

При $B = 100$ и $\omega < \omega_* = 26,47$ существует только симметричный режим с равными расходами $\omega_1 = \omega_2 = \omega/2$.

При $\omega = \omega_*$ происходит спонтанное нарушение симметрии течения в мягком режиме. Далее по мере увеличения полного расхода в одной из трубок расход растет, а в другой — падает. При $\omega = \omega_{**} = 149,8$ симметричный режим течения становится устойчивым, и возникают еще два неустойчивых несимметричных режима. При дальнейшем увеличении полного расхода устойчивые и неустойчивые несимметричные режимы сближаются и при $\omega = \omega_{***} = 617,6$ сливаются и исчезают. Поэтому если уменьшать полный расход, то при $\omega = \omega_{**}$ нарушение симметрии произойдет в жестком режиме.

При уменьшении коэффициента теплоотдачи B разности $(\omega_{**} - \omega_*)$ и $(\omega_{***} - \omega_{**})$ уменьшаются. При $B < B_* = 58,82$ для любых значений полного расхода возможен только симметричный режим течения, критические явления вырождаются.

На фиг. 2 представлено разбиение плоскости параметров B, ω на области с различными стационарными режимами. В области 1 существует только симметричный устойчивый режим течения, в области 2 — неустойчивый симметричный режим и два устойчивых несимметричных режима, в области 3 — устойчивый симметричный режим и четыре несимметричных режима, два из которых устойчивые и два неустойчивые. Кривая KLN отвечает границе устойчивости симметричного режима, а кривая LM — слиянию несимметричных режимов и их исчезновению. Штриховая линия отвечает приближенному условию нарушения симметрии ($\kappa_* = 4e$) согласно (2.2), (2.3).

Интересно, что область неустойчивости симметричного режима NLK совпадает с областью бистабильности, полученной в [2].

Учитывая результаты, полученные для рассмотренного течения, можно предположить, что при фильтрации сильновязкой жидкости в режиме с фиксацией полного расхода тепловая неустойчивость может приводить к разбиению потока на струи. В случае фиксации напора возможно распространение тепловой волны поперек фильтрационного потока.

Авторы благодарны А. Г. Мержанову за интерес к работе.

Поступила 17 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худиев С. И. О гидродинамическом тепловом взрыве. — ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
2. Мержанов А. Г., Столин А. М. Гидродинамические аналоги явлений воспламенения и потухания. — ПМТФ, 1974, № 1.
3. Волков А. Ф., Коган Ш. М. Физические явления в полупроводниках с отрицательной дифференциальной проводимостью. — УФН, 1968, т. 96, № 4.
4. Грачев В. В., Руманов Э. Н. Режимы подавления теплового пробоя. — ДАН СССР, 1982, т. 263, № 3.
5. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.

УДК 536.244

ЛАМИНАРНАЯ СМЕШАННАЯ КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ВЕРТИКАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА С ПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Ю. П. Семенов

(Москва)

Теплообмен при смешанной конвекции около вертикальных цилиндров играет важную роль в ряде технологических процессов и энергетических установок. Однако этот вопрос недостаточно изучен. В большинстве работ по исследованию ламинарной смешанной конвекции рассматриваются процессы на вертикальных плоских поверхностях [1, 2] и на горизонтальных цилиндрах [3]. Теплообмен при смешанной конвекции на вертикальном цилиндре исследовался в единичных работах. В [4] решается задача совпадающей смешанной конвекции на вертикальном цилиндре при постоянной температуре

поверхности методом локальной неавтомоделности, в [5] используется тот же метод для решения задачи при постоянном тепловом потоке q_w . В [6, 7] исследована смешанная конвекция на вертикальном цилиндре при $q_w = \text{const}$ экспериментально и численно. Таким образом, ламинарная смешанная конвекция на вертикальном цилиндре с $t_w = \text{const}$ исследовалась только в [4]. Причем в этой работе параметр смешанной конвекции изменялся в ограниченных пределах $0 \leq Gr/Re^2 \leq 2$, в ней не получено обобщающих расчетных зависимостей и рассмотрена только совпадающая конвекция. Поэтому возникла необходимость в постановке данной работы.

