ПМТФ, № 3, 1964

ТЕНЗОР ВЯЗКИХ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕПЛОВОЙ ПОТОК В ДВУХТЕМПЕРАТУРНОМ ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОМ ГАЗЕ

М. Я. Алиевский, В. М. Жданов, В. А. Полянский

(Свердловск, Москва)

В работе [1] на основе кинетического уравнения с использованием приближения 13 моментов к функции распределения найдена замкнутая система уравнений переноса для многокомпонентного ионизованного газа в магнитном поле. Температуры компонент предполагались различными. В настоящей работе рассматриваются вытекающие из [1] соотношения для тензора вязких напряжений и вектора потока тепла в таком газе (§ 1). Исходными служат линейные алгебраические уравнения для отдельных компонент, следующие из общей системы уравнений переноса в предположении, что макроскопические параметры газа мало меняются на расстояниях порядка эффективной длины свободного пробега и за времена порядка времени между столкновениями частиц.

Коэффициенты полученных выражений в общем случае предельно сложны, но могут быть заметно упрощены для частного случая трехкомпонентного частично ионизованного газа с температурой электронов, отличной от температуры ионов и атомов ($T_e \geqslant T_i = T_a$). В §§ 3, 4 приводятся детальные выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности такого двухтемпературного газа в магнитном поле. Оценивается вклад каждой из компонент в полный тензор вязких напряжений и тепловой поток (включая перенос тепла диффузией) в зависимости от степени ионизации, величины магнитного поля и степени неизотермичности плазмы.

1. Исходная система уравнений для определения тензора вязких напряжений α-компоненты π_α^{ik} и относительного потока тепла $\mathbf{h}_\alpha$ записывается в виде [1]

$$\sum_\beta a_{\alpha\beta}\pi_\beta^{ik} = -\eta_\alpha W^{ik} + \frac{1}{2}(\pi_\alpha^{li}\sigma^{klm} + \pi_\alpha^{lk}\sigma^{ilm})\,\omega_\alpha^m\tau_\alpha \tag{1.1}$$

$$\sum_\beta b_{\alpha\beta}h_\beta^i = -\lambda_\alpha R_\alpha^i + h_\alpha^k\sigma^{ikl}\omega_\alpha^l\tau_\alpha^* \qquad \left(\omega_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}|\mathbf{B}|\right) \tag{1.2}$$

Здесь

$$\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha - \frac{5}{2}p_\alpha\mathbf{w}_\alpha \qquad (\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}) \tag{1.3}$$

$$W^{ik} = \frac{\partial u^i}{\partial x_k} + \frac{\partial u^k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta^{ik}\frac{\partial u^l}{\partial x_l} \tag{1.4}$$

$$\mathbf{R}_\alpha = \nabla T_\alpha + \frac{2}{5}\frac{T_\alpha}{p_\alpha}\operatorname{div}\pi_\alpha + \frac{m_\alpha}{k}\sum_\beta \tau_{\alpha\beta}^{-1}\left[c_{\alpha\beta}(\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) + d_{\alpha\beta}\mathbf{w}_\alpha\right] \tag{1.5}$$

При этом $\mathbf{w}_\alpha$, p_α, T_α и $\mathbf{q}_\alpha$ — соответственно, относительная скорость, парциальное давление, температура и тепловой поток α-компоненты, $\mathbf{u}$ — средняя массовая скорость газа, m_α — масса частицы α-сорта, k — постоянная Больцмана. Влияние магнитного поля на свойства переноса описывается вторыми членами в правых частях (1.1) — (1.2), при этом ω_α — циклотронная частота частицы с зарядом e_α, а σ^{ikl} — перестановочный тензор. При записи выражений (1.4) — (1.5) опущены члены, зависящие от электрического поля и существенные лишь в очень сильных полях [1].

Коэффициенты η_α и λ_α связаны с эффективными временами столкновений τ_α и $\tau_\alpha{}^*$ соотношениями вида:

$$\eta_\alpha = \frac{1}{2} p_\alpha \tau_\alpha, \qquad \lambda_\alpha = \frac{5k}{2m_\alpha} p_\alpha \tau_\alpha{}^* \tag{1.6}$$

Заметим, что для однокомпонентного случая η_α и λ_α совпадают с обычными коэффициентами вязкости и теплопроводности простого газа (первое приближение Чепмена—Каулинга [2]). Величины, обратные эффективным временам столкновений, $\tau_\alpha{}^{-1}$ и $(\tau_\alpha{}^*)^{-1}$ записываются как линейные комбинации величин $\tau_{\alpha\beta}{}^{-1}$ — эффективных частот столкновений частиц α- и β-сорта. Выражения для τ_α, $\tau_\alpha{}^*$ и $\tau_{\alpha\beta}$, а также для коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$ даны в работе [1] [1]; в частном случае трехкомпонентной плазмы с $T_e \geqslant T_i = T_a$ и $m_i = m_a$ эти выражения приводятся ниже (§ 2).

В общем случае коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$ сложным образом зависят от отношений температур и концентраций компонент, а также отношений масс и эффективных поперечников столкновений частиц различных типов. При этом, по определению имеем $a_{\alpha\alpha} = 1$, $b_{\alpha\alpha} = 1$; кроме того, $d_{\alpha\beta} = 0$ при $T_\alpha = T_\beta$.

При отсутствии магнитного поля ($|\mathbf{B}| = 0$) общие решения уравнений (1.1) — (1.2) записываются очевидным образом

$$\pi_\alpha{}^{ik} = -\sum_\beta \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|} \eta_\beta W^{ik}, \qquad \mathbf{h}_\alpha = -\sum_\beta \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|} \lambda_\beta \mathbf{R}_\beta \tag{1.7}$$

Здесь $|a|$ и $|b|$ — определители соответствующих систем уравнений, $|a|_{\beta\alpha}$ и $|b|_{\beta\alpha}$ — алгебраические дополнения элемента $\beta\alpha$ определителей.

