ПМТФ, № 5, 1974

УДК 532.546

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ НЕФТЕНОСНОГО ПЛАСТА ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРЕТОКОВ ЧЕРЕЗ СЛАБОПРОНИЦАЕМЫЙ ПЛАСТ И ИНФИЛЬТРАЦИИ

И. Б. Басович

(*Москва*)

В работе рассматривается обратная задача для параболического уравнения, описывающего радиальную фильтрацию при наличии перетоков через слабопроницаемый пласт и инфильтрации. Рассматривается система переопределенных граничных условий, однозначно определяющих неизвестные функции, входящие в уравнение фильтрации.

В [1] рассматривалась обратная задача теории фильтрации для простейшей модели течения в напорном пласте.

Неизвестный коэффициент проницаемости определялся по заданным давлению и расходу центральной скважины. Решение получено методами, развитыми в [2-4].

В данной статье обратная задача решается для более сложной модели фильтрации, учитывающей перетоки через слабопроницаемый слой и инфильтрацию.

Рассмотрим круговой пласт радиуса R и центральную скважину радиуса r_0. Фильтрационные параметры пласта будем считать радиально-симметричными. При наличии перетоков через подстилающий слой уравнение для давления имеет вид (коэффициент упругоемкости для простоты принят равным единице) [5]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r)\frac{\partial p}{\partial r}\right] - h(r)\,p \tag{1}$$

Здесь $k(r)$ — коэффициент проницаемости основного пласта, функция $h(r)$ обратно пропорциональна мощности подстилающего слабопроницаемого слоя.

Обратная задача для уравнения (1) состоит в определении неизвестных $k(r)$ и $h(r)$ по некоторой информации о решении $p(r, t)$.

Рассмотрим переопределенную систему граничных условий (расход $q(t)$ и давление $\varphi(t)$ в скважине будем считать заданными функциями времени)

$$2\pi r_0 k(r_0)\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0} = q(t), \quad p_{r=R} = 0, \quad p_{t=0} = 0 \tag{2}$$

$$p_{r=r_0} = \varphi(t) \tag{3}$$

В [1] было показано, что при $h(r) \equiv 0$ коэффициент $k(r)$ однозначно восстанавливается по функциям $\varphi(t)$ и $q(t)$. Покажем, что в данном случае условий (2), (3) недостаточно для однозначного определения функций $k(r)$, $h(r)$. Решим уравнения (1), (2). Решение будем искать в виде ряда по собственным функциям оператора

$$Lp = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r)\frac{\partial p}{\partial r}\right] + h(r)\,p = \lambda p \tag{4}$$

$$p'(r_0) = 0, \quad p(R) = 0$$

Так же, как в [1] после преобразования Лапласа по времени, получим

$$P(r,s) = -Q(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k(r_0)}{\lambda_k+s}p_k(r) \tag{5}$$

$$P(r,s)=\int_0^{\infty}p(r,t)e^{-st}dt, \quad Q(s)=\int_0^{\infty}q(t)e^{-st}dt$$

Здесь $p_k(r)$, λ_k — нормированные собственные функции и собственные числа оператора (4).

Будем считать, что функции $k(r)$, $h(r)$ удовлетворяют условиям

$$k(r)\in C^2[r_0,R],\ k(r)>0$$
$$h(r)\in C[r_0,R],\ h(r)>M>-\infty$$

Тогда оператор (4) имеет конечное число отрицательных собственных чисел, и в силу теоремы Мерсера ряд (5) сходится равномерно на $[r_0, R]$.

Полагая в (5) $r=r_0$, получим ($\alpha_k = p_k^{-2}(r_0)$ — нормировочные множители оператора (4))

$$\Phi(s) = -Q(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k+s} = -Q(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda_k+s)}$$

$$\Phi(s)=\int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-st}dt$$

Из последнего равенства следует:

$$-\frac{\Phi(s)}{Q(s)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda_k+s)} \tag{6}$$

Из (6) можно определить спектральные параметры оператора (4). Собственные числа λ_k суть полюса выражения $\Phi(-\lambda)/Q(-\lambda)$, а нормировочные множители определяются через соответствующие вычеты

$$\alpha_k^{-1} = \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_k}[\Phi(-\lambda)/Q(-\lambda)]$$