Задача смешанной конвекции на вертикальных цилиндрах является неавтомоделной. Метод локальной неавтомоделности, применяемый в [4, 5], является приближенным. Для получения решения во всей области смешанной конвекции необходимо решить уравнения пограничного слоя, записанные в автомоделных переменных вынужденного движения, в области, близкой к вынужденному движению, и, записанные в автомоделных переменных естественной конвекции, в области, близкой к естественной конвекции.

В этом случае будет целесообразнее осуществить численное решение непосредственно уравнений пограничного слоя.

Для численного решения задачи смешанной конвекции на вертикальном цилиндре был использован метод [8, 9]. Этот метод применен в [7] для исследования смешанной конвекции на вертикальном цилиндре при $q_w = \text{const}$ и в [10] для исследования естественной конвекции.

Исходная система уравнений в цилиндрических координатах записывается в следующем виде:

уравнение движения

$$(1) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{dp}{dx} \pm \rho g;$$

уравнение энергии

$$(2) \quad \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y} \left(r \lambda \frac{\partial i}{\partial y} \right);$$

уравнение неразрывности

$$(3) \quad \partial(\rho u)/\partial x + \partial(\rho v)/\partial y = 0,$$

где x, y — продольная и радиальная координаты (координата y отсчитывается от поверхности цилиндра); $r = R + y$ (R — радиус цилиндра); u, v — продольная и радиальная составляющие скорости; i — энтальпия; p — давление; ρ — плотность; μ — коэффициент динамической вязкости; λ — коэффициент теплопроводности; g — ускорение свободного падения.

Знак плюс перед членом ρg в уравнении (1) соответствует совпадающей смешанной конвекции, знак минус — несовпадающей.

Вместо y вводим новую переменную

$$(4) \quad \omega = (\psi - \psi_w)/(\psi_0 - \psi_w),$$

где ψ — функция тока, определяемая соотношениями

$$(5) \quad \partial\psi/\partial y = \rho u r, \quad \partial\psi/\partial x = -\rho v r;$$

ψ_w, ψ_0 — значение функции тока соответственно на стенке и на внешней границе пограничного слоя.

В рассматриваемом случае $\partial\psi_w/\partial x = 0, \partial\psi_0/\partial x = -r_0 m_0$, где r_0 — радиус и m_0 — массовый поток на внешней границе пограничного слоя.

С учетом (4), (5) при условии $du_0/dx = 0$ исходная система (1)–(3) записывается в координатах $x - \omega$ в виде

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\omega r_0 m_0}{\psi_0 - \psi_w} \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{r^2 \rho \mu u}{(\psi_0 - \psi_w)^2} \frac{\partial u}{\partial \omega} \right] \pm \frac{g(\rho_0 - \rho)}{\rho u};$$

$$(7) \quad \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\omega r_0 m_0}{\psi_0 - \psi_w} \frac{\partial i}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{r^2 \rho u \lambda}{(\psi_0 - \psi_w)^2} \frac{\partial i}{\partial \omega} \right].$$

Уравнения (6), (7) интегрируются численно. В работе полностью сохраняется расчетная схема, разработанная в [8, 9]. Используется метод поступательного интегрирования. Некоторые особенности схемы: про-

изводные по ω определяются для значения функции в конце продольного шага интегрирования; изменение переменной между узловыми точками в поперечном направлении прямолинейное; в направлении продольной координаты зависимые переменные изменяются ступенчато, значение переменной по всей длине шага, кроме начальной точки, равно значению в конце шага. Принятие прямолинейного изменения функций по ω может привести к ошибке в определении их значений вблизи стенки, что скажется на точности определения трения и теплоотдачи. Поэтому около стенки принимается степенное распределение функций, а показатель степени определяется на основе решения для Куэттовского течения. Разностные уравнения получают посредством выражения каждого члена дифференциальных уравнений в виде среднеинтегрального значения в контрольном объеме.

