Теплофизика и аэромеханика, 2008, том 15, № 2

УДК 669.86:536.21

Устойчивость стационарной тепловой конвекции в наклоняемой прямоугольной полости в маломодовом приближении*

Р.В. Сагитов, А.Н. Шарифулин

Пермский государственный технический университет

Модельная система обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 2], описывающая поведение неравномерно нагретой жидкости в наклоняемой полости, используется для исследованания устойчивости стационарных режимов тепловой конвекции при произвольных (не малых) наклонах прямоугольной полости. Получена бифуркационная кривая, разделяющая область параметров (число Рэлея — наклон полости) на две — внутреннюю и внешнюю. Во внешней области система имеет одно устойчивое стационарное решение, а во внутренней — три стационарных решения. Одно из них всегда неустойчиво монотонным образом, а два других могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Построены нейтральные кривые, определяющие границы возникновения колебательной и монотонной неустойчивостей.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальное и теоретическое изучение бифуркаций стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости актуально для предсказания смен режимов как в технологических процессах, так и для предсказания природных катастроф, связанных со сменой режимов атмосферных или океанических течений.

Со времен работы Рэлея по конвекции в горизонтальном слое сложился подход, заключающийся в рассмотрении устойчивости тепловой конвекции в полостях простой геометрической формы: горизонтальных и вертикальных плоских слоях и бесконечных цилиндрах для условий подогрева, при возможных состояниях механического равновесия [6]. Нарушение условий механического равновесия путем наклона полости с жидкостью приводит к качественному изменению бифуркационной картины.

Теоретическое изучение влияния наклона полости на бифуркации стационарных режимов начато в работах [3, 2], в них рассматривалось влияние отклонения от равновесного направления подогрева на бифуркации одноячеистого течения в задаче о конвекции в бесконечном горизонтальном цилиндре круглого сечения. Бифуркации в наклоняемом бесконечном горизонтальном цилиндре квадратного сечения рассматривались путем численного моделирования в [5].

В настоящей теоретической работе, посвященной созданию простой модели, схватывающей существенные черты сложного бифуркационного поведения жидкости в горизонтальном наклоняемом параллелепипеде, течение жидкости полагали

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 07-01-96070).

двумерным, а трением жидкости о стенки полости пренебрегли. Для случая конвекции в горизонтальном слое, подобная модель была предложена в работе [3]. Отметим, что, хотя и уравнения рассматриваемой ниже модели в предельном случае отсутствия наклона совпадают с моделью Лоренца, при этом они описывают качественно иную физическую ситуацию: одноячеистую конвекцию в замкнутом параллелепипеде, а не многоячеистую в бесконечном горизонтальном слое.

В маломодовом приближении получены аналитические выражения для стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости для произвольных направлений подогрева и исследована их устойчивость по отношению к малым возмущениям.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет полость, имеющую форму горизонтального прямоугольного параллелепипеда. Введем декартову систему координат (x, y, z) так, что ось y будет направлена горизонтально и параллельно оси наклона, а две другие лежат на перпендикулярных гранях. Поперечный разрез параллелепипеда представлен на рис. 1. Грани, параллельные оси z, теплоизолированы, а перпендикулярные — идеально теплопроводны и поддерживаются при постоянных и различающихся на величину Θ температурах. Будем пренебрегать трением жидкости о границы полости. Движение жидкости будем считать двумерным, осуществляющимся перпендикулярно оси y, зависимостью скорости и температуры от координаты y пренебрежем.

Для описания такого движения жидкости будем использовать безразмерные уравнения тепловой конвекции в приближении Буссинеска в форме Гельмгольца [2]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Delta\varphi + G\left(\frac{\partial T}{\partial z}\sin\alpha + \frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha\right), \quad (1)$$

$$\Delta\psi + \varphi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta T\ , \quad (3)$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{rot}\vec{\psi} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z},\ 0,\ \frac{\partial \psi}{\partial x}\right), \quad (4)$$

где введены, соответственно, для расстояния, функции тока, скорости, времени и температуры следующие единицы измерения: H, ν, ν/H, H^2/ν и Θ.