Для решения систем (1.1) — (1.2) при наличии произвольно ориентированного магнитного поля образуем при помощи (1.1) уравнения для сверток тензора $\pi_\alpha{}^{ik}$ с тензором $\sigma^{ris}\varkappa^k$, вектором $\varkappa^k$, тензорами $\sigma^{ris}\varkappa^s\varkappa^k$ и $\varkappa^s\varkappa^k$, а при помощи (1.2) — уравнения для $h_\alpha{}^i\sigma^{ris}\varkappa^s$ и $h_\alpha{}^i\varkappa^i$, где $\varkappa = \mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ — единичный вектор в направлении магнитного поля. Используя затем свойства антисимметричного единичного тензора σ^{ikl}, после ряда громоздких, но несложных вычислений приходим к выражению для $\pi_\alpha{}^{kr}$, записанному при помощи пяти коэффициентов вязкости

$$\pi_\alpha{}^{kr} = -\eta_\alpha{}^{(0)} W_0{}^{kr} - \eta_\alpha{}^{(1)} W_1{}^{kr} - \eta_\alpha{}^{(2)} W_2{}^{kr} + \eta_\alpha{}^{(3)} W_3{}^{kr} + \eta_\alpha{}^{(4)} W_4{}^{kr} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{gathered}\eta_\alpha{}^{(0)} = \sum_\beta \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|}\eta_\beta, \qquad \eta_\alpha{}^{(1)} = \sum_\beta \frac{|a^*|_{\beta\alpha}}{|a^*|}\eta_\beta, \qquad \eta_\alpha{}^{(2)} = \sum_\beta \frac{|a^{**}|_{\beta\alpha}}{|a^{**}|}\eta_\beta \\ \eta_\alpha{}^{(3)} = \sum_\beta \omega_\beta\tau_\beta \frac{|a^*|_{\beta\alpha}}{|a^*|}\eta_\beta{}^{(0)}, \qquad \eta_\alpha{}^{(4)} = \frac{1}{2}\sum_\beta \omega_\beta\tau_\beta \frac{|a^{**}|_{\beta\alpha}}{|a^{**}|}\eta_\beta{}^{(0)}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Аналогичным образом находится выражение для $h_\alpha{}^i$, которое удобно представить в векторной форме, вводя компоненты $\mathbf{R}_\alpha$, соответственно параллельную и перпендикулярную магнитному полю

$$\mathbf{h}_\alpha = -\sum_\beta \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|}\lambda_\beta \mathbf{R}_\beta'' - \sum_\beta \frac{|b^*|_{\beta\alpha}}{|b^*|}\left\{\lambda_\beta \mathbf{R}_\beta{}^\perp + \omega_\beta\tau_\beta{}^* \sum_\gamma \frac{|b|_{\gamma\beta}}{|b|}\lambda_\gamma (\mathbf{R}_\gamma \times \boldsymbol{\varkappa})\right\} \tag{1.10}$$

где

$$\mathbf{R}_\alpha'' = \varkappa(\varkappa \mathbf{R}_\alpha), \qquad \mathbf{R}_\alpha{}^\perp = \varkappa \times (\mathbf{R}_\alpha \times \boldsymbol{\varkappa})$$

[1] В работе [1] не выписаны явные выражения для $c_{\alpha\beta}$ и $d_{\alpha\beta}$, однако вид их легко устанавливается сравнением (1.5) с выражением (2.10) работы [1]. Кроме того, значение $\tau^{\alpha-1}$ отличается от приведенного в работе [1] множителем $^3/_4$.

Элементы определителей, помеченные одной и двумя звездочками, связаны с коэффициентами $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ соотношениями

$$a_{\alpha\beta}^* = a_{\alpha\beta} + \frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|}\omega_\alpha\tau_\alpha\omega_\beta\tau_\beta$$

$$a_{\alpha\beta}^{**} = a_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}\frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|}\omega_\alpha\tau_\alpha\omega_\beta\tau_\beta \qquad (1.11)$$

$$b_{\alpha\beta}^* = b_{\alpha\beta} + \frac{|b|_{\beta\alpha}}{|b|}\omega_\alpha\tau_\alpha^*\omega_\beta\tau_\beta^*$$

Заметим, что принятая выше форма записи выражений (1.8) и (1.10) аналогична использованной в обзорной статье Брагинского [3] для случая двухтемпературной полностью ионизованной плазмы. Там же (стр. 233) даются общие выражения для тензоров W_r^{kr}, представляющих собой различные свертки тензора W^{il} с тензорными величинами типа $\varkappa^k\varkappa^r\varkappa^i\varkappa^l$, $\delta^{kr}\varkappa^i\varkappa^l$, $\sigma^{kmi}\varkappa^r\varkappa^m\varkappa^l$ и $\sigma^{kmi}\delta^{rl}\varkappa^m$.

Вид тензоров W_p^{kr} заметно упрощается в специально выбранной системе координат, где ось x направлена вдоль магнитного поля. Для компонент тензора вязких напряжений π_α^{ik} в этой системе координат имеем

$$\pi_\alpha^{xx} = -\eta_\alpha^{(0)}W^{xx}$$

$$\pi_\alpha^{yy} = -\eta_\alpha^{(0)}\,{}^1/_2\,(W^{yy}+W^{zz}) - \eta_\alpha^{(1)}\,{}^1/_2\,(W^{yy}-W^{zz}) - \eta_\alpha^{(3)}W^{yz}$$

$$\pi_\alpha^{zz} = -\eta_\alpha^{(0)}\,{}^1/_2\,(W^{zz}+W^{yy}) - \eta_\alpha^{(1)}\,{}^1/_2\,(W^{zz}-W^{yy}) + \eta_\alpha^{(3)}W^{yz}$$

$$\pi_\alpha^{yz} = \pi_\alpha^{zy} = -\eta_\alpha^{(1)}W^{yz} + \eta_\alpha^{(3)}\,{}^1/_2\,(W^{yy}-W^{zz}) \qquad (1.12)$$

$$\pi_\alpha^{xy} = \pi_\alpha^{yx} = -\eta_\alpha^{(2)}W^{xy} - \eta_\alpha^{(4)}W^{xz}$$

$$\pi_\alpha^{xz} = \pi_\alpha^{zx} = -\eta_\alpha^{(2)}W^{xz} + \eta_\alpha^{(4)}W^{xy}$$

Полученные выше соотношения (1.8) (или (1.12)) и (1.10) позволяют вычислить тензор вязких напряжений и относительный тепловой поток для любой из компонент неизотермической многокомпонентной плазмы в магнитном поле. Полный тензор вязких напряжений π^{ik} и поток тепла $\mathbf{q}$ в плазме находятся простым суммированием соответствующих величин для компонент:

$$\pi^{ik} = \sum_\alpha \pi_\alpha^{ik}, \qquad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{h}_\alpha + 2.5\sum_\alpha p_\alpha \mathbf{w}_\alpha \qquad (1.13)$$

Анализ выражений для тензора вязких напряжений и потока тепла в общем случае представляет собой довольно трудную задачу из-за сложности как самих выражений, так и входящих в них коэффициентов. Поэтому в последующем изложении рассматривается частный случай трехкомпонентной плазмы с $T_e \gg T_i = T_a$ и $m_i = m_a$. Помимо практического интереса рассмотрение этого случая позволяет записать коэффициенты вязкости и теплопроводности в виде, доступном для детального анализа их зависимости от отношения температур компонент (степени «неизотермичности»), отношения концентраций частиц (степени ионизации) и величины магнитного поля (степени «замагниченности» плазмы).

Заметим, что в [1] уже высказывался ряд общих соображений о виде коэффициентов вязкости и теплопроводности двухтемпературного частично ионизованного газа. При этом использовалась упрощенная исходная система уравнений, получаемая в результате пренебрежения перекрестными членами в уравнениях для электронов и членами, содержащими электронные величины, в уравнениях для ионов и атомов (аналогично тому, как это делалось ранее в [4, 5]). Проводимый ниже анализ точных решений показывает, в частности, при каких условиях допустим такой подход к решению исходных систем уравнений.

