

7. Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений около дефекта в стеклопластике // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1974.— Вып. 19, 20.
8. Ермак А. А., Михайлов А. М. Динамическая концентрация напряжений в стеклопластике // ПМТФ.— 1978.— № 6.
9. Ермак А. А., Михайлов А. М. Теоретическое определение разброса прочности в стеклопластике // ПМТФ.— 1980.— № 6.
10. Михайлов А. М., Слепян Л. И. Стационарное движение трещины в однонаправленном композите // Изв. АН СССР. МТТ.— 1986.— № 2.

г. Новосибирск

Поступила 12/XI 1992 г.,
в окончательном варианте — 16/II 1993 г.

УДК 539.374+534.222.2

С. П. Киселев, В. М. Фомин

О МОДЕЛИ ПОРИСТОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОРЫ

1. Постановка задачи. Точное решение задачи о деформировании пористого материала, содержащего большое число сферических пор, практически невозможно. Поэтому широкое распространение получил приближенный подход, в котором с помощью методов осреднения переходят от пористого материала к сплошному с эффективными модулями упругости и поверхностью текучести. В настоящее время существует большое число методов осреднения [1—6].

В данной работе выбирается простейший метод вириального разложения, справедливый при малой объемной концентрации пор с точностью до членов $O(m_1^2)$, $m_1 \ll 1$. Это ограничение связано с тем, что в методе вириального разложения пренебрегается упругим взаимодействием между порами [3]. Средние напряжения σ_{ij} и деформации ϵ_{ij} пористого материала определяются формулами из [3, гл. 5, § 4], которые в наших обозначениях имеют вид

$$(1.1) \quad \epsilon_{ij} = m_1 \epsilon_{ij}^0 + m_2 \epsilon_{ij}^s, \quad \sigma_{ij} = m_2 \sigma_{ij}^s,$$

где ϵ_{ij}^0 , ϵ_{ij}^s — средние деформации поры и материала; σ_{ij}^s — среднее напряжение в материале; m_1 , m_2 — объемные концентрации пор и материала, для которых справедливы формулы

$$m_1 = \frac{4}{3} \pi a^3 n, \quad m_1 + m_2 = 1$$

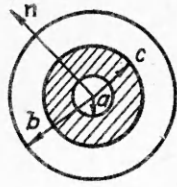
(n , a — концентрация и радиус сферических пор). Величина ϵ_{ij}^s в упругом случае определяется согласно закону Гука [3]

$$(1.2) \quad \epsilon_{ij}^s = \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^s \delta_{ij} + e_{ij}^s, \quad e_{ij}^s = S_{ij} / (2\mu_s m_2),$$

$$\epsilon_{kk}^s = -p / (K_s m_2), \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + S_{ij}.$$

Здесь μ_s , K_s — модуль сдвига и объемного сжатия материала; p — давление; S_{ij} , e_{ij}^s — девиаторы напряжений и деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера. В пластическом случае ϵ_{ij}^s находится из соотношений Прандтля — Рейса (см. п. 3).

Деформация поры ϵ_{ij}^0 при упругом деформировании определяется из решения Эшелби [2]. Если напряжения достаточно велики, то вследствие концентрации напряжений в окрестности поры возникает пластическая зона и деформации становятся упругопластическими. В этом случае точное решение отсутствует и необходимо построить приближенное решение



Р и с. 1

для определения ϵ_j^0 . Выберем систему координат, совпадающую с главными осями тензоров напряжений и деформаций (материал изотропен), и представим деформацию поры ϵ_i^0 в виде

$$(1.3) \quad \epsilon_i^0 = \epsilon_i^s + u_i^0/a,$$

где ϵ_i^s — деформация материала, которая была бы в нем при отсутствии поры; u_i^0 — дополнительное смещение поры вдоль i -й оси, связанное с концентрацией напряжений. Величина ϵ_i^s определяется по формулам (1.2), а u_i^0 — из приближенного решения. Для построения приближенного решения разобьем аналогично [1, 7—9] весь объем на сферические ячейки, так что в центре каждой ячейки имеется пора радиуса a (рис. 1). Радиус ячейки находится по формуле

$$b = a/m_1^{1/3}.$$

При постановке граничных условий на ячейке воспользуемся предположением, принятым в [1], согласно которому к поверхности ячейки приложено напряжение σ_{ij}^y , совпадающее со средним напряжением σ_y (схема Рейсса [1—3]). Таким образом, на ячейке $a < r < b$ необходимо решить задачу