На всех границах задано условие непротекания

$$\psi = 0 \text{ (при } x = 0,\ B \text{ и } z = 0,\ 1). \quad (5)$$

На них будут выполняться и условия отсутствия напряжений

$$\varphi = 0 \text{ (при } x = 0,\ B \text{ или } z = 0,\ 1). \quad (6)$$

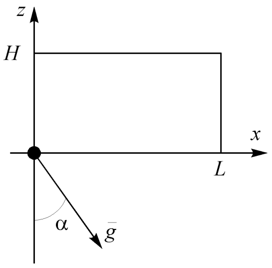


Рис. 1. Геометрия задачи.

Граничное условие для температуры имеет вид

$$T = 1, \;\; T = 0 \text{ при } z = 0, \;\; z = 1. \tag{7}$$

На других стенках задано условие теплоизоляции

$$\partial T / \partial x = 0 \;\; \text{при } x = 0 \text{ и } x = B. \tag{8}$$

В систему уравнений (1)–(8) входят четыре безразмерных параметра:

– число Грасгофа $G = \beta g \Theta H^3 / \nu^2$,

– число Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu / \chi$,

– угол наклона полости α,

– геометрический параметр $B = L/H$.

В отсутствии движения жидкости в полости устанавливается равновесное распределение температуры

$$T_0 = 1 - z. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение переменную ϑ, учитывающую отклонение температуры в полости от равновесного распределения:

$$\vartheta = T - T_0. \tag{10}$$

Тогда

$$T = T_0 + \vartheta. \tag{11}$$

Система уравнений (1)–(4) перепишется в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Delta \varphi + G\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\sin\alpha - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\cos\alpha - \sin\alpha\right), \tag{12}$$

$$\Delta \psi + \psi = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta \vartheta, \tag{14}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{rot}\vec{\psi} = \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z}, 0, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right). \tag{15}$$

Граничное условие для отклонения температуры от равновесного значения имеет вид:

$$\vartheta = 0 \text{ при } z = 0, z = 1, \tag{16}$$

$$\partial \vartheta / \partial x = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = B. \tag{17}$$

Уравнения (12)–(14) с граничными условиями (5), (6), (16) и (17) образуют замкнутую краевую задачу для определения функции тока ψ, завихренности φ и отклонения температуры ϑ от равновесного распределения T_0.

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Для получения амплитудных уравнений представим, следуя Лоренцу, функцию тока и температуру в виде:

$$\psi = \psi(t)\sin\frac{\pi x}{B}\sin\pi z, \tag{18}$$

$$\vartheta = \theta_1(t)\cos\frac{\pi x}{B}\sin\pi z - \theta_2(t)\sin 2\pi z. \tag{19}$$

Амплитудное уравнение для ψ, в рамках метода Галеркина, можно получить различными способами. Процедура его получения сводится к проецированию уравнения (12) на какое-либо направление в пространстве независимых базисных функций. Выберем направление для проекции в виде функции, зависящей от двух параметров:

$$\begin{gathered} f(x,y,X,Y) = \frac{60\pi^2}{B}\left(\sin\frac{\pi x}{B}\sin\pi z + \frac{X}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{B} - \sin\pi z\right) + \right. \\ \left. + \frac{Y}{5B^2}\left(5x^2\left(1-\frac{x}{B}\right)^2 - B^2 z(1-z)\right)\right). \end{gathered} \tag{20}$$

Получаем систему уравнений, предложенную без вывода впервые в [2]:

$$\begin{cases} \dot\psi = -\psi + Ra(\sin\alpha + \vartheta_1\cos\alpha - \vartheta_2\sin\alpha), \\ \Pr\dot\theta_1 = \psi - \theta_1 - \psi\theta_2, \\ \Pr\theta_2 = -b\theta_2 + \psi\theta_1, \end{cases} \tag{21}$$

где $Ra = GP\dfrac{B^4}{\pi^4(1+B^2)^3}$, $b = \dfrac{4B^2}{1+B^2}$.