2. Ниже дается сводка коэффициентов исходной системы уравнений (1.1) — (1.2) для случая двухтемпературного частично ионизованного газа. Массы ионов и атомов, а также температуры тяжелых компонент предполагаются одинаковыми ($T_i = T_a = T$, $m_i = m_a = m$). При упрощении общих выражений для коэффициентов [1] существенно используются условия

$$\varepsilon = m_e / m \ll 1, \qquad \varepsilon\theta \ll 1 \qquad (\theta = T / T_e) \tag{2.1}$$

Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $d_{\alpha\beta}$

$$a_{ee} = a_{ii} = a_{aa} = 1 \tag{2.2}$$

$$a_{ei} = -\,0.4\,\varepsilon\tau_e\tau_{ie}^{-1}, \qquad a_{ie} = -\,0.2\,\varepsilon\,(3\theta - 1)\,\tau_i\tau_{ei}^{-1}$$

$$a_{ea} = -\,4\varepsilon f_{ea}\tau_e\tau_{ae}^{-1}, \qquad a_{ae} = -\,4\varepsilon\,[f_{ea} + {}^1/_4\zeta_{ea}\,(1 - \theta)]\,\tau_a\tau_{ea}^{-1}$$

$$a_{ia} = -\,f_{ia}\tau_i\tau_{ai}^{-1}, \qquad a_{ai} = -\,f_{ia}\tau_a\tau_{ia}^{-1}$$

$$b_{ee} = b_{ii} = b_{aa} = 1 \tag{2.3}$$

$$b_{ei} = -\,2.7\varepsilon\tau_e{}^*\tau_{ie}{}^{-1}, \qquad b_{ie} = -\,4.5\varepsilon^2\,[\theta^2 - 0.4\theta - {}^4/_{45}\,(\ln\Lambda)^{-1}]\,\tau_i{}^*\tau_{ei}{}^{-1}$$

$$b_{ea} = -\,8\varepsilon g_{ea}\tau_e{}^*\tau_{ae}{}^{-1}, \qquad b_{ae} = -\,8\varepsilon^2\,[g_{ea}\theta^2 - s_{ea}\theta\,(1 - \theta) + t_{ea}\,(1 - \theta)^2]\,\tau_a{}^*\tau_{ea}{}^{-1}$$

$$b_{ia} = -\,g_{ia}\tau_i{}^*\tau_{ai}{}^{-1}, \qquad b_{ai} = -\,g_{ia}\tau_a{}^*\tau_{ia}{}^{-1}$$

$$c_{ei} = -\,{}^3/_5, \qquad c_{ie} = {}^6/_5\,\varepsilon^2\,(1 - 1.5\theta), \qquad c_{ai} = c_{ia} = {}^1/_4\zeta_{ia}$$

$$c_{ea} = \zeta_{ea} - {}^4/_3\varepsilon\,(1 - \theta)\,(1 + 6f_{ea} + 1.5\zeta_{ea}) \tag{2.4}$$

$$c_{ae} = \varepsilon^2\,[\zeta_{ea}\theta - 2\zeta_{ea}\,(1 - \theta) + {}^4/_3\,(1 + 6f_{ea} + 3\zeta_{ea})\,(\theta^{-1} - 1)]$$

$$d_{ee} = d_{ii} = d_{aa} = d_{ia} = d_{ai} = 0 \tag{2.5}$$

$$d_{ei} = d_{ea} = 2\varepsilon\,(1 - \theta), \qquad d_{ie} = d_{ae} = 2\varepsilon\,(1 - \theta^{-1})$$

Величины τ_α, $\tau_\alpha{}^*$

$$\tau_e{}^{-1} = 0.3\tau_{ee}^{-1} + 0.6\tau_{ei}^{-1} + 0.6A_{ea}{}^*\tau_{ea}^{-1} \tag{2.6}$$

$$\tau_i{}^{-1} = 0.3\tau_{ii}^{-1} + f_{ia}{}'\tau_{ia}{}^{-1} + \varepsilon\tau_{ie}{}^{-1}, \qquad \tau_a{}^{-1} = 0.3A_{aa}{}^*\tau_{aa}{}^{-1} + f_{ia}{}'\tau_{ai}{}^{-1} + \varepsilon\tau_{ae}{}^{-1}$$

$$(\tau_e{}^*)^{-1} = 0.4\tau_{ee}{}^{-1} + 1.3\tau_{ei}{}^{-1} + (2.5 - 1.2B_{ea}{}^*)\,\tau_{ea}{}^{-1} \tag{2.7}$$

$$(\tau_i{}^*)^{-1} = 0.4\tau_{ii}{}^{-1} + g_{ia}{}'\tau_{ia}{}^{-1} + 3\varepsilon\tau_{ie}^{-1}$$

$$(\tau_a{}^*)^{-1} = 0.4A_{aa}{}^*\tau_{aa}^{-1} + g'_{ia}\tau_{ai}^{-1} + 3\varepsilon\tau_{ae}^{-1}$$

При этом

$$f_{\alpha\beta} = {}^1/_4\,(1 - 0.6A_{\alpha\beta}{}^*), \qquad g_{\alpha\beta} = {}^{11}/_{16} - 0.2A_{\alpha\beta}{}^* - 0.15B_{\alpha\beta}{}^* \tag{2.8}$$

$$f'_{\alpha\beta} = {}^1/_4\,(1 + 0.6A_{\alpha\beta}{}^*), \qquad g'_{\alpha\beta} = {}^{11}/_{16} + 0.2A_{\alpha\beta}{}^* - 0.15B_{\alpha\beta}{}^*$$

$$\zeta_{\alpha\beta} = 1.2C_{\alpha\beta}{}^* - 1 \tag{2.9}$$

$$s_{\alpha\beta} = 0.625 + 0.2A_{\alpha\beta}{}^* + 0.3B_{\alpha\beta}{}^* + 0.3D_{\alpha\beta}{}^* - 2.4C_{\alpha\beta}{}^* \tag{2.10}$$

$$t_{\alpha\beta} = 1.5C_{\alpha\beta}{}^* - 0.6B_{\alpha\beta}{}^* - 0.3D_{\alpha\beta}{}^*$$

Времена столкновений $\tau_{\alpha\beta}$ и коэффициенты $A_{\alpha\beta}^*$, $B_{\alpha\beta}^*$, $C_{\alpha\beta}^*$, $D_{\alpha\beta}^*$ выражаются при помощи известных интегралов [2] Чепмена — Каулинга $\Omega_{\alpha\beta}^{lr}$