Для осуществления решения необходимо задать начальное распределение скорости и энтальпии, условия на стенке и на внешней границе. В работе распределение скорости и температуры перед первым шагом принималось равномерным. Условия на стенке и внешней границе задавались обычным путем. Определенную трудность представляет определение физической внешней границы интегрирования и физических поперечных координат. Область интегрирования $0 \leq \omega \leq 1$ должна включать все точки с существенными градиентами зависимых переменных. Внутренняя граница совпадает со стенкой, внешняя граница может быть определена косвенно через скорость обмена через внешнюю границу пограничного слоя m_0 . Для определения m_0 уравнение (6) записывается для ω_* , расположенной на некотором удалении от ω_0 в глубь слоя:

$$r_0 m_0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{r^2 \rho u \mu}{\psi_0 - \psi_w} \frac{\partial u}{\partial \omega} \right] \right\}_* - \frac{\psi_0 - \psi_w}{(\partial u / \partial \omega)_*} \left[\mp \frac{g(\rho_0 - \rho)}{\rho u} \right]_*.$$

Очевидно, ω_* должно незначительно отличаться от 1. Для рассматриваемых условий можно принять $[g(\rho_0 - \rho)/\rho u]_* \approx 0$, тогда имеем

$$r_0 m_0 = \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{r^2 \rho u \mu}{\psi_0 - \psi_w} \frac{\partial u}{\partial \omega} \right] \right\}_*.$$

Полученное соотношение используется для определения физической ширины области интегрирования и физических координат расчетной сетки.

Выбранная система координат $x - \omega$ позволяет, имея равномерную сетку по ω , получить необходимую сетку по y . Величина шага по x переменна и связана с толщиной пограничного слоя. Продольный шаг пропорционален квадрату толщины слоя.

Одной из основных особенностей метода является способ определения теплового потока и трения на стенке. Предполагается, что для тонкого слоя около стенки можно применить уравнения течения Куэтта. В результате решения этих уравнений для плоской стенки получаем необходимые формулы

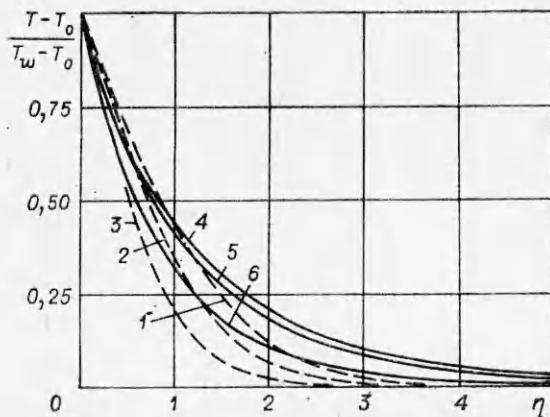
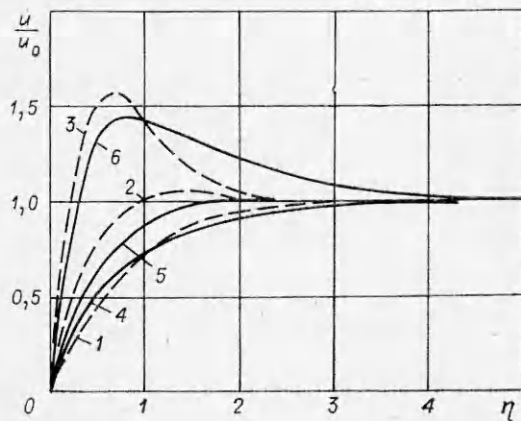
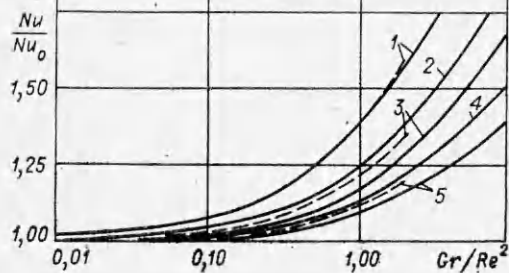
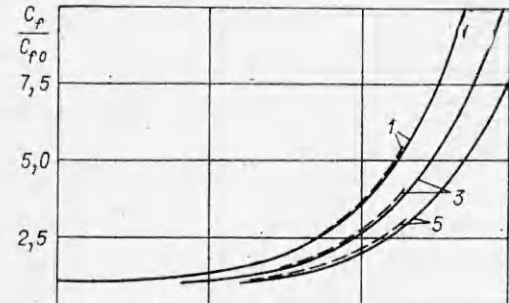
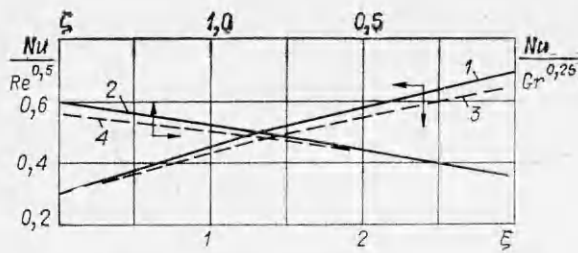
$$(8) \quad \frac{c_f}{2} = \frac{1}{Re^+} - \frac{y}{2(\rho u)^2} [\mp g(\rho_0 - \rho)];$$