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Стационарные состояния — это состояния, не меняющиеся со временем. Чтобы найти их, нужно производные динамических переменных приравнять к нулю. Система (21) имеет стационарные решения, функция тока которых определяется уравнением

$$\Psi^3 + b(1 - \mathrm{Ra}\cos\alpha)\Psi - \mathrm{Ra}b\sin\alpha = 0. \tag{22}$$

Температурные компоненты этих решений связаны с функцией тока соотношениями

$$\theta_1 = b\Psi/(b+\Psi^2),\ \ \theta_2 = \Psi^2/(b+\Psi^2). \tag{23}$$

Применим для анализа этих стационарных решений теорию особенностей дифференцируемых отображений [2, 3]. Поверхность в пространстве (Ra, α, ψ), которая описывается уравнением, для $\Pr = 10$, $b = 8/3$ показана на рис. 2.

Проекция поверхности стационарных состояний на плоскость параметров (Ra, α) представлена на рис. 3. При проектировании возникают особенности типа складки и сборки Уитни. На плоскости параметров выделяется

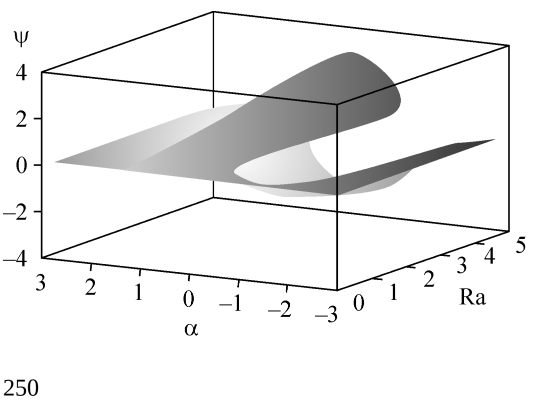
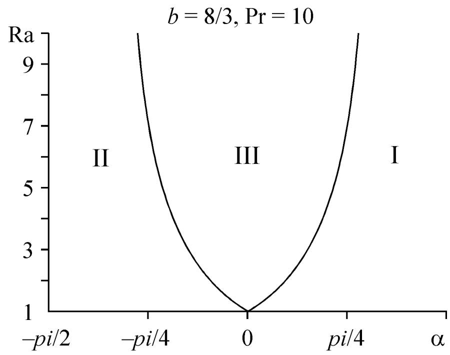


Рис. 2. Поверхность стационарных решений (Ra, α, ψ).

Рис. 3. Бифуркационная кривая на плоскости параметров (Ra, α).



кривая с точкой возврата при Ra = 1 и α = 0. Эта кривая, помеченная цифрой II, делит область параметров на две части — I и III.

Для значений Ra, α, расположенных в части I, система (21) имеет одно стационарное решение. В области III система для любых заданных параметров Ra, α имеет три стационарных решения. На кривой II система имеет два стационарных решения. При подходе к кривой II из области III два решения (из трех) сливаются. В этом месте отображение имеет особенность — складку Уитни. При подходе к острию кривой II сливаются все три решения. В этом месте отображение имеет особенность типа сборку Уитни.

Таким образом, при переходе из области III в область I два решения системы сливаются и исчезают, т. е. на кривой II происходят бифуркации стационарных решений системы (21).

Вблизи точки Ra = 1 и α = 0, как показано в [2], бифуркационная кривая представляет собой полукубическую параболу.

Приведем аналитические выражения для Ψ, полученные в настоящей работе. В области I

$$\Psi_0 = \frac{1}{6}\sqrt[3]{d} - \frac{2A}{\sqrt[3]{d}}, \tag{24}$$

где $A = b\,(1 - Ra\cos\alpha$, $d = 108\mathrm{Ra}B\sin\alpha + 12\sqrt{12\mathrm{A}^3 + 8(\mathrm{Ra}b\sin\alpha)^2}$. В области III

$$\Psi_0 = \frac{1}{3}\sqrt{12|\mathrm{A}|}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\beta + 2\pi\,(n-1)\right)\right), \tag{25}$$

где $\beta = \arccos\left(\dfrac{108\mathrm{Ra}b\sin\alpha}{\sqrt{\left(12|\mathrm{A}|\right)^3}}\right)$, а n принимает значения 1, 0, –1 для верхнего, среднего, нижнего листа соответственно.