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{16}{3} n_\beta \Omega_{\alpha\beta}^{11} \tag{2.11}$$

$$A_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{22}}{2\Omega_{\alpha\beta}^{11}}, \qquad B_{\alpha\beta}^* = \frac{5\Omega_{\alpha\beta}^{12} - \Omega_{\alpha\beta}^{13}}{3\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \tag{2.12}$$

$$C_{\alpha\beta}^* = \frac{\Omega_{\alpha\beta}^{12}}{3\Omega_{\alpha\beta}^{11}} \quad D_{\alpha\beta}^* = \frac{2\Omega_{\alpha\beta}^{23} - 5\Omega_{\alpha\beta}^{22}}{6\Omega_{\alpha\beta}^{11}},$$

Здесь n_β — плотность частиц β-сорта

$$\Omega_{\alpha\beta}^{lr} = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \zeta^{2r+2} e^{-\zeta^2} g_{\alpha\beta} (1 - \cos^l \chi_{\alpha\beta})\, b\, db\, d\zeta \tag{2.13}$$

При этом

$$g_{\alpha\beta} = \left(\frac{2}{\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} \zeta, \qquad \gamma_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{kT_\alpha}{m_\alpha} + \frac{kT_\beta}{m_\beta} \tag{2.14}$$

а угол рассеяния $\chi_{\alpha\beta}$ есть функция $g_{\alpha\beta}$ и b, определяемая видом закона взаимодействия частиц α- и β-сорта.

Для частиц, взаимодействующих как твердые упругие шарики

$$\frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} = \frac{16}{3} n_\beta \left(\frac{1}{2\pi\gamma_{\alpha\beta}}\right)^{1/2} Q_{\alpha\beta}, \quad A_{\alpha\beta}^* = B_{\alpha\beta}^* = C_{\alpha\beta}^* = D_{\alpha\beta}^* = 1 \tag{2.15}$$

Здесь $Q_{\alpha\beta}$ — геометрическое сечение столкновений частиц α- и β-сорта.

Выражением (2.15) удобно пользоваться и в случае других законов взаимодействия, при этом $Q_{\alpha\beta}$ может рассматриваться как некоторое эффективное сечение столкновений, являющееся в общем случае функцией температур компонент. При этом A^*, B^*, C^*, D^* также оказываются слабо меняющимися функциями температур.

В рассматриваемом нами случае ($m_i = m_a$, $T_i = T_a$, $m_e T / m T_e \ll 1$) времена столкновений заряженных частиц с нейтральными и нейтралов между собой записываются в виде

$$\frac{1}{\tau_{ea}} = \frac{16}{3} n_a \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e}\right)^{1/2} Q_{ea}(T_e), \qquad \frac{1}{\tau_{ae}} = \frac{n_e}{n_a} \frac{1}{\tau_{ea}} \tag{2.16}$$

$$\frac{1}{\tau_{ia}} = \frac{16}{3} n_a \left(\frac{kT}{\pi m}\right)^{1/2} Q_{ia}(T), \qquad \frac{1}{\tau_{ai}} = \frac{n_i}{n_a} \frac{1}{\tau_{ia}}$$

$$\frac{1}{\tau_{aa}} = \frac{16}{3} n_a \left(\frac{kT}{\pi m}\right)^{1/2} Q_{aa}(T)$$

Для взаимодействий заряженных частиц имеем:

$$\frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{16}{3} n_i \left(\frac{kT_e}{2\pi m_e}\right)^{1/2} Q_{ei}, \qquad \frac{1}{\tau_{ie}} = \frac{n_e}{n_i} \frac{1}{\tau_{ei}} \tag{2.17}$$

$$\frac{1}{\tau_{ee}} = \frac{16}{3} n_e \left(\frac{kT_e}{\pi m_e}\right)^{1/2} Q_{ee}, \qquad \frac{1}{\tau_{ii}} = \frac{16}{3} n_i \left(\frac{kT}{\pi m}\right)^{1/2} Q_{ii}$$

При этом

$$Q_{ee} = \frac{\pi}{2} \frac{e^4}{(kT_e)^2} \ln \Lambda_{ee}, \quad Q_{ei} = \frac{\pi}{2} \frac{z^2 e^4}{(kT_e)^2} \ln \Lambda_{ei}, \qquad Q_{ii} = \frac{\pi}{2} \frac{z^4 e^4}{(kT)^2} \ln \Lambda_{ii} \tag{2.18}$$

Здесь $e = |e_e|$ — заряд электрона, ze — заряд иона, $\ln \Lambda_{\alpha\beta}$ — кулоновский логарифм, значения которого табулированы, например, в [6].

В дальнейшем понадобятся оценки отношений $\tau_{\alpha\beta}^{-1} / \tau_{\delta\gamma}^{-1}$ или, так как эти величины пропорциональны Q, оценки отношений $Q_{\alpha\beta} / Q_{\delta\gamma}$.

Для электронов и ионов, принимая без большой погрешности [4], что $\ln \Lambda_{ee} \approx \ln \Lambda_{ie} \approx \ln \Lambda_{ii}$, непосредственно из (2.18) имеем

$$Q_{ee} / Q_{ii} \sim \theta^2 / z^4, \qquad Q_{ei} / Q_{ii} \sim \theta^2 / z^2, \qquad Q_{ee} / Q_{ei} \sim 1 / z^2$$

Для оценки отношений Q_{ea} / Q_{aa} можно воспользоваться теоретическими и экспериментальными данными работ [7-8], в которых приводятся полные эффективные сечения упругих столкновений электронов с атомами и молекулами различных газов. Интересующие нас диффузионные сечения рассеяния, через которые выражаются Q_{ea}, отличаются от полных сечений не более чем на 10% для большинства газов[7]. В [10] обсуждается большое число данных по сечениям Q_{ea} для инертных газов. Сечения Q_{aa} для различных потенциалов взаимодействия можно оценить, используя приведенные в [9] значения Ω_{aa}^{11*}. Сравнивая эти результаты, можно приближенно принять, что в диапазонах температур $5 \cdot 10^2\,°\mathrm{K} \leqslant T \leqslant 10^4\,°\mathrm{K}$, $5 \cdot 10^3\,°\mathrm{K} \leqslant T_e \leqslant 5 \cdot 10^5\,°\mathrm{K}$ имеет место оценка

$$Q_{ea} / Q_{aa} \sim 1 \div 10$$

По сечениям взаимодействия ионов с атомами имеется сравнительно мало данных, но, судя по некоторым результатам (см., например, [11,12]), можно ограничиться приближенной оценкой

$$Q_{ia} / Q_{aa} \sim 1$$

При оценке Q_{ii} следует иметь в виду, что для рассматриваемого диапазона температур и в диапазоне плотностей заряженных частиц $10^9 \leqslant n_i \leqslant 10^{15}$ *см*$^{-3}$ кулоновский логарифм $\ln \Lambda$ заключен в пределах от 5 до 13. Тогда, используя результаты [9] для сечений Q_{aa}, приходим к оценке

