривой при следующих параметрах волны, бегущей по стенке: $c = 0.296$, $\beta = 10^{-4} \operatorname{Re}$, $\Delta c = 3\cdot 10^{-3}$ для $\varepsilon = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 2\cdot 10^{-3}$ соответственно, *4* — при $c = 0{,}31$, $\beta = 0{,}9\cdot 10^{-4} \operatorname{Re}$, $\Delta c = 10^{-2}$, $\varepsilon = 0{,}7\cdot 10^{-3}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Задание β по такому закону означает, что размерная длина бегущей по стенке волны сохраняется с изменением числа Re. Поправка к коэффициенту нарастания существенна только в узкой области чисел Re, прилегающих к области искажения кривой нейтральной устойчивости.

Результаты работы показывают, что влияние волнистости в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса ($520 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 3500$) при выполнении условия (3.1) сводится к искажению стационарного профиля скорости, что и приводит к изменению устойчивости потока. Стабилизация потока на нижней ветви нейтральной кривой при $\alpha \approx \beta$, $\Delta c \ll 1$ и дестабилизация на верхней ветви представляются естественными, если вспомнить результаты нелинейной теории [5, 6]. Авторы признательны С. А. Гапонову, который указал на эту аналогию.

Поступила 17 X 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benjamin T. B.** Shearing flow over a wave boundary.—«J. Fluid Mech.», 1959, vol. 6, N 2.
2. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.
3. **Линь Ц. Ц.** Теория гидродинамической устойчивости. М., ИЛ, 1958.
4. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений.— «Успехи мат. наук», 1961, т. 16, вып. 3(9).
5. **Гапонов С. А., Скобелев Б. Ю.** Вторичные автоколебательные режимы в течении Блазиуса. Вопросы газодинамики. Новосибирск, 1975.
6. **Лихачев О. А., Штерн В. Н.** Автоколебательное течение в пограничном слое.— ПМТФ, 1975, № 4.