При $\alpha = 0$ из (24) получим $\Psi_0 = 0$, а (25) приобретает вид $\Psi_0 = n\sqrt{\mathrm{b}(1-\mathrm{Ra})}$ [1, 2].

Уравнения для инкрементов и частот малых возмущений

Пусть $(\Psi_0, \theta_{10}, \theta_{20})$ — стационарное состояние, которое будем исследовать на устойчивость. Представим решение системы (21) в виде:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0 + \tilde{\Psi}, \\ \theta_1 &= \theta_{10} + \tilde{\theta}_1, \\ \theta_2 &= \theta_{20} + \tilde{\theta}_2, \end{aligned} \tag{26}$$

где добавки, отмеченные тильдой, считаются малыми. Пренебрегая квадратами и произведениями малых добавок, получаем:

$$\dot{\tilde{\Psi}} = -\tilde{\Psi} + Ra\left(\tilde{\theta}_1 \cos\alpha - \tilde{\theta}_2 \sin\alpha\right),$$
$$\Pr\dot{\tilde{\theta}}_1 = -\tilde{\theta}_1 + \tilde{\Psi} - \theta_{20}\tilde{\Psi} - \Psi_0\tilde{\theta}_2, \qquad (27)$$
$$\Pr\dot{\tilde{\theta}}_2 = -b\tilde{\theta}_2 + \theta_{10}\tilde{\Psi} + \Psi_0\tilde{\theta}_1.$$

Как принято в линейных задачах на устойчивость, предполагаем экспоненциальную зависимость возмущений от времени, $\Psi, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2 \sim \exp(\lambda t)$. В результате получаем задачу на собственные числа матрицы 3×3:

$$\lambda\dot{\tilde{\Psi}} = -\tilde{\Psi} + \mathrm{Ra}(\tilde{\theta}_1 \cos\alpha - \tilde{\theta}_2 \sin\alpha),$$
$$\lambda\dot{\tilde{\theta}}_1 = (-\tilde{\theta}_1 + \tilde{\Psi} - \theta_{20}\tilde{\Psi} - \Psi_0\tilde{\theta}_2)/\Pr, \qquad (28)$$
$$\lambda\dot{\tilde{\theta}}_2 = (-b\tilde{\theta}_2 + \theta_{10}\tilde{\Psi} + \Psi_0\tilde{\theta}_1)/\Pr,$$

или

$$\lambda\begin{pmatrix}\Psi \\ \theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & \mathrm{Ra}\cos\alpha & -\mathrm{Ra}\sin\alpha \\ (1\text{-}\theta_{20})/\Pr & -1/\Pr & -\Psi_0/\Pr \\ \theta_{10}/\Pr & \Psi_0/\Pr & \text{-b}/\Pr\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi \\ \theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Условием существования нетривиального решения является равенство нулю детерминанта

$$\begin{vmatrix}\lambda+1 & -\mathrm{Ra}\cos\alpha & \mathrm{Ra}\sin\alpha \\ (\theta_{20}-1)/\Pr & \lambda+1/\Pr & \Psi_0/\Pr \\ -\theta_{10}/\Pr & -\Psi_0/\Pr & \lambda+\mathrm{b}/\Pr\end{vmatrix} = 0 \qquad (30)$$

или

$$\lambda^3 + ((\mathrm{b}+1)/\Pr+1)\lambda^2 + ((\Psi_0^2+\mathrm{b})/\Pr^2 + ((\theta_{10}\sin\alpha + (-1+\theta_{20})\cos\alpha)\,\mathrm{Ra}+\mathrm{b}+1)/\Pr)\lambda +$$
$$+(((-\theta_{20}\Psi_0^2+\Psi_0^2+\theta_{10})\sin\alpha + (\theta_{10}\ \Psi_0\text{-b}+\theta_{20}\mathrm{b})\cos\alpha)\mathrm{Ra}+\Psi_0^2+\mathrm{b})/\Pr^2 = 0. \qquad (31)$$

