

[А. В. Губарев], С. А. Лантес

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИЧЕСКОГО ФЛАТТЕРА СВЕРХЗВУКОВЫХ РЕШЕТОК

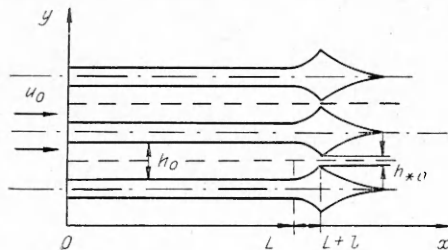
В сверхзвуковых решетках газодинамических  $\text{CO}_2$ -лазеров ( $\text{CO}_2$ -ГДЛ) наблюдаются поперечные (изгибные) колебания прямых лопаток, которые приводят к существенной неоднородности потока газа на входе в область генерации света. Имелись даже случаи усталостного разрушения лопаток. С целью предотвращения таких колебаний в конструкции решеток предусматриваются дистанционные проставки на дозвуковом участке межлопаточного канала, но это порождает энтропийные неоднородности, обусловленные диссипативными процессами при обтекании этих проставок.

В [1, 2] дано качественное объяснение одного из механизмов возбуждения колебаний прямых лопаток сверхзвуковых решеток ГДЛ. При этом полагалось, что лопатки «жестко» колеблются с собственной частотой. Тогда при выполнении определенных условий поперечная сила, возникающая в результате возбуждения продольных акустических колебаний газа в дозвуковой части канала, имеет такой сдвиг по фазе (относительно фазы колебания лопатки), который обеспечивает подвод энергии от потока газа к лопатке. Возникающие поперечные автоколебания лопаток, обусловленные продольными акустическими колебаниями газа, были названы акустическим флаттером [1, 2].

В настоящей работе сформулирована более точная математическая модель акустического флаттера. Получены уточненные краевые условия для акустической задачи и в отличие от работ [1, 2] учтено влияние, производимое акустическими продольными волнами на само движение (в поперечном направлении) лопаток. Другими словами, в систему, образованную лопаткой (механическая составляющая) и акустическими колебаниями газа (акустическая составляющая), введена обратная связь. Эта модель в отличие от предыдущей позволила определить инкремент самовозбуждения в ней автоколебаний.

**1. Постановка акустической задачи.** Здесь, как и в [1, 2], предполагается, что движение лопатки в решетке сводится к перемещению ее как целого в направлении оси  $y$  (см. рисунок), причем каждая лопатка колеблется в противофазе со смежными с ней. В [1] в результате численного моделирования установлено, что вклад сверхзвуковой части межлопаточного канала в энергообмен между потоком газа и лопаткой относительно мал (менее 1%), что позволяет при теоретическом анализе ограничиться рассмотрением только дозвуковой части межлопаточного канала. Поэтому задачу об акустическом флаттере сверхзвуковых решеток ГДЛ в модельной постановке можно сформулировать следующим образом.

Дозвуковая часть межлопаточного канала (см. рисунок) состоит из прямого участка длиной  $L$  и высотой  $h_0 = \text{const}$  и короткого ( $l \ll L$ ) суживающегося участка. После критического (минимального) сечения высотой  $h_{*0}$  располагается сверхзвуковая (расширяющаяся) часть межлопаточного канала. Пусть задано движение лопатки в поперечном направлении,  $h(t) = h_0 + \Delta h(t)$ . Наша цель — свести задачу нестационарной газовой динамики для межлопаточного канала к линейной для малых возмущений на прямолинейном участке ( $0 < x < L$ ). Течение газа



на этом участке при  $h \ll L$  может быть описано системой уравнений одномерной газовой динамики с изменяющимся во времени сечением  $h(t)$ . При  $x = 0$  для возмущения давления  $p'(x, t)$  есть краевое условие  $p'(0, t) = 0$ .