$$Q_{aa} / Q_{ii} \sim (10^{-2} \div 10^{-5})$$

3. Используя приведенные в § 2 значения коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, можно заметно упростить общие выражения для коэффициентов вязкости (1.9). С точностью до величин порядка $(\varepsilon\theta)^{1/2}$ по отношению к оставленным определители $|a|$, $|a^*|$ и $|a^{**}|$ равны

$$|a| \approx 1 - a_{ia}a_{ai} = \Delta, \qquad |a^*| \approx \Delta(1 + \omega_e^2\tau_e^2)(1 + \Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2)$$

$$|a^{**}| \approx \Delta(1 + {}^1/_4\,\omega_e^2\tau_e^2)(1 + {}^1/_4\,\Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2) \tag{3.1}$$

$$\Delta = 1 - f_{ia}^2\tau_i\tau_a\tau_{ai}^{-1}\tau_{ia}^{-1} \tag{3.2}$$

Коэффициенты $\eta_e^{(p)}$ для электронной компоненты при $\omega_i\tau_i \ll 1$ принимают вид

$$\eta_e^{(0)} = \frac{1}{2}\,p_e\tau_e, \qquad \eta_e^{(1)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + \omega_e^2\tau_e^2}, \qquad \eta_e^{(2)} = \frac{\eta_e^{(0)}}{1 + {}^1/_4\omega_e^2\tau_e^2}$$

$$\eta_e^{(3)} = \frac{\omega_e\tau_e}{1 + \omega_e^2\tau_e^2}\,\eta_e^{(0)}, \qquad \eta_e^{(4)} = \frac{{}^1/_2\omega_e\tau_e}{1 + {}^1/_4\omega_e^2\tau_e^2}\,\eta_e^{(0)} \tag{3.3}$$

В (3.3) опущены члены, имеющие порядок $\varepsilon^{1/2}\theta^{5/2}$ по отношению к оставленным. Заметим, что коэффициенты $\eta_e^{(p)}$ в форме (3.3) могут быть получены и непосредственно из (1.1), если использовать уравнение для электронной компоненты, пренебрегая в нем ионными и атомными перекрестными членами. Подобный прием использовался ранее в работах [4,5]. Анализ точных решений показывает, однако, что при $\omega_i \tau_i \gtrsim 1$ учет перекрестных членов может приводить к заметным поправкам в коэффициентах $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$. В случае полностью ионизованного газа, например, наряду с членами порядка $\varepsilon^{1/2}\theta^{5/2}$, в коэффициентах при $\omega_i^2 \tau_i^2$ появляются члены, имеющие порядок $\varepsilon^{1/2}\theta^{5/2} |\omega_e \tau_e| / \omega_i \tau_i \sim \theta$ по сравнению с единицей. Тогда при $\omega_i \tau_i \gg 1$ коэффициенты $\eta_e^{(1)}$ и $\eta_e^{(2)}$ для этого случая принимают вид

$$\eta_e^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{p_e}{\omega_e^2 \tau_e} (1 + 0.4\theta), \qquad \eta_e^{(2)} = 2 \frac{p_e}{\omega_e^2 \tau_e} (1 + 0.4\theta) \tag{3.4}$$

Этот результат отличается от выражений, приведенных в [3,4], множителем $(1 + 0.4\theta)$. Расхождение с [3] связано, по-видимому, с тем, что коэффициенты переноса для каждой из компонент определялись в этой работе решением системы «развязанных» кинетических уравнений для электронов и ионов, полученных в результате ряда упрощений в перекрестных столкновительных членах [1]. В [4] перекрестные члены отбрасывались уже в самих уравнениях переноса.

Коэффициенты $\eta_i^{(p)}$ и $\eta_a^{(p)}$ для ионов и атомов могут быть представлены в виде

$$\eta_i^{(0)} = {}^1/_2 p_i \tau_i \xi_i \Delta^{-1}, \qquad \eta_i^{(1)} = \frac{\eta_i^{(0)}}{1 + \Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2}, \qquad \eta_i^{(2)} = \frac{\eta_i^{(0)}}{1 + {}^1/_4\Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2}$$

$$\eta_i^{(3)} = \frac{\omega_i \tau_i \Delta^{-1}}{1 + \Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2} \eta_i^{(0)}, \qquad \eta_i^{(4)} = \frac{{}^1/_2 \omega_i \tau_i \Delta^{-1}}{1 + {}^1/_4\Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2} \eta_i^{(0)} \tag{3.5}$$

$$\eta_a^{(0)} = {}^1/_2 p_a \tau_a \xi_a \Delta^{-1}, \qquad \eta_a^{(1)} = {}^1/_2 p_a \tau_a \Delta^{-1} \frac{\xi_a + \Delta^{-1}\omega_i^2\tau_i^2}{1 + \Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2}$$

$$\eta_a^{(2)} = \frac{1}{2} p_a \tau_a \Delta^{-1} \frac{\xi_a + {}^1/_4\Delta^{-1}\omega_i^2\tau_i^2}{1 + {}^1/_4\Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2} \tag{3.6}$$

$$\eta_a^{(3)} = \frac{1}{2} p_a \tau_a \Delta^{-2} \frac{(\xi_a - \Delta)\,\omega_i \tau_i}{1 + \Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2}, \qquad \eta_a^{(4)} = \frac{1}{4} p_a \tau_a \Delta^{-2} \frac{(\xi_a - \Delta)\,\omega_i \tau_i}{1 + {}^1/_4\Delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^2}$$

$$\xi_a = 1 + f_{ia} \tau_i \tau_{ai}^{-1}, \qquad \xi_i = 1 + f_{ia} \tau_a \tau_{ia}^{-1} \tag{3.7}$$

В (3.5) и (3.6) опущены члены, максимальный порядок которых $\varepsilon\theta^{-1}$ по отношению к оставленным. Полученные выражения справедливы, таким образом, для условий, при которых

$$T_e / T \ll m / m_e \tag{3.8}$$

Следует отметить, что коэффициенты вязкости, определяемые выражениями (3.3) и (3.5) — (3.6), имеют фактически тот же вид, что и в работе [5], где рассматривался случай частично ионизованного газа с одинаковыми температурами компонент. Отличие заключается в том, что величины τ_{ee}^{-1}, τ_{ei}^{-1} и τ_{ea}^{-1}, входящие в эффективные времена столкновений τ_e, τ_a, τ_i, должны теперь записываться при температуре электронов T_e вместо T. Кроме того, очевидно, $p_e = n_e k T_e$, $p_i = n_i k T$, $p_a = n_a k T$.

[1] При сравнении (3.4) с выражениями работы [3] следует иметь в виду, что τ_e в [3] соответствует в наших обозначениях τ_{ei} и что, хотя коэффициенты $\eta^{(p)}{}_e$ в [3] вычислены с учетом большего числа членов в разложении функции распределения, для больших $\omega_i \tau_i$ любой порядок приближения дает совпадающие результаты.