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \nabla_j \sigma_{ij}^y &= 0, \quad f_i|_{r=a} = 0, \quad f_i|_{r=b} = \sigma_{ij} n_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \sigma_{ij}^y &= -p' \delta_{ij} + S_{ij}^y, \quad \epsilon_{ij}^y = \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^y \delta_{ij} + e_{ij}^y, \quad \epsilon_{kk}^y = -p'/K_s, \\ e_{ij}^y &= S_{ij}^y/2\mu_s, \quad I_2^y < Y_s^2, \quad I_2^y - \frac{3}{2} S_{ij}^y S_{ij}^y, \\ \dot{e}_{ij}^y &= \frac{1}{2\mu_s} \dot{S}_{ij}^y + \dot{\lambda} S_{ij}^y, \quad I_2^y = Y_s^2, \quad \epsilon_{ij}^y = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i). \end{aligned}$$

Здесь n_i — компоненты вектора нормали к границе ячейки (рис. 1); $\epsilon_{ij}^y, \sigma_{ij}^y$ — микродеформации и микронапряжения в ячейке. В упругопластическом случае точное решение уравнений (1.4) отсутствует, поэтому будем искать приближенное решение, в котором выполняются уравнения равновесия только по r и система уравнений имеет вид [10]

$$(1.5) \quad \frac{d\sigma_r^y}{dr} + 2 \frac{(\sigma_r^y - \sigma_\theta^y)}{r} = 0, \quad \sigma_\theta^y = \sigma_\phi^y, \quad f_r|_{r=a} = 0, \quad f_r|_{r=b} = \sigma_n,$$

где индексами r, θ, ϕ отмечены компоненты сферической системы координат на ячейке; σ_n — нормальное напряжение, приложенное к границе ячейки:

$$(1.6) \quad \sigma_n = -p + S_1 n_1^2 + S_2 n_2^2 + S_3 n_3^2.$$

Уравнения равновесия по θ и ϕ не выполняются, и приближенно полагается $u_\theta = u_\phi = 0$. Система (1.5), (1.6) решается в предположении, что в области пластичности у материала отсутствует упрочнение, поэтому предел текучести $Y_s = \text{const}$. Решение уравнений (1.5), (1.6) при шаровом тензоре средних напряжений $\sigma_n = -p$ известно [10] и определяется следующими формулами:

в упругой области ($c < r < b$)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_r^y &= -p + p \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right) / \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right), \quad \sigma_\theta^y = \sigma_\phi^y, \\ \sigma_\phi^y &= -p + p \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right) / \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right); \end{aligned}$$

в пластической области ($a < r < c$)

$$(1.8) \quad \sigma_r^y = 2\kappa Y_s \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\theta^y = \kappa Y_s + 2\kappa Y_s \ln \frac{r}{a}, \quad \sigma_\phi^y = \sigma_\theta^y$$