$$(9) \quad St = 1/(Pr Re^+),$$

где c_f — коэффициент трения; St — число Стантона; Pr — число Прандтля; $Re^+ = \rho u y / \mu$.

При выводе формул (8), (9) влиянием осесимметричности пренебрегается, что может привести к ошибке расчета при большом параметре осесимметричности $\xi = 4(x/R)Re^{-0.5}$, где $Re = \rho u_0 x / \mu$.

Численное решение реализовано с помощью ЭЦВМ «Минск-32». Программа на языке «ФОРТРАН» написана с использованием программы [9], в которую внесены необходимые изменения. Отладка программы осу-



Фиг. 1
Фиг. 2
Фиг. 3
Фиг. 4

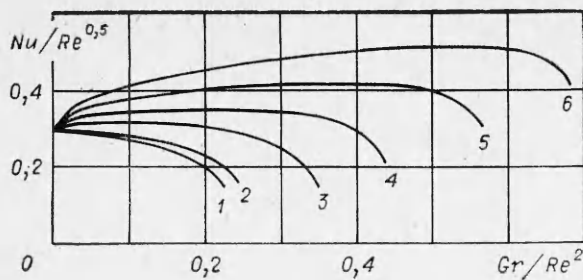
ществлена на примере теплообмена при вынужденном обтекании пластины. Расчетная сетка устанавливалась экспериментально. Число узлов сетки поперек слоя принято равным 30.

Расчеты проведены для $Pr = 0,7$. Наряду с расчетами вынужденного обтекания для апробации метода были проведены расчеты смешанной конвекции на вертикальной пластине для $0 \leq \leq Gr/Re^2 \leq 10$ ($Gr = g\beta x^3 \times (T_w - T_0)\rho^2/\mu^2$; $Re = \rho u_0 x/\mu$). Результаты расчета хорошо согласуются с данными [2, 4] и обобщаются уравнением

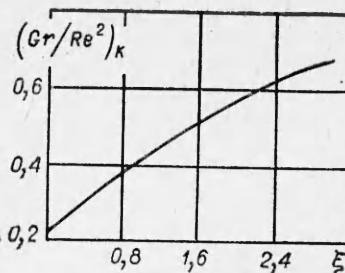
$$(10) \quad Nu^*/Nu_0^* = [1 + 2,19 (Gr/Re^2)^{3/4}]^{1/3},$$

где $Nu_0^* = 0,295 Re^{0,5}$ — число Нуссельта для вынужденного обтекания пластины. Здесь и далее за определяющую температуру принята T_0 , за определяющий размер x . Формула (10) имеет предельные переходы к вынужденной и естественной конвекции.