Используя уравнение (22) и соотношения (23), перепишем (31):

$$\lambda^3 + \left(\frac{(1+\mathrm{b})}{\Pr}+1\right)\lambda^2 + \left(\frac{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}{\Pr^2} + \frac{-\dfrac{\mathrm{b}\ \mathrm{Ra}(\Psi_0^2+1)\cos\alpha}{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)} + \Psi_0^2+1+\mathrm{b}}{\Pr}\right)\lambda +$$
$$+\frac{3\Psi_0^2 - \mathrm{b}\ \mathrm{Ra}\ \cos\alpha + \mathrm{b}}{\Pr^2} = 0. \qquad (32)$$

Представим λ в виде

$$\lambda = \lambda_r + i\omega, \tag{33}$$

где λ_r и ω — действительные числа и имеют смысл инкремента и частоты возмущений соответственно. Уравнение (32), после подстановки в него (33), разобьем на действительную и мнимую части и, приравняв их по отдельности к нулю, получим:

$$\lambda_r^3 + \left(\frac{(1+\mathrm{b})}{\mathrm{Pr}}+1\right)\lambda_r^2 + \left(\frac{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}{\mathrm{Pr}^2} + \frac{-\dfrac{\mathrm{b\,Ra}(\Psi_0^2+1)\cos\alpha}{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}+\Psi_0^2+1+\mathrm{b}}{\mathrm{Pr}} - 3\omega^2\right)\lambda_r +$$
$$+\frac{3\Psi_0^2 - \mathrm{b\,Ra}\cos\alpha+\mathrm{b}}{\mathrm{Pr}^2} - \left(\frac{(1+\mathrm{b})}{\mathrm{Pr}}+1\right)\omega^2 = 0, \tag{34}$$

$$-\omega^3 + \left(\frac{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}{\mathrm{Pr}^2} + \frac{-\dfrac{\mathrm{b\,Ra}(\Psi_0^2+1)\cos\alpha}{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}+\Psi_0^2+1+\mathrm{b}}{\mathrm{Pr}} + 3\lambda_r^2 + 2\left(\frac{(1+\mathrm{b})}{\mathrm{Pr}}+1\right)\lambda_r\right)\omega = 0. \tag{35}$$

Уравнение (35) однородно относительно частоты, из него вытекают два выражения для частоты. Первое заключается просто в равенстве частоты нулю

$$\omega = 0, \tag{36}$$

второе соответствует колебательным возмущениям и имеет вид

$$\omega^2 = \frac{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}{\mathrm{Pr}^2} + \frac{-\dfrac{\mathrm{b\,Ra}(\Psi_0^2+1)\cos\alpha}{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}+\Psi_0^2+1+\mathrm{b}}{\mathrm{Pr}} + 3\lambda_r^2 + 2\left(\frac{(1+\mathrm{b})}{\mathrm{Pr}}+1\right)\lambda_r. \tag{37}$$

Для каждого стационарного состояния Ψ_0 уравнение (32) для комплексного декремента λ имеет три решения. Предположим, что среди этих трех решений есть колебательное $\lambda = \lambda_r + i\omega$, тогда из того, что частота ω входит в уравнение (34) во второй степени, следует, что среди решений уравнения (32) есть и решение с $\lambda = \lambda_r + i\omega$. Третье решение может быть только действительным. В случае, когда колебательных возмущений нет, все три решения уравнения (32) действительны.

АНАЛИЗ СПЕКТРОВ ВОЗМУЩЕНИЙ

Перепишем уравнение (34) в виде

$$\lambda^3 + F\lambda^2 + G\lambda + H = 0, \tag{38}$$

где

$$F = \frac{(1+\mathrm{b})}{\mathrm{Pr}}+1,\ \mathrm{G} = \frac{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}{\mathrm{Pr}^2} + \frac{-\dfrac{\mathrm{b\,Ra}(\Psi_0^2+1)\cos\alpha}{(\mathrm{b}+\Psi_0^2)}+\Psi_0^2+1+\mathrm{b}}{\mathrm{Pr}},$$

$$H=\frac{3\Psi_0^2-\text{b Ra}\cos\alpha+\text{b}}{\text{Pr}^2}.$$

Тогда выражение для инкремента, в случае отсутствия колебательных возмущений (т. е. когда квадрат частоты в выражении (37) отрицательный), может быть записано в следующем виде:

$$\lambda_r=\text{Re}\left(D\exp\left(\frac{2\pi}{3}(n-1)i\right)\right)-\frac{1}{3}F, \tag{39}$$