Предположим, что для участка  $[L, L + l]$  канала выполнено условие квазистационарности течения, что имеет место, когда характерные частоты возмущений параметров газа в потоке много меньше величины  $a/l$  ( $a$  — скорость звука в газе). Тогда оказывается возможным поставить граничное условие и при  $x = L$  непосредственно перед критическим сечением межлопаточного канала. Условимся плотность  $\rho$ , давление  $p$ , температуру  $T$  и скорость потока  $u$  помечать индексами \* и  $L$ , если они относятся к критическому сечению  $x = L + l$  и к сечению  $x = L$ . Индексом 0 будем обозначать величины в невозмущенном потоке, штрихом — возмущения этих величин.

В силу предположения о квазистационарности течения на участке  $(L < x < L + l)$  должно выполняться условие согласования расхода  $(\rho u h)_* = (\rho u h)_L$  и имеются известные выражения, связывающие значения величин в критическом и в сечении  $x = L$ :

$$u_*^2 = \frac{2}{\gamma - 1} R \left( T + \frac{u^2}{2c_p} \right)_L,$$

$$\rho_* = \rho_L \left[ \frac{\gamma + 1}{2} \left( 1 + \frac{(\gamma - 1) u^2}{\gamma R T} \right) \right]_L^{1/(\gamma - 1)}.$$

Отсюда после соответствующих преобразований получим соотношения для возмущений:

$$(1.1) \quad \left( \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{u'}{u_0} \right)_L = \left( 1 - \frac{h_{*0}}{h_0} \right) \frac{\Delta h}{h_{*0}} + \frac{u'_*}{u_{*0}} + \frac{\rho'_*}{\rho_{*0}};$$

$$(1.2) \quad \frac{u'_*}{u_{*0}} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2} \left[ \frac{T'}{T_0} + (\gamma - 1) M_0^2 \frac{u'}{u_0} \right]_L;$$

$$(1.3) \quad \frac{\rho'_*}{\rho_{*0}} = \left[ \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{M_0^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2} \left( \frac{u'}{u_0} + \frac{T'}{2T_0} \right) \right]_L.$$

Здесь  $\gamma$  — показатель адиабаты газа;  $R$  — газовая постоянная;  $M_0 = u_0/a$  — число Маха (обычно  $M_0 \ll 1$ ).

Допуская адиабатичность процессов и учитывая уравнение состояния газа  $p = \rho R T$ , из (1.1)–(1.3) находим краевое условие для сечения  $x = L$ :

$$\alpha u'/u_0 - \beta p'/p_0 = \eta \Delta h/h_{*0},$$

где  $\alpha = 1 - 2\gamma M_0^2/(2 + (\gamma - 1) M_0^2)$ ;  $\beta = (1 - 1/\gamma)(2 - M_0^2)/(2 + (\gamma - 1) M_0^2)$ ;  $\eta = (1 - h_{*0}/h_0)$ .

**2. Анализ математической модели.** Линеаризованная относительно возмущений система уравнений движения газа (уравнения акустики в движущемся газе) в рассматриваемой постановке задачи и краевые условия записываются так (штрихи в обозначениях здесь и ниже опускаем):

$$(2.1) \quad \partial u / \partial t + u_0 \partial u / \partial x + (1/\rho_0) \partial p / \partial x = 0;$$

$$(2.2) \quad \partial p / \partial t + u_0 \partial p / \partial x + \gamma p_0 \partial u / \partial x = 0;$$

$$(2.3) \quad p(0, t) = 0;$$

$$(2.4) \quad \alpha u(L, t)/u_0 - \beta p(L, t)/p_0 = \eta \Delta h(t)/h_{*0}.$$

В уравнениях акустики (2.1), (2.2) опущены члены, содержащие  $h(t)/h_0$ , связанные с изменением сечения канала, вклад которых в возбуждение акустических колебаний мал по сравнению с вкладом правого члена в краевом условии (2.4).

Предположим, что механическую составляющую нашей модели описывает уравнение изменения зазора  $z(t) = \Delta h(t)$ :

$$(2.5) \quad m\ddot{z} + kz = f,$$

где

$$(2.6) \quad f = 2H \int_0^L p \, dx$$

— сила, с которой возмущение давления газа действует на лопатку в боковом направлении;  $m$ ,  $k$ ,  $H$  — масса, упругость и ширина лопатки.