($\kappa = 1$ при растяжении, $\kappa = -1$ при сжатии, c — радиус пластической зоны (см. рис. 1)). Пренебрегая сжимаемостью материала, представим смещение в виде

$$(1.9) \quad u_r = \begin{cases} -\frac{p}{4\mu_s} \frac{b^3 a^3}{(b^3 - a^3) r^2}, & |p| \leq |p_0|, \\ \kappa \frac{Y_s}{6\mu_s} \frac{c^3}{r^2}, & |p_0| < |p| < |p_*|, \end{cases}$$

$$p + \frac{2}{3} \kappa Y_s \left(1 - \left(\frac{c}{b} \right)^3 + 3 \ln \left(\frac{c}{a} \right) \right) = 0,$$

$$p_0 = -\frac{2}{3} \kappa Y_s \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right), \quad p_* = -2\kappa Y_s \ln \frac{b}{a},$$

$$\kappa = 1, \quad p < 0; \quad \kappa = -1, \quad p > 0.$$

Система уравнений (1.7)–(1.9) справедлива при выполнении неравенства $|p| < |p_*|$. При нарушении этого неравенства уравнения равновесия (1.5) не имеют решений. Приближенное решение при нешаровом тензоре напряжений ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + S_{ij}$) определяется по формулам (1.7)–(1.9), в которых нужно произвести замену

$$p \rightarrow p - (S_1 n_1^2 + S_2 n_2^2 + S_3 n_3^2).$$

В результате смещение поверхности поры вдоль i -й оси в упругом случае дается формулой

$$(1.10) \quad u_i^0 = -\frac{p}{4\mu_s} \frac{b^3 a}{(b^3 - a^3)} + \frac{S_i}{4\mu_s} \frac{b^3 a}{(b^3 - a^3)},$$

а в упругопластическом случае

$$(1.11) \quad u_i^0 = \kappa \frac{Y_s}{6\mu_s} \frac{c_i^3}{a^2}, \quad a \leq c_i < b,$$

$$\sigma_i = \frac{2}{3} \kappa Y_s \left(1 - \left(\frac{c_i}{b} \right)^3 + \ln \left(\frac{c_i}{b} \right) + \ln \left(\frac{b}{a} \right) \right),$$

$$\kappa = \begin{cases} 1, & \sigma_i > 0, \\ -1, & \sigma_i < 0. \end{cases}$$

Подставляя (1.2), (1.10), (1.11) в формулу (1.3), найдем деформацию поры ϵ_i^0 , а по формуле (1.1) — среднюю деформацию ϵ . Для упругого деформирования приближенное решение (1.3), (1.10) достаточно хорошо совпадает с точным решением Эшелби (см. формулы (2.2), (2.3)). При появлении пластической зоны точное решение отсутствует. Поэтому в п. 2 для проверки методики рассмотрена задача о растяжении плоскости с отверстием. Построенное данным методом приближенное решение (2.12) сравнивалось с решением Д. Д. Ивлева (2.10) [10]. Результаты сравнения (2.13) показывают, что относительная ошибка в определении ϵ , не превышает 16 %, что является вполне удовлетворительным результатом.

2. Вычисление μ и K . Пусть давление p удовлетворяет неравенству $|p| < |p_0|$, тогда пластическая зона не возникает и ячейка деформируется упруго. Подставляя u_i^0 из уравнения (1.10) в соотношения (1.1), (1.3), с учетом (1.2) получим

$$(2.1) \quad \epsilon_i = -\frac{p}{3K_y} + \frac{S_i}{2\mu_y}, \quad K_y = K_s m_2 / \left(1 + \frac{m_1}{2} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \right),$$

$$\mu_y = \mu_s m_2 / (1 + m_1/2).$$

Разлагая выражения для K_y , μ_y в ряд по степеням m_1 , найдем

$$(2.2) \quad K_y = K_s \left(1 - \frac{3}{2} m_1 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right), \quad \mu_y = \mu_s \left(1 - \frac{3}{2} m_1 \right).$$

Соответствующие упругие константы, полученные с помощью точного решения Эшелби [2, 3], имеют вид

$$(2.3) \quad K_T = K_s \left(1 - \frac{3}{2} m_1 \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \right), \quad \mu_T = \mu_s \left(1 - \frac{5}{2} m_1 \right),$$

где при вычислении μ_T принято $\nu = 1/2$. Сравнение формул (2.2), (2.3) показывает, что выражения для K_y и K_T совпадают, а отличие в μ имеет порядок $(\mu_T - \mu_y)/\mu_y \approx 0,16m_1$ и является малым.