где введено обозначение

$$D=\sqrt[3]{108\left(\frac{1}{3}GF-H-\frac{2}{27}F^3\right)+12\sqrt{12\left(G-\frac{1}{3}F^2\right)^3+81\left(\frac{1}{3}GF-H-\frac{2}{27}F^3\right)^2}},$$

а n принимает значения 1, 0, –1.

При наличии колебательных возмущений выражение для инкремента монотонных возмущений будет иметь вид

$$\lambda_r=\frac{1}{6}D-2\frac{G-\frac{1}{3}F^2}{D}-\frac{1}{3}F, \tag{40}$$

а инкремент колебательных возмущений —

$$\lambda_r=\frac{1}{6}C-2\frac{J-\frac{1}{3}F^2}{C}-\frac{1}{3}F, \tag{41}$$

где $C=\sqrt[3]{108\left(\frac{1}{3}JF-I-\frac{2}{27}F^3\right)+12\sqrt{12\left(J-\frac{1}{3}F^2\right)^3+81\left(\frac{1}{3}JF-I-\frac{2}{27}F^3\right)^2}}$, при этом $J=\frac{1}{4}\left(F^2+G\right)$, $I=\frac{1}{8}\left(FG-H\right)$.

Положив в уравнениях (34) и (37) $\omega = 0$ и используя явные выражения для решения Ψ_0 (24), (25) и λ_r (41), получаем на плоскости (Ra, α) линию, на которой частота колебательных возмущений обращается в ноль (рис. 4, 5). Следуя Лоренцу [3], полагаем $b = 8/3$ и Pr = 10.

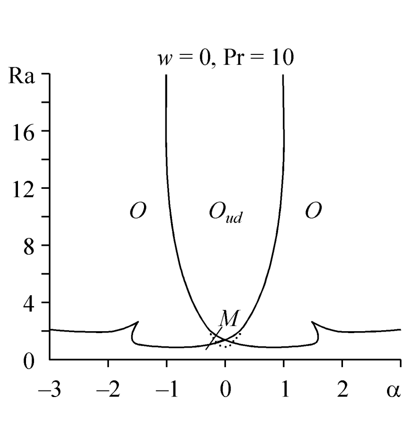


Рис. 4. Линия на плоскости параметров, на которой выполняется условие $\omega = 0$ для колебательных возмущений. Pr = 10, b = 8/3.

Прерывистая линия — это бифуркационная кривая. Вместе с нейтральными кривыми она делит область параметров на шесть частей:

– в части M существуют три отрицательных инкремента монотонных возмущений единственного стационарного состояния;

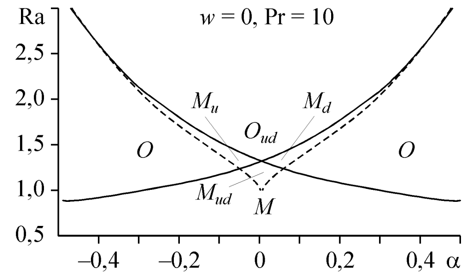


Рис. 5. Фрагмент рисунка 4.

– в O — по одному отрицательному инкременту монотонных и колебательных возмущений единственного стационарного состояния;

– в M_{ud} — по три инкремента монотонных возмущений каждого из трех стационарных состояний;

– в M_u существуют по три инкремента монотонных возмущений для верхнего и среднего листов, для нижнего листа — по одному отрицательному инкременту монотонных и колебательных возмущений;

– в области M_d существуют по три инкремента монотонных возмущений для среднего и нижнего листов, для верхнего листа — по одному отрицательному инкременту монотонных и колебательных возмущений;

– в области O_{ud} существуют три инкремента монотонных возмущений среднего листа, для верхнего и нижнего листов — по одному отрицательному инкременту монотонных и колебательных возмущений.