Решение системы уравнений (2.1)—(2.6) будем искать в виде  $u(t, x) = U(x) \exp(\lambda t)$ ,  $p(t, x) = P(x) \exp(\lambda t)$ ,  $z(t) = Z \exp(\lambda t)$ ,  $f(t) = F \exp(\lambda t)$  ( $\lambda$  — комплексное число). Тогда систему (2.1)—(2.6) запишем как

$$(2.1') \quad \lambda U + u_0 \partial U / \partial x + (1/\rho_0) \partial P / \partial x = 0;$$

$$(2.2') \quad \lambda P + u_0 \partial P / \partial x + \gamma p_0 \partial U / \partial x = 0;$$

$$(2.3') \quad P(0) = 0;$$

$$(2.4') \quad \alpha U(L)/u_0 - \beta P(L)/p_0 = \eta Z/z_0 \quad (z_0 = h_{*0});$$

$$(2.5') \quad \lambda^2 m Z + k Z = F;$$

$$(2.6') \quad F = 2H \int_0^L P \, dx.$$

Решение системы (2.1'), (2.2') имеет вид

$$(2.7) \quad U = A_1 \exp(\mu_1 x) + A_2 \exp(\mu_2 x), \quad P = C_1 \exp(\mu_1 x) + C_2 \exp(\mu_2 x).$$

Здесь

$$(2.8) \quad \mu_1 = \lambda/(a - u_0), \quad \mu_2 = -\lambda/(a + u_0)$$

находятся из уравнений (2.1'), (2.2'). С учетом граничных условий (2.3'), (2.4') получим

$$(2.9) \quad C_1 = -C_2 = -\eta Z z_0^{-1} \rho_0 a^2 M / g(\lambda),$$

где

$$(2.10) \quad g(\lambda) = \exp(\mu_1 L) + \kappa \exp(\mu_2 L);$$

$$(2.11) \quad \kappa = (\alpha - \gamma \beta M) / (\alpha + \gamma \beta M), \quad M = u_0 / a.$$

Согласно (2.6') и (2.7),

$$(2.12) \quad F = 2HC_1(\exp(\mu_1 L) - 1)/\mu_1 + 2HC_2(\exp(\mu_2 L) - 1)/\mu_2.$$

Подставляя (2.9), (2.12) в (2.5'), находим уравнение для собственных значений  $\lambda$ :

$$(2.13) \quad G(\lambda) = \lambda^2 + \Omega^2 + \varepsilon \varphi(\lambda) / g(\lambda) = 0,$$

Здесь

$$(2.14) \quad \varphi(\lambda) = (\exp(\mu_1 L) - 1)/\mu_1 - (\exp(\mu_2 L) - 1)/\mu_2,$$

$$\Omega = \sqrt{k/m}, \quad \varepsilon = 2H\eta a^2 M \rho_0 z_0^{-1} m^{-1} (\alpha + \gamma \beta M)^{-1}.$$

Самовозбуждение в рассматриваемой модели наблюдается в том и только в том случае, если у функции  $G(\lambda)$  есть нули в правой полуплоскости комплексного переменного  $\lambda$ . Тот нуль, который имеет максимальную вещественную составляющую, и определяет инкремент самовозбуждения.

Найдем сначала полюсы функции  $G(\lambda)$ . Из (2.8), (2.10) получаем выражение для всех нулей функции  $g(\lambda)$ :

$$(2.15) \quad \lambda_n = \frac{\alpha(1 - M^2)}{2L} [\ln \kappa + i\pi(2n + 1)], \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

Все эти нули имеют первый порядок. Заметим, что

$$(2.16) \quad \varphi(\lambda)\mu_1 - g(\lambda) = [(1 + M)/(1 - M) - \kappa] \exp(\mu_2 L) - 2/(1 - M).$$

Все точки, в которых правая часть (2.16) обращается в нуль, выражаются формулой

$$(2.17) \quad \lambda'_m = (a/L)(1 + M)(\ln \kappa_1 + 2\pi im), m = \dots, -1, 0, 1, \dots,$$