В заключение этого параграфа проанализируем кратко вклад каждой из компонент в полные коэффициенты вязкости $\eta^{(p)} = \eta_e^{(p)} + \eta_i^{(p)} + \eta_a^{(p)}$ в зависимости от степени ионизации $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$, степени «неизотермичности» θ и величин $\omega_e\tau_e$, $\omega_i\tau_i$.

Для этой цели вместо $\eta_\alpha^{(p)}$ удобно ввести значения приведенных коэффициентов вязкости, определяемых как

$$\eta_\alpha^{(p)*} = \eta_\alpha^{(p)} \frac{Q_{aa}}{(mkT)^{1/2}} \tag{3.9}$$

Учитывая, что ξ_i, ξ_a и Δ близки к единице, используя приведенные в § 2 выражения для τ_e, τ_a, τ_i и оценки для отношений $Q_{\alpha\beta} / Q_{\delta\gamma}$, имеем

$$\eta_e^{(0)*} \sim \varepsilon^{1/2}\theta^{-5/2} \frac{\alpha\beta}{\alpha + (1-\alpha)\beta\theta^{-2}}, \qquad \eta_i^{(0)*} \sim \frac{\alpha\beta}{\alpha + (1-\alpha)\beta}, \qquad \eta_a^{(0)*} \sim \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

где (3.10)

$$\beta = Q_{aa} / Q_{ii} \sim (10^{-2} \div 10^{-5})$$

Как видно, относительный вклад $\eta_e^{(0)}$ в полный коэффициент вязкости пренебрежимо мал при $\theta = 1$, но может оказаться сравнимым с вкладом $\eta_i^{(0)}$ уже при $\theta \sim \varepsilon^{1/5}$, т. е. при $T_e / T \sim (5 \div 10)$. Заметим при этом, что роль $\eta_i^{(0)}$ становится существенной лишь при высоких степенях ионизации $\alpha \gtrsim 1 - \beta$. Для $\alpha \lll 1 - \beta$ основной вклад вносится коэффициентом вязкости $\eta_a^{(0)}$.

Для анализа относительного вклада коэффициентов $\eta_\alpha^{(1)}$ и $\eta_\alpha^{(3)}$ помимо (3.10) необходимы дополнительные оценки

$$\frac{\omega_i\tau_i}{|\omega_e\tau_e|} \sim \varepsilon^{1/2}\theta^{-1/2} \frac{\alpha\theta^2 + (1-\alpha)\beta}{\alpha + (1-\alpha)\beta}, \qquad \xi_a - \Delta \sim \frac{\alpha\beta}{\alpha + (1-\alpha)\beta} \tag{3.11}$$

Сравнивая выражения для приведенных коэффициентов вязкости, находим, что вклад отдельных компонент в $\eta^{(1)}$ аналогичен предыдущему случаю с той лишь разницей, что в сильном магнитном поле $(\omega_i\tau_i \gg 1)$ влияние $\eta_i^{(1)}$ сказывается при еще более высоких степенях ионизации $\alpha \sim 1 - \beta / \omega_i^2\tau_i^2$.

Вклад $\eta_e^{(3)}$, $\eta_i^{(3)}$ и $\eta_a^{(3)}$ в $\eta^{(3)}$ оказывается примерно одинаковым в слабом магнитном поле $(|\omega_e|\tau_e \lesssim 1)$ при $\alpha \ll 1$. С возрастанием степени ионизации уменьшается вклад $\eta_a^{(3)}$, а с ростом магнитного поля уменьшается роль $\eta_e^{(3)}$, так что при $\omega_i\tau_i \gg 1$ $\eta_e^{(3)} \ll \eta_i^{(3)}, \eta_a^{(3)}$. Неизотермичность лишь усиливает относительный вклад $\eta_e^{(3)}$. Для коэффициентов $\eta^{(2)}$ и $\eta^{(4)}$ справедливы выводы, сделанные при анализе $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(3)}$.

4. Относительный тепловой поток каждой из компонент $\mathbf{h}_\alpha$, в соответствии со структурой $\mathbf{R}_\alpha$, складывается из нескольких независимых частей. Рассмотрим сначала ту его часть, которая определяется градиентами температур компонент.

Вычисляя определители $|b|$ и $|b^*|$ с точностью до величин порядка $\varepsilon^{5/2}\theta^{3/2}$, находим

$$|b| \approx 1 - b_{ia}b_{ai} = \delta, \qquad |b^*| = \delta\,(1 + \omega_e^2\tau_e^{*2})\,(1 + \delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^{*2}) \tag{4.1}$$

$$\delta = 1 - g^2\tau_i^*\tau_a^*\tau_{ia}^{-1}\tau_{ai}^{-1} \tag{4.2}$$

Из (1.10) следует, что выражение для $\mathbf{h}_\alpha^{(t)}$ в общем случае содержит члены, пропорциональные градиентам температур всех компонент. Анализ соответствующих коэффициентов показывает, однако, что в электронном тепловом потоке $\mathbf{h}_e^{(t)}$ основной вклад дают члены, зависящие лишь от ∇T_e. Тогда выражение для $\mathbf{h}_e^{(t)}$ можно представить в виде

$$\mathbf{h}_e^{(t)} = -\lambda_e^{\parallel} \nabla_{\parallel} T_e - \lambda_e^{\perp} \nabla_{\perp} T_e - \lambda_e^{\wedge} (\nabla T_e \times \varkappa) \tag{4.3}$$

Коэффициенты теплопроводности λ_e определены при этом как

$$\lambda_e^{\parallel} = \frac{5}{2}\frac{k}{m_e} p_e \tau_e^*, \quad \lambda_e^{\perp} = \frac{\lambda_e^{\parallel}}{1 + (\omega_e \tau_e^*)^2}, \quad \lambda_e^{\wedge} = \frac{\omega_e \tau_e^* \lambda_e^{\parallel}}{1 + (\omega_e \tau_e^*)^2} \tag{4.4}$$

При записи (4.3) — (4.4) опущены члены, порядок которых $\varepsilon^{3/2}\theta^{5/2} \mid \nabla_{\parallel} T \mid / \mid \nabla_{\parallel} T_e \mid$ и $\varepsilon\theta \mid \nabla_{\perp} T \mid / \mid \nabla_{\perp} T_e \mid$ по отношению к оставленным. Аналогичные оценки в выражениях для $\mathbf{h}_i^{(t)}$ и $\mathbf{h}_a^{(t)}$ позволяют, при некоторых условиях, опустить в них члены, пропорциональные градиентам ∇T_e. Тогда

$$\mathbf{h}_{i,a}^{(t)} = -\lambda_{i,a}^{\parallel} \nabla_{\parallel} T - \lambda_{i,a}^{\perp} \nabla_{\perp} T - \lambda_{i,a}^{\wedge} (\nabla T \times \varkappa) \tag{4.5}$$