Результаты расчета для вынужденной конвекции ($Gr/Re^2 < 0,01$) и для условий, близких к естественной конвекции ($Gr/Re^2 \approx 10$), показаны на фиг. 1 (линии 1, 2; $\zeta = 2,83 (x/R)Gr^{-0,25}$). Здесь же для сравнения приведены данные вынужденного обтекания [4] (линия 3) и естественной конвекции [11] (линия 4). Видно удовлетворительное совпадение результатов. В пределах $\xi \leq 3$ и $\zeta \leq 1,5$



Ф и г. 5



Ф и г. 6

расхождение не превышает 6%. При дальнейшем увеличении ξ и ζ расхождение возрастает, что объясняется, очевидно, применением для расчета St и $c_f/2$ формул (8), (9).

Результаты расчета теплообмена и трения при совпадающей конвекции показаны на фиг. 2 (индексом 0 отмечены параметры вынужденного обтекания). Здесь же приведены результаты [4] (штриховые линии). Данные по трению хорошо коррелируются с работой [4]. По теплообмену совпадают результаты для пластины ($\xi = 0$). С увеличением ξ расхождение растет, но не превышает 5% ($\xi = 0; 0,5; 1; 2; 3$ — линии 1—5 соответственно).

Анализ фиг. 2 показывает, что с ростом параметра ξ влияние подъемных сил уменьшается. Величина параметра Gr/Re^2 , меньше которой влияние естественной конвекции пренебрежимо мало, с ростом ξ смещается в сторону увеличения. Так, для $\xi = 3$ при $Gr/Re^2 < 0,4$ влияние естественной конвекции не превышает 5%. В то время как для пластины это имеет место при $Gr/Re^2 < 0,01$.

Естественная конвекция оказывает более существенное влияние на трение, чем на теплообмен. С увеличением ξ оно уменьшается.

На фиг. 3, 4 приведены примеры профилей скорости и температуры при $Gr/Re^2 = 0,28; 1,35; 5,69; 0,55; 1,13; 5,16$ и $\xi = 0,5; 0,5; 0,5; 3,03; 3,01; 3$ (линии 1—6 соответственно).

Результаты расчета теплообмена аппроксимируются с погрешностью не более 5% формулой

$$Nu = Nu^* + Ax/R,$$

где Nu^* — число Нуссельта смешанной конвекции на пластине — определяется по уравнению (10).

Коэффициент A является функцией Gr/Re^2 . Для его определения получена формула

$$A = 0,53 - 0,032[2 + \lg(Gr/Re^2)],$$

которая справедлива при $0,01 \leq Gr/Re^2 \leq 10$. Если $Gr/Re^2 \leq 0,01, A = 0,53$, что соответствует данным для чисто вынужденной конвекции [4], а при $Gr/Re^2 \geq 10 A = 0,435$ — для чисто естественной конвекции [11].

Проведены расчеты несовпадающей смешанной конвекции в области, близкой к вынужденному движению. На фиг. 5 показаны результаты расчета обтекания цилиндров с различными диаметрами, т. е. с $\xi/x^{0,5} = 0; 0,53; 2,6; 4,2; 6,2; 8,8$ (линии 1—6 соответственно). При несовпадающей смешанной конвекции наступает отрыв пограничного слоя. Из фиг. 5 видно, что с ростом параметра осесимметричности отрыв наступает при больших значениях Gr/Re^2 . Известно, что в рамках теории пограничного слоя нельзя точно определить момент отрыва. Можно говорить только о приближенных значениях отрывных параметров. В данной работе расчет заканчивался при получении нулевого значения скорости в первом от стенки расчетном узле, что приблизительно совпадало с резким уменьшением теплоотдачи. Для этих условий была получена зависимость (фиг. 6) отношения $(Gr/Re^2)_к$ от параметра ξ . Зависимость аппроксимируется формулой

$$(Gr/Re^2)_к = 0,22 + 0,225\xi - 0,025\xi^2.$$

Получить простую зависимость для расчета теплообмена при несовпадающей конвекции не удалось. Для приближенного расчета теплоотдачи можно использовать график на фиг. 5 как расчетную номограмму.