Отметим, что для среднего листа один из инкрементов всегда положителен или, другими словами, средний лист монотонным образом неустойчив.

Положив в уравнениях (34), (35) $\lambda_r = 0$ и используя явные выражения для решения Ψ_0 (24), (25) и λ_r (41), получаем на плоскости (Ra, α) нейтральные кривые (рис. 6).

Нейтральные кривые делят область параметров на пять частей:

– в части S все три инкремента монотонных возмущений единственного стационарного состояния отрицательны;

– в S_{ud} инкременты возмущений верхнего и нижнего листов отрицательны;

– в части U_{ud} (и в U_d) один из инкрементов возмущений верхнего листа (нижнего) положителен, а инкременты возмущений нижнего листа (верхнего) отрицательны;

– в U инкременты колебательных возмущений верхнего и нижнего листов положительны, а инкременты монотонных — отрицательны.

Линия возникновения колебательных возмущений, представленная на рис. 4, имеет точки возврата в районе значения угла наклона, соответствующего подогреву сбоку.

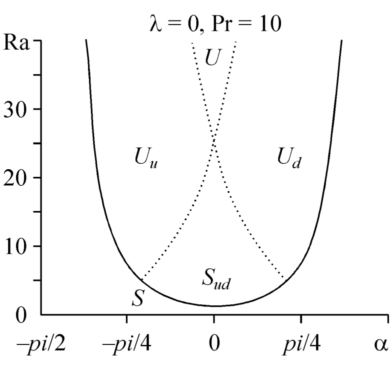


Рис. 6. Нейтральные кривые на плоскости параметров. Сплошная линия — монотонные возмущения, пунктирные — колебательные возмущения, соответствующие верхнему (нижнему) листу поверхности стационарных состояний. Pr = 10, b = 8/3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе аналитически исследована монотонная и колебательная устойчивость обобщенной модели Лоренца [1], моделирующей тепловую конвекцию в замкнутой полости при произвольных наклонах.

Определена граница возникновения колебательных возмущений на плоскости параметров (Ra, α). Она качественно согласуется с известными результатами для подогрева сверху и снизу и имеет точки возврата при углах наклона $\alpha \approx \pm \pi/2$, соответствующих горизонтальной полости, подогреваемой сбоку.

Построены нейтральные кривые устойчивости для монотонных и колебательных возмущений. Решение вне бифуркационной кривой устойчиво по отношению как к монотонным, так и к колебательным возмущениям. Внутренний лист поверхности стационарных состояний неустойчив по отношению к монотонным возмущениям. Колебательных возмущений для него не существует. Верхний и нижний листы при достаточно малых Ra устойчивы относительно колебательных возмущений, а при увеличении Ra устойчивость теряют. На границе с внутренним листом они имеют узкие области, в которых не существует колебательных возмущений. В этих областях верхний и нижний листы при достаточно малых Ra устойчивы относительно монотонных возмущений, а при больших Ra они теряют устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Nikitin A., Sharifulin A.** Concerning the bifurcations of steady-state thermal convection regimes in a closed cavity due to the Whitney folding-type singularity // Heat Transfer-Sov. Res. — 1989. — Vol. 21, No. 2. — 213 p.
2. **Никитин А.И., Шарифулин А.Н.** О бифуркациях стационарных режимов тепловой конвекции в замкнутой полости порождаемых особенностью типа сборки Уитни // Процессы тепло- и массопереноса вязкой жидкости. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. — С. 32–39.
3. **Lorenz E.** Deterministic nonperiodic flow // J. of Atmospheric Sci. — 1963. — No. 20. — 130 p.
4. **Чернатынский В.И., Шлиомис М.И.** Конвекция вблизи критических чисел Рэлея при почти вертикальном градиенте температуры // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. — 1973. — № I. — С. 64–70.
5. **Mizushima J., Hara Y.** Routes to unicellular convection in a titled rectangular cavity // J. Physical Society of Japan. — 2000. — Vol. 69, No. 8. — P. 2371–2374.
6. **Гершуни Г.З, Жуховицкий Е.М.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1972. — 392 с.

Статья поступила в редакцию 14 мая 2007 г.