Сделаем замену переменных в уравнении (4) [6]

$$x=\frac{\pi}{B}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{k(r)}}, \quad r\sqrt{k(r)}=\theta(x) \tag{7}$$

$$z(x)=p\sqrt{\theta}, \quad B=\int_{r_0}^{R}\frac{dr}{\sqrt{k(r)}}$$

После замены получим

$$-z''+f(x)z=\mu z \tag{8}$$

$$z'(0)-\frac{\theta'(0)}{2\theta(0)}z(0)=0, \quad z(\pi)=0$$

$$f(x)=l(x)+\frac{B^2}{\pi^2}h(x), \quad l(x)=\frac{(\sqrt{\theta(x)})''}{\sqrt{\theta(x)}} \tag{9}$$

$$\mu=\frac{B^2}{\pi^2}\lambda$$

Оператор (8) будем называть соответствующим оператору (4) и уравнению (1) при условиях (2), (3).

Собственные числа μ_k и нормировочные множители β_k оператора (8) равны

$$\mu_k = \frac{B^2}{\pi^2}\lambda_k, \quad \beta_k = \frac{\pi}{B\theta(0)}\alpha_k$$

Постоянные B и $\theta(0)$ определяются из асимптотических формул для μ_k и β_k

$$\sqrt{\mu_k} = k + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \beta_k = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$B = \pi \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad \theta(0) = \frac{2}{B}\lim_{k\to\infty}\alpha_k$$

Таким образом, переопределенная система граничных условий (2), (3) полностью определяет спектральную функцию соответствующего оператора (8), по которой оператор восстанавливается единственным образом [2]. Функция $f(x)$ и постоянная $\theta'(0)$ так же, как и в работе [1], определяются из решения обратной задачи Штурма — Лиувилля для оператора (8) со спектральной функцией [2]

$$\sigma(\mu) = \sum_{\mu\leqslant\mu_k} \beta_k^{-1}$$

Рассмотрим случай, когда одна из функций $k(r)$ или $h(r)$ известна на $[r_0, R]$.

Если известна $h(r)$, для функции $y = r^2(x)$, учитывая (7), (9), можно получить нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{(\sqrt{y'})''}{\sqrt{y'}} + \frac{B^2}{\pi^2}h(\sqrt{y}) = f(x)$$

$$y(0) = r_0^2, \quad y'(0) = \frac{2B}{\pi}\theta(0), \quad y''(0) = \frac{2B}{\pi}\theta'(0)$$

Функция $k(r)$ определяется в параметрическом виде

(10) $$r(x) = \sqrt{y(x)}, \quad k(x) = \frac{\pi^2}{4B^2}\frac{y'^2(x)}{y(x)}$$

Если известна функция $k(r)$, то известны, следовательно, функции $r(x)$, $\theta(x)$, $l(x)$. Тогда, переходя от переменной x к r, найдем функцию $h(r)$.

(11) $$h(r) = \frac{\pi^2}{B^2}[f(r) - l(r)], \quad x(r) = \frac{\pi}{B}I(r), \quad I(r) = \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{k(r)}}$$

Если обе функции неизвестны, очевидно, дополнительного условия (3) недостаточно для однозначного определения $k(r)$ и $h(r)$. Естественно, возникает вопрос, какую дополнительную информацию о функциях $k(r)$ и $h(r)$ можно получить, задавая значения решения $p(r, t)$ не в одной точке $r = r_0$, а в нескольких точках r_m, $m = 1, 2, \ldots, N$.

Оказывается, никакое число дополнительных функций $p(r_m, t)$ не позволяет однозначно определить $k(r)$ и $h(r)$.

Прежде чем доказать это, рассмотрим следующую задачу.

Пусть задана переопределенная система (1) — (3), значение функции $k(r_1)$ в точке $r = r_1$ и интеграл $x_1(r_1) = \pi B^{-1}I(r_1)$.

Покажем, что в этом случае можно определить решение прямой задачи $p(r_1, t)$ в точке $r = r_1$ для всех моментов времени.