где

$$\lambda_i^{\parallel} = \frac{5}{2}\frac{k}{m} p_i \tau_i^* \xi_i^* \delta^{-1}, \quad \lambda_i^{\perp} = \frac{\lambda_i^{\parallel}}{1 + \delta^{-2} (\omega_i \tau_i^*)^2}, \quad \lambda_i^{\wedge} = \frac{\omega_i \tau_i^* \delta^{-1} \lambda_i^{\parallel}}{1 + \delta^{-2} (\omega_i \tau_i^*)^2}$$

$$\lambda_a^{\parallel} = \frac{5}{2}\frac{k}{m} p_a \tau_a^* \xi_a^* \delta^{-1}, \quad \lambda_a^{\perp} = \frac{5}{2}\frac{k}{m} p_a \tau_a^* \delta^{-1} \frac{\xi_a^* + \delta^{-1} (\omega_i \tau_i^*)^2}{1 + \delta^{-2} (\omega_i \tau_i^*)^2} \tag{4.6}$$

$$\lambda_a^{\wedge} = \frac{5}{2}\frac{k}{m} p_a \tau_a^* \delta^{-2} \frac{(\xi_a^* - \delta)\, \omega_i \tau_i^*}{1 + \delta^{-2} (\omega_i \tau_i^*)^2} \tag{4.7}$$

При этом

$$\xi_i^* = 1 + g_{ia} \tau_a^* \tau_{ia}^{-1}, \qquad \xi_a^* = 1 + g_{ia} \tau_i^* \tau_{ai}^{-1} \tag{4.8}$$

В (4.5) — (4.7) опущены члены, максимальный порядок которых $\varepsilon \mid \nabla T_e \mid / \mid \nabla T \mid$ и $\varepsilon\theta^{-1} (5 \ln \Lambda)^{-1} \mid \nabla T_e \mid / \mid \nabla T \mid$ по отношению к оставленным. При $\mid \nabla T_e \mid \sim \mid \nabla T \mid$ это приводит к условию $T_e / T \ll 5 \ln \Lambda m / m_e$. Так как $\ln \Lambda \sim 10$, это условие оказывается менее жестким, чем (3.8). Если $\mid \nabla T_e \mid / \mid \nabla T \mid \sim T_e / T$, то ограничение на величину T_e / T оказывается несколько более жестким, чем (3.8), а именно

$$(T_e / T)^2 \ll 5 \ln \Lambda m / m_e$$

Заметим, что при указанных ограничениях коэффициенты теплопроводности (4.4), (4.6) — (4.7) описываются теми же выражениями, что и в случае одинаковых температур компонент [5]. При этом времена τ_{ee}^{-1}, τ_{ei}^{-1} и τ_{ea}^{-1}, входящие в τ_e^*, τ_i^*, τ_a^*, и давление $p_e = n_e k T_e$ записываются при температуре электронов T_e.

Для анализа вклада каждой из компонент в полный тепловой поток $\mathbf{h}^{(t)} = \mathbf{h}_e^{(t)} + \mathbf{h}_i^{(t)} + \mathbf{h}_a^{(t)}$ воспользуемся тем обстоятельством, что для величин τ_α^*, ξ_α^* и δ имеют место те же оценки, что и для τ_α, ξ_α и Δ. Введем вместо λ_α приведенные коэффициенты теплопроводности

$$\lambda_\alpha^* = \lambda_\alpha \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} \frac{Q_{aa}}{k} \tag{4.9}$$

Тогда

$$\lambda_e^{\parallel *} \sim \varepsilon^{-1/2}\theta^{-5/2} \frac{\alpha\beta}{\alpha + (1-\alpha)\beta\theta^{-2}}$$

$$\lambda_i^{\parallel *} \sim \frac{\alpha\beta}{\alpha + (1-\alpha)\beta}, \qquad \lambda_a^{\parallel *} \sim \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tag{4.10}$$

Из сравнения выражений для λ_α^* следует, что полный поток тепла вдоль магнитного поля определяется в основном значениями $\mathbf{h}_e$ и $\mathbf{h}_a$, а вклад ионов пренебрежимо мал, причем неизотермичность лишь усиливает это обстоятельство. С увеличением степени ионизации быстро возрастает электронный тепловой поток, и уже при $\alpha \sim (\varepsilon\theta)^{1/2} |\nabla_\| T| / |\nabla_\| T_e|$ потоки тепла атомов и электронов становятся сравнимыми.

Увеличение магнитного поля заметно ограничивает электронный тепловой поток поперек поля, поэтому при $|\omega_e\tau_e^*| \gg 1$ основной вклад в поперечный тепловой поток вносят $\mathbf{h}_a$ и $\mathbf{h}_i$. При этом вклад ионов становится существенным лишь при высоких степенях ионизации $\alpha \sim 1 - \beta$, а для $\omega_i\tau_i^* \gtrsim 1$ при $\alpha \sim 1 - \beta / (\omega_i\tau_i^*)^2$.

Полный поток тепла, перпендикулярный как магнитному полю, так и градиенту температуры, при $|\omega_e\tau_e^*| \lesssim 1$ определяется в основном величиной $\mathbf{h}_e$. С возрастанием магнитного поля вклад $\mathbf{h}_i$ и $\mathbf{h}_a$ увеличивается и становится одного порядка с $\mathbf{h}_e$ при $\omega_i\tau_i^* \gtrsim 1$. Неизотермичность приводит к заметному возрастанию относительного вклада $\mathbf{h}_e$.

Рассмотрим теперь ту часть теплового потока $\mathbf{h}_\alpha$, которая пропорциональна относительным скоростям компонент [1]. В интересующем нас случае трехкомпонентной плазмы соответствующую часть вектора $\mathbf{R}_\alpha$ удобно выразить через плотность электрического тока $\mathbf{j} = - n_e e (\mathbf{w}_e - \mathbf{w}_i)$ и скорость «скольжения» ионов $\mathrm{S} = \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_a$. Тогда в относительном тепловом потоке α-компоненты $\mathbf{h}_\alpha$, помимо рассмотренной выше «температурной» части $\mathbf{h}_\alpha^{(t)}$, выделяются члены

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\alpha^{(j)} &= -\chi_\alpha^\| \mathbf{j}_\| - \chi_\alpha^\perp \mathbf{j}_\perp - \chi_\alpha^\wedge (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\varkappa}) \\ \mathbf{h}_\alpha^{(s)} &= -\mu_\alpha^\| \mathrm{S}_\| - \mu_\alpha^\perp \mathrm{S}_\perp - \mu_\alpha^\wedge (\mathrm{S} \times \boldsymbol{\varkappa}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

так что

$$\mathbf{h}_\alpha = \mathbf{h}_\alpha^{(t)} + \mathbf{h}_\alpha^{(j)} + \mathbf{h}_\alpha^{(s)} \tag{4.12}$$