В случае, когда $|p| > |p_0|$, в ячейке возникает пластическая зона и деформации ϵ_i становятся упругопластическими. Подставляя u_i^n из (1.11) в уравнения (1.1), (1.3), получим

$$(2.4) \quad \epsilon_i = \frac{\sigma_i}{2\mu_s m_2} + \frac{3\nu p}{E_s m_2} + \frac{\kappa Y_s}{6\mu_s} x_i,$$

$$\frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\kappa Y_s} + \ln m_1 - 1 = \ln x_i - x_i, \quad x_i = \left(\frac{c_i}{b} \right)^3, \quad m_1 \leq x_i < 1.$$

Решение второго уравнения, определяющего x_i , можно найти графически (рис. 2, где $g = \frac{3}{2} \sigma_i / (\kappa Y_s) + \ln m_1 - 1$, $f = \ln x_i - x_i$). Из рис. 2 следует, что имеет место монотонная зависимость σ_i от x_i :

$$\frac{d}{dx_i} \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_i}{\kappa Y_s} \right) = \frac{1}{x_i} - 1 > 0, \quad m_1 \leq x_i < 1,$$

$$\frac{d\sigma_i}{dx_i} = 0 \quad \text{при} \quad x_i = 1.$$

Полагая в (2.4) $\sigma_i = -p + S_i$, где $|S_i/p| < 1$, разложим правую часть первого уравнения (2.4) в ряд по степеням S_i/p и, переходя затем от главных осей к произвольным, получим [7, 8]

$$(2.5) \quad e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2\mu_p}, \quad \epsilon_{kk} = -\frac{p}{K_p}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} + e_{ij},$$

$$K_p = K_s m_2 / \left(1 - \frac{\kappa}{3} \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \frac{Y_s}{p} m_p m_2 \right),$$

$$\mu_p = \mu_s m_e / \left(\eta + \frac{1}{2} m_p \right), \quad \eta = \frac{m_e}{m_2}, \quad m_e + m_p = 1, \quad m_p = \left(\frac{c}{b} \right)^3.$$

Величина $(c/b)^3$ определяется из второго уравнения (1.9), которое имеет приближенное решение

$$(2.6) \quad m_e = \sqrt{\frac{1+m_1^2}{m_2} - \frac{2m_1}{m_2} \operatorname{ctg} \left(\frac{3p}{2Y_s} \right)}, \quad m_e = 1 - \left(\frac{c}{b} \right)^3.$$

Деформация ϵ_{ij} в (2.5) есть сумма упругой ϵ_{ij}^e и пластической $\epsilon_{ij}^{p'}$ деформаций, последняя находится из уравнений

$$(2.7) \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{p'}, \quad e_{ij}^e = S_{ij}/2\mu_p, \quad \epsilon_{kk}^e = -p/K_p.$$

Уравнения (2.5) справедливы на стадии нагрузки, определяемой условием положительности работы напряжений на пластических деформациях [11]:

$$(2.8) \quad \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{p'} > 0, \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{p'} = d\epsilon_{ij}^{p'} / dt.$$

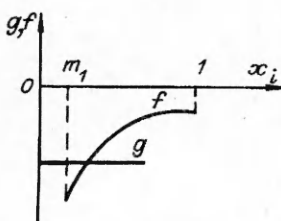


Рис. 2

Используя (2.1), (2.5), представим пластические деформации как

$$\epsilon_{kk}^{p'} = -p \left(\frac{1}{K_p} - \frac{1}{K_y} \right), \quad \epsilon_{ij}^{p'} = \frac{S_{ij}}{2} \left(\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_y} \right).$$

Дифференцируя левую и правую части этих выражений по t и учитывая явный вид K_p, K_y, μ_p, μ_y , получим