Действительно, соответствующий оператор (8) определяется условиями (2), (3). Следовательно, известны нормированные собственные функции $z_k(x)$ оператора (8). Но тогда известны значения

$$p_k(r_1) = \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{z_k(x_1)}{r_1^{1/2} k^{1/4}(r_1)} \tag{12}$$

Подставляя (12) в ряд (5), получим

$$P(r_1, s) = -Q(s) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{B}} \frac{p_k(r_0)}{\lambda_k + s} \frac{z_k(x_1)}{r_1^{1/2} k^{1/4}(r_1)}$$

$$p(r_1, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} P(r_1, s) e^{st} ds$$

Если известны значения $k(r_m)$, $I(r_m)$ для N точек $r = r_m$, $m = 1, 2, \ldots, N$, то значения функции $p(r, t)$ определяются для всех точек r_m.

В частности, если функция $k(r)$ известна на отрезке $[r', r'']$, известен интеграл $I(r')$ и заданы функции $\varphi(t)$, $q(t)$, то решение прямой задачи (1), (2) определяется однозначно в полуполосе $\{r' \leqslant r \leqslant r'', t > 0\}$ и не зависит от значений $k(r)$, $h(r)$ вне отрезка $[r', r'']$, которые, вообще говоря, остаются неопределенными.

Из вышесказанного следует, что если для пары функций $\{k(r), h(r)\}$ выполняются (1), (2) и условие

$$p(r_m, t) = \varphi_m(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{13}$$

существует бесконечное множество пар $\{k^*(r), h^*(r)\}$, для которых справедливо (1), (2) и (13). Для этого достаточно выполнение условий.

Соответствующие операторы (8) для пар $\{k(r), h(r)\}$ и $\{k^*(r), h^*(r)\}$ совпадают.

Справедливы соотношения ($m = 0, 1, 2, \ldots, N$)

$$k(r_m) = k^*(r_m), \quad I(r_m) = I^*(r_m) \tag{14}$$

$$I(R) = I^*(R), \quad I^*(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{k^*(r)}}$$

Действительно, всякую функцию $k(r)$, удовлетворяющую (14), можно проварьировать, не нарушая при этом соотношений (14) и сохраняя постоянным значение $dk / dr|_{r=r_0}$. Функцию $\delta h(r)$ для измененного значения $\delta k(r)$ подбираем так, чтобы функция $f(x)$ в операторе (8) осталась прежней. Из вида $f(x)$ следует, что это всегда можно сделать.

Постоянная, входящая в граничное условие, не изменится, так как сохраняются неизменными величины $k(r_0)$, $k'(r_0)$.

Таким образом, по дополнительной информации вида (13) невозможно однозначно определить функции $k(r)$ и $h(r)$. Однако это можно сделать, если измерять расход и давление в скважине при другом режиме эксплуатации. Пусть при $r = r_0$ известно решение уравнения (1) при двух граничных режимах ($p_0(r)$ — некоторая известная функция)

$$2\pi r_0 k(r_0) \left.\frac{\partial p_1}{\partial r}\right|_{r=r_0} = q_1(t), \quad p_1(R) = 0 \tag{15}$$

$$p_1|_{t=0} = 0$$

$$(16)\qquad 2\pi r_0 k(r_0)\frac{\partial p_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = q_2(t),\quad p_2(R)=0$$

$$p_2|_{t=0} = p_0(r)$$

$$(17)\qquad p_{1,2}(r_0,\ t) = \varphi_{1,2}(t)$$

Покажем, что условия (15) — (17) однозначно определяют функции $k(r)$, $h(r)$. Аналогично предыдущему для преобразований Лапласа $\Phi_{1,2}(s)$ получим

$$(18)\qquad \Phi_1(s) = -Q_1(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k+s}$$

$$(19)\qquad \Phi_2(s) = -Q_2(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k+s} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k p_k(r_0)}{\lambda_k+s}$$

$$c_k = \int_{r_0}^{R} r p_k(r)\,p_0(r)\,dr$$

Второе слагаемое в правой части (19) появилось за счет ненулевых начальных данных в режиме (16).