где

$$(2.18) \quad \kappa_1 = 0,5[1 + M - \kappa(1 - M)].$$

Из (2.11), (2.15), (2.17), (2.18) видим, что ( $M \ll 1$ ) выполняется неравенство  $\operatorname{Re} \lambda_n > \operatorname{Re} \lambda'_m$ , т. е. у множеств (2.15) и (2.17) нет общих точек. Поэтому из (2.16) вытекает, что нули функции  $g(\lambda)$  не являются нулями функции  $\varphi(\lambda)$ . Функция  $\varphi(\lambda)$  регулярна на всей комплексной плоскости переменного  $\lambda$ ; следовательно, точки  $\lambda_n$ , определенные формулой (2.15), и только они являются полюсами функции  $G(\lambda)$ .

Для произвольных  $\lambda, \delta > 0$  обозначим через  $O(\lambda, \delta)$  круг радиуса  $\delta$  с центром в точке  $\lambda$ . Положим  $\delta_1 = 0,5|\lambda_2 - \lambda_1|$  и  $\delta_0 = 0,5 \min_n |\lambda_n - i\Omega| > 0$ . Из вида функции  $G(\lambda)$  вытекает, что при  $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$  и достаточно малом  $\varepsilon$  вне области

$$Q_\delta = \bigcup_{n=-\infty}^{n=+\infty} O(\lambda_n, \delta) \cup O(i\Omega, \delta) \cup O(-i\Omega, \delta)$$

ни одного нуля эта функция не будет иметь.

Согласно (2.13), нули функции  $G(\lambda)$  удовлетворяют уравнениям  $\lambda = R_\pm(\lambda), \lambda = R_n(\lambda), n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ , где

$$(2.19) \quad R_n(\lambda) = \lambda_n - \varepsilon \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda^2 + \Omega^2)y_n(\lambda)};$$

$$(2.20) \quad R_\pm(\lambda) = \pm i\Omega - \varepsilon \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda \pm i\Omega)g(\lambda)}.$$

Здесь  $y_n(\lambda) = g(\lambda)/(\lambda - \lambda_n)$  — регулярная функция в области  $O(\lambda_n, \delta)$ , так как  $g(\lambda)$  имеет в точке  $\lambda_n$  нуль первого порядка. При достаточно малом  $\varepsilon$  функции  $R_+(\lambda), R_n(\lambda)$  осуществляют сжатое отображение областей  $O(\pm i\Omega, \delta), O(\lambda_n, \delta)$  ( $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ ) в себя соответственно. Таким образом, в первом приближении по  $\varepsilon$  нули функции  $G(\lambda)$  будут даваться формулами

$$(2.21) \quad N_n \approx \lambda_n - \varepsilon \frac{\varphi(\lambda_n)}{(\lambda_n^2 + \Omega^2)y_n(\lambda_n)},$$

$$N_\pm \approx \pm i\Omega - \varepsilon \frac{\varphi(\pm i\Omega)}{\pm 2i\Omega g(\pm i\Omega)}.$$

Так как  $\kappa < 1$ , то, согласно (2.15), при всех  $n$   $\operatorname{Re} \lambda_n = \operatorname{const} < 0$ . Поэтому при достаточно малом  $\varepsilon$  положительную вещественную составляющую могут иметь только нули  $N_\pm$ .

Подставляя в формулу (2.21) выражения (2.10), (2.14), а затем (2.8), находим  $\operatorname{Re} N_\pm \approx 0,5\varepsilon a \Omega^{-2} D/E$ , где

$$D = [(1 - M) + \kappa(1 + M)] + [(1 + M) + \kappa(1 - M)] \cos \frac{2Y}{1 - M^2} - 2 \cos \frac{Y}{1 - M} -$$

$$- 2\kappa \cos \frac{Y}{1 + M}; \quad E = (1 - \kappa)^2 + 4\kappa \left( \cos \frac{2Y}{1 - M^2} \right)^2; \quad Y = \Omega L/a.$$

При  $M \ll 1$

$$(2.22) \quad \frac{D}{E} \approx \frac{2(1 + \kappa) \cos Y (\cos Y - 1)}{(1 - \kappa)^2 + 4\kappa \cos^2 Y},$$