Коэффициенты χ_e, с точностью до членов $\sim \varepsilon^{5/2}\theta^{-1/2}$, определены выражениями

$$\chi_e^\| = -\alpha_T \frac{kT_e}{e}, \qquad \chi_e^\perp = -\frac{\alpha_T}{1 + (\omega_e\tau_e^*)^2} \frac{kT_e}{e}$$

$$\chi_e^\wedge = -\frac{\alpha_T \omega_e\tau_e^*}{1 + (\omega_e\tau_e^*)^2} \frac{kT_e}{e} \tag{4.13}$$

где

$$\alpha_T = {}^5/_2 \tau_e^* (\zeta_{ea}\tau_{ea}^{-1} - 0.6\tau_{ei}^{-1}) \tag{4.14}$$

При вычислении коэффициентов χ_i и χ_a, в них возникают заметные добавки, связанные с учетом электронных перекрестных членов. Однако сами эти коэффициенты имеют порядок $\varepsilon^{3/2}\theta^{5/2}$ и $\varepsilon^{3/2}\theta^{-1/2}$ по сравнению с χ_e, поэтому их относительным вкладом в полные коэффициенты при проекциях $\mathbf{j}$ в выражении для $\mathbf{h}^{(j)} = \mathbf{h}_e^{(j)} + \mathbf{h}_i^{(j)} + \mathbf{h}_a^{(j)}$ можно пренебречь.

Что касается коэффициентов μ_α, то вклад их в полные коэффициенты при проекциях вектора S в выражении для $\mathbf{h}^{(s)}$ оказывается одного порядка для всех компонент. Не выписывая конкретных выражений для каждого из этих коэффициентов, приведем сразу выражение для полного теплового потока $\mathbf{q}$, в котором, помимо вкладов от $\mathbf{h}^{(j)}$ и $\mathbf{h}^{(s)}$, необходимо учесть дополнительный вклад в коэффициенты при $\mathbf{j}_\|$, $\mathbf{j}_\perp$, $\mathrm{S}_\|$, $\mathrm{S}_\perp$, возникающий вследствие члена ${}^5/_2\, \Sigma p_\alpha \mathbf{w}_\alpha$ в (1.13)

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(t)} + \mathbf{q}^{(j)} + \mathbf{q}^{(s)} \tag{4.15}$$

[1] Член с $\mathrm{div}\,\pi_\alpha$ в тепловом потоке $\mathbf{h}_\alpha$ оказывается в большинстве задач мало существенным и поэтому в дальнейшем не рассматривается.

где

$$\mathbf{q}^{(t)} = \mathbf{h}_e^{(t)} + \mathbf{h}_i^{(t)} + \mathbf{h}_a^{(t)} \tag{4.16}$$

$$\mathbf{q}^{(j)} = -\chi^{\parallel}\mathbf{j}_{\parallel} - \chi^{\perp}\mathbf{j}_{\perp} - \chi^{\wedge}(\mathbf{j}\times\varkappa), \quad \mathbf{q}^{(s)} = -\mu^{\parallel}\mathrm{S}_{\parallel} - \mu^{\perp}\mathrm{S}_{\perp} - \mu^{\wedge}(\mathrm{S}\times\varkappa)$$

при этом

$$\chi^{\parallel} = \left(\frac{5}{2} - \alpha_T\right)\frac{kT_e}{e}, \qquad \chi^{\perp} = \left(\frac{5}{2} - \frac{\alpha_T}{1+(\omega_e\tau_e^*)^2}\right)\frac{kT_e}{e}$$
$$\chi^{\wedge} = -\frac{\omega_e\tau_e^*\alpha_T}{1+(\omega_e\tau_e^*)^2}\frac{kT_e}{e} \tag{4.17}$$

$$\mu^{\parallel} = \left[d_e^s - \frac{5}{2}(1-\alpha)\right]p_e + \frac{d_i^s p_i\xi_i^* + d_a^s p_a\xi_a^*}{\delta}$$
$$\mu^{\perp} = \left[\frac{d_e^s}{1+(\omega_e\tau_e^*)^2} - \frac{5}{2}(1-\alpha)\right]p_e + \frac{d_i^s p_i\xi_i^* + d_a^s p_a(\xi_a^* + \delta^{-1}\omega_i^2\tau_i^{*2})}{(1+\delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^{*2})\delta} \tag{4.18}$$
$$\mu^{\wedge} = \frac{\omega_e\tau_e^*}{1+(\omega_e\tau_e^*)^2}d_e^s p_e + \frac{d_i^s p_i\xi_i^* + d_a^s p_a(\xi_a^* - \delta)}{(1+\delta^{-2}\omega_i^2\tau_i^{*2})\delta}\omega_i\tau_i^*$$

Здесь

$$d_e^s = {}^5/_2\tau_e^* \quad [\zeta_{ea}\tau_{ea}^{-1} + 2\varepsilon(1-\theta)(1-\alpha)\tau_{ei}^{-1}]$$
$$d_i^s = {}^5/_2\tau_i^* \; [{}^1/_4\zeta_{ia}\tau_{ia}^{-1} + 2\varepsilon\theta^{-1}(1-\theta)(1-\alpha)\tau_{ie}^{-1}] \tag{4.19}$$
$$d_a^s = -{}^5/_2\tau_a^* \; [{}^1/_4\zeta_{ia}\tau_{ai}^{-1} + 2\varepsilon\theta^{-1}(1-\theta)\alpha\tau_{ae}^{-1}]$$

а δ, ξ_i^* и ξ_a^* определены выражениями (4.2), (4.8).

В заключение заметим, что при выполнении условия

$$(T_e / T)^{1/2} \ll (m / m_e)^{1/2}$$

для $\mathbf{j}$ и S можно воспользоваться соотношениями, приведенными в [5], если определить τ_{ee}^{-1}, τ_{ei}^{-1}, τ_{ea}^{-1} и $p_e = n_e kT_e$ при температуре T_e, а также заменить ∇T на ∇T_e.

Поступила 10 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Уравнения переноса для неизотермической многосортной плазмы. ПМТФ, 1963, № 5.
2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
3. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. В сб. Вопросы теории плазмы. Госатомиздат, 1963, вып. 1, Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 33, вып. 2.
4. Herdan R., Liley B. Dynamical equations and transport relationships for a thermal plasma. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, p. 731.
5. Жданов В. М. Явления переноса в частично ионизованном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.
6. Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. ИЛ, 1957.
7. Браун С. Элементарные процессы в плазме газового разряда. Госатомиздат, 1961.
8. Месси Г., Бархоп Е. Электронные и ионные столкновения. ИЛ, 1958.
9. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. ИЛ, 1961.
10. O'Malley T. Extrapolation of electro-rare gas atom cross sections to zero energy. Phys. Rev., 1963, vol. 130, p. 1020.
11. Mason E., Shamp H. Mobility of gaseous ions in weak electric fields. Ann. Phys., 1958, vol. 4, No. 3.
12. Dalgagno A. Charged particles in the upper atmosphere. Ann. geophys., 1961, vol. 17, p. 16. (Русск. пер. УФН, 1963, т. 79, № 1).