Поступила 1 XI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко О. Г., Соковичин Ю. А. Теплообмен смешанной конвекцией. Минск: Наука и техника, 1975.
2. Брдлик П. М., Ильинский А. П., Семенов Ю. П. Управление тепломассообменом при смешанной конвекции в пограничном слое.— В кн.: Тепломассообмен-VI. Т. 1, ч. 3. Минск: ИТМО, 1980.
3. Беляков В. А., Брдлик П. М., Семенов Ю. П. Экспериментальное исследование смешанной конвекции воздуха около горизонтального цилиндра.— ПМТФ, 1980, № 2.
4. Чжэнь, Мокоглу. Влияние подъемной силы на вынужденную конвекцию вдоль вертикального цилиндра.— Теплопередача, 1975, № 2.
5. Чжэнь, Мокоглу. Влияние подъемной силы на вынужденную конвекцию вдоль вертикального цилиндра при постоянном тепловом потоке на поверхности.— Теплопередача, 1976, № 3.
6. Брдлик П. М., Семенов Ю. П. и др. Экспериментальное исследование смешанной конвекции на вертикальных поверхностях.— Научн. труды МЛТИ, 1981, вып. 138.
7. Семенов Ю. П. Численное исследование ламинарной смешанной конвекции около вертикального цилиндра при постоянном тепловом потоке на поверхности.— Науч. труды МЛТИ, 1982, вып. 146.
8. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях. М.: Энергия, 1971.
9. Patankar S. V., Spalding D. B. Heat and mass transfer in boundary layers.— 2nd Ed. London: Intertext books, 1971.
10. Mason H. B., Seban R. A. Numerical predictions for turbulent free convection from vertical surfaces.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1974, vol. 17, p. 1329.
11. Tetsu Fujii, Harvo Uehara. Laminar natural convective heat transfer from the outer surface of a vertical cylinder.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1970, vol. 13, p. 607.

УДК 536.25

ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПРИМЕСЬ

В. В. Колесов, В. И. Юдович

(Ростов-на-Дону)

1. Постановка задачи. Пусть вязкая теплопроводная жидкость, содержащая примесь, заполняет бесконечный плоский горизонтальный слой толщиной h . Нижняя граница слоя — твердая поверхность, имеющая постоянную температуру. Свободная верхняя граница слоя не деформируется, и на ней отсутствуют касательные напряжения. Над слоем находится атмосфера — неподвижный газ, имеющий квазистационарное распределение температуры. Поток тепла Q по вертикали в атмосфере вдали от свободной поверхности жидкости считается заданным (подогреву снизу соответствует случай $Q > 0$). Температура и нормальная составляющая потока тепла непрерывны при переходе через свободную поверхность. Поток примеси через границы слоя отсутствует. Жидкость как единое целое не может перемещаться параллельно дну. Количество примеси в жидкости не меняется с течением времени.

Задача для определения вектора скорости $\mathbf{V} = \{v_x, v_y, v_z\}$, давления P , температуры жидкости T , температуры атмосферы Θ и концентрации примеси S , приведенная к безразмерной форме и записанная в приближении Буссинеска, имеет вид

$$(1.1) \partial \mathbf{V} / \partial t + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \Delta \mathbf{V} + e(GT - G_S S), \quad \partial T / \partial t + (\mathbf{V}, \nabla) T = \\ = (1/P) \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad \Delta \Theta = 0, \quad \partial S / \partial t + (\mathbf{V}, \nabla) S = (1/P_a) \text{div} (\nabla S + \\ + \xi S \nabla T), \quad \int_{\Omega} v_x d\Omega = \int_{\Omega} v_y d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega - \int_{\Omega} d\Omega = 0, \quad \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad T = \partial S / \partial z + \\ + \xi S \partial T / \partial z = 0 \quad (z = 0), \quad v_z = \partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x = \partial v_y / \partial z + \partial v_z / \partial y = T - \Theta =$$