откуда для максимального возможного инкремента самовозбуждения

(при фиксированном  $\kappa$ ) получаем выражение

$$\operatorname{Re} N_{\pm} \approx 0,5\epsilon a \Omega^{-2} / (1 - \kappa) = 0,5 H \eta \alpha^2 \beta^{-1} \gamma^{-1} a^3 \rho_0 z^{-1} m^{-1} \Omega^{-2}.$$

Согласно (2.22),  $\operatorname{Re} N_{\pm} > 0$  при  $0,5\pi + 2\pi m < Y < 1,5\pi + 2\pi m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Уточняя значение величины  $D$  до второго порядка по  $M$  включительно ( $(1 - \kappa) \sim M$ ), имеем  $D \approx 2(1 + \kappa) \cos Y (\cos Y - 1) + 2M(1 - \kappa)(Y \sin Y - \sin^2 Y)$ . Отсюда находим более точно промежутки значений  $Y$ , внутри которых  $\operatorname{Re} N_{\pm} > 0$ :  $0,5\pi - \tau(0,5\pi - 1 + 2\pi m) + 2\pi m < Y < 1,5\pi + \tau(1,5\pi - 1 + 2\pi m) + 2\pi m$ . Здесь  $\tau = M(1 - \kappa)/(1 + \kappa)$ . Выражение для этих промежутков справедливо при  $2\pi m \tau \ll 1$ ,  $m = 0, 1, \dots$

**З а м е ч а н и е.** При малых значениях  $\delta_0$  ужесточается требование на малость  $\epsilon$ . Однако оно может быть ослаблено, если вместо функций (2.19), (2.20) рассмотреть отображение

$$(2.23) \quad \frac{\lambda_k \pm i\Omega}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_k + i\Omega)^2}{4} - \epsilon \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda \pm i\Omega) y_k(\lambda)}}$$

где  $k$  — значения, при которых  $|\lambda_k + i\Omega| = 2\delta_0$ . Неподвижные точки такого отображения также являются нулями функции  $G(\lambda)$ . С помощью (2.23) можно доказать, что для некоторых  $c$ ,  $\epsilon_0 > 0$  при  $\epsilon < \epsilon_0$  инкремент самовозбуждения равномерно по  $\delta_0 > 0$  оценивается сверху величиной  $c\sqrt{\epsilon}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Губарев А. В., Ефремов Н. М., Лаптев С. А., Печенова О. И. Об акустическом флаттере сверхзвуковых решеток. — 1989. — (Препр./ИАЭ — 4839/1).
2. Губарев А. В., Лаптев С. А. Акустический флаттер сверхзвуковых решеток // ДАН СССР. — 1990. — Т. 312, № 2.

г. Троицк

Поступила 15/VIII 1989 г.,  
в окончательном варианте — 24/XII 1990 г.

УДК 532.526

Ю. И. Бубликов, В. М. Фомичев

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ГАЗА НА НАГРЕВАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ СЛАБОМ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ ГРАДИЕНТЕ ДАВЛЕНИЯ

Известно, что охлаждение поверхности приводит к повышению устойчивости ламинарного пограничного слоя газа и затягиванию перехода к турбулентному режиму течения, а ее нагревание — к понижению устойчивости и ускорению перехода. Первое свойство считается эффективным средством ламинаризации поверхности, например поверхности крыла летательного аппарата [1, 2].

Указанные свойства как экспериментально, так и теоретически установлены для постоянной температуры поверхности и отсутствия градиента давления. Сравнительно недавно обнаружено, что при наличии градиента температуры поверхности могут наблюдаться абсолютно противоположные эффекты — дестабилизация ламинарного пограничного слоя газа при охлаждении поверхности и стабилизация при нагревании [3—5].

Устойчивость ламинарных течений и их переход к турбулентным на криволинейных поверхностях в неизотермических условиях ранее не исследовались, за исключением работы [6], в которой в основном экспериментально изучался переход на профиле крыла НАСА 0012, помещенном под нулевым и небольшими углами атаки в аэродинамической трубе. Было установлено, что при нагревании носка профиля, составляю-