Как было показано, соотношение (18) полностью определяет соответствующий оператор (8). Из (19) получим выражение для c_k

$$c_k = p_k^{-1}(r_0)\,\mathrm{Re}\,s_{\lambda=\lambda_k}G(-\lambda)$$

$$G(s) = Q_1^{-1}(s)\,(Q_2(s)\Phi_1(s) - Q_1(s)\Phi_2(s))$$

Выразим коэффициенты c_k через известные нормированные функции соответствующего оператора

$$c_k = \int_{r_0}^{R} r p_k(r)\,p_0(r)\,dr = \sqrt{\frac{\pi}{B}}\int_0^{\pi} r(x)\,\frac{z_k(x)}{\sqrt{\theta(x)}}\,\frac{dr}{dx}\,p_0(r)\,dx =$$

$$= \sqrt{\frac{B}{\pi}}\int_0^{\pi}\sqrt{\theta(x)}\,p_0(r(x))\,z_k(x)\,dx$$

Тогда известна функция $\gamma(x)$

$$(20)\qquad \gamma(x) = \sqrt{\frac{B}{\pi}}\sqrt{\theta(x)}\,p_0(r(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_k(x)$$

Учитывая, что $\theta(x) = \pi y'(x)\,/\,2B$, из (20) получим уравнение для $y(x) = r^2(x)$

$$(21)\qquad \sqrt{\frac{1}{2}y'}\,p_0(\sqrt{y}) = \gamma(x),\quad y(0) = r_0^2$$

Решив (21), по формулам (10), (11) определим функции $k(r)$ и $h(r)$.

При наличии инфильтрации уравнение для давления принимает вид

$$(22)\qquad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r)\frac{\partial p}{\partial r}\right] - h(r)\,p + \omega(r)$$

В этом случае для однозначного определения трех функций следует задать давление $p_3(r_0,\ t) = \varphi_3(t)$ в каком-либо третьем режиме, например

$$(23)\qquad 2\pi r_0 k(r_0)\frac{\partial p_3}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = q_3(t)$$

$$p_3(R) = 0,\quad p_3|_{t=0} \equiv 0\quad (q_1(t) \not\equiv q_3(t))$$

Тогда имеем

$$\Phi_i(s) = -Q_i(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k+s} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k p_k(r_0)}{s(\lambda_k+s)}, \quad i=1,3 \tag{24}$$

$$\Phi_2(s) = -Q_2(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k+s} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega_k p_k(r_0)}{s(\lambda_k+s)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k p_k(r_0)}{\lambda_k+s} \tag{25}$$

Постоянные c_k, ω_k — коэффициенты Фурье функций $p_0(r)$, $\omega(r)$ соответственно относительно системы $p_k(r)$.

Из (24) получим соотношение для определения спектральных параметров оператора (4)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k+s} = \frac{\Phi_1(s)-\Phi_3(s)}{Q_3(s)-Q_1(s)} \tag{26}$$

Соотношение (26) определяет соответствующий оператор (8). Далее, воспользовавшись последним равенством (24) и (25), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k p_k(r_0)}{\lambda_k+s} = \Phi_2(s) + \Phi_1(s)\frac{Q_2(s)-Q_3(s)}{Q_3(s)-Q_1(s)} + \Phi_3(s)\frac{Q_1(s)-Q_2(s)}{Q_3(s)-Q_1(s)} \tag{27}$$

Из (27) находим c_k и, следовательно, определяем функции $k(r)$ и $h(r)$. Коэффициенты ω_k определяются из (24) или (25). Тогда

$$\omega(r) = \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k p_k(r)$$

Нетрудно указать другие виды граничных условий, однозначно определяющих функции $k(r)$, $h(r)$, $\omega(r)$. Например, в условии (23) можно положить $p_3|_{t=0} = \alpha p_0(r)$, где α — некоторая постоянная.

В заключение автор благодарит П. Я. Кочину за постоянное внимание к работе.

Поступила 15 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Басович И. Б.* Определение переменной проницаемости пласта в случае радиальной симметрии по опытным откачкам из центральной скважины. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
2. *Левитан Б. М., Гасымов М. Г.* Определение дифференциального уравнения по двум спектрам. Усп. матем. н., 1964, т. 19, вып. 2.
3. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г.* Теорема единственности некоторых нелинейных обратных задач уравнений параболического типа. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 3.
4. *Романов В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во Новосибирск. ун-та, 1973.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.
6. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1970.