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{p'} = \frac{S_{ij}}{4\mu_c} \frac{(m_p - m_1)}{m_2 m_e} + \frac{S_{ij} \dot{m}_p}{4\mu_s m_e^2},$$

$$\dot{\epsilon}_{kk}^{p'} = \frac{1}{K_s} \left(\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \right) \left(\frac{p m_1}{2m_2} + \frac{1}{3} \times Y_s \dot{m}_p \right),$$

где $\dot{m}_p = -\frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{\times Y_s} \frac{m_p}{m_e}$ определяется из (1.9), (2.5). Переписывая неравенство (2.8) в форме

$$-p \dot{\epsilon}_{kk}^{p'} + S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{p'} > 0$$

и подставляя в него выражения для $\dot{\epsilon}_{ij}^{p'}$, $\dot{\epsilon}_{kk}^{p'}$, найдем условие нагрузки и применимости системы (2.5):

$$(2.9) \quad \dot{I} > 0, \quad p_0^2 < I_1 < p^2, \quad \dot{I} = \frac{dI}{dt},$$

$$\dot{I} = \left(\frac{3}{2} \zeta + m_p I_2 / (2m_e^3 Y_s \sqrt{I_1}) \right) \dot{I}_1 + \zeta \dot{I}_2 / 3,$$

$$\zeta = \frac{m_p}{m_e} - \frac{m_1}{m_2}, \quad I_1 = p^2, \quad I_2 = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}.$$

В остальных случаях деформирование происходит упруго и описывается законом Гука с константами μ_y, K_y (см. (2.1)). Отметим, что выполнение неравенства (2.8) показывает, что данная модель удовлетворяет 2-му закону термодинамики, так как приращение энтропии определяется по формуле [12]

$$\dot{S} = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{p'}.$$

Для оценки погрешности используемого метода рассмотрим задачу о растяжении плоскости с круговым отверстием радиуса a , когда пластическая область полностью охватывает отверстие. Деформация материала ϵ_i^r в этом случае определяется по формулам Д. Д. Ивлева (см. (8.27) из [10]) и в наших обозначениях имеет вид

$$(2.10) \quad e_i^r = \frac{S_i}{2\mu_s} \left(1 + \frac{2c^2}{r^2} - \frac{c^4}{r^4} \right), \quad \epsilon_{kk}^r = \frac{3u_0}{r}, \quad u_0 = \frac{kc^2}{2\mu_s r},$$

$$k = Y_s / \sqrt{3} \quad (S_i / k < 1).$$

Найдем приближенное значение ϵ_i^n с помощью метода, принятого в данной работе. Под действием давления p смещение материала [10]

$$(2.11) \quad u = u_0, \quad c^2 = a^2 / \exp(1 + p/k),$$

где u_0 определена в (2.10). Производя в (2.11) замену $p \rightarrow p - S_i$ и разлагая в ряд Тейлора по степеням (S_i/k) , с учетом (1.1), (1.3) получим

$$(2.12) \quad e_i^n = \frac{S_i}{2\mu_s} \left(1 + \frac{c^2}{r^2} \right), \quad \epsilon_{kk}^n = \frac{3u_0}{r}.$$

Из уравнений (2.10), (2.12) найдем относительную ошибку в определении деформации:

$$(2.13) \quad \frac{\delta e_i}{e_i^n} = x \left(\frac{1-x}{1+x} \right), \quad x = \frac{c^2}{r^2}, \quad \delta e_i = e_i^r - e_i^n, \quad m_1 = \frac{a^2}{r^2}.$$

Отсюда следует, что максимальная относительная ошибка не превышает 0,16.

3. Пластичность. До сих пор рассматривался случай, когда средние напряжения не лежат на поверхности текучести и появление пластических деформаций связано с концентрацией микронапряжений вблизи поры. После выхода средних напряжений S_{ij} на поверхность текучести возникают пластические деформации $\epsilon_{ij}^{p''}$, которые определяются из ассоциированного закона течения [7—9]

$$(3.1) \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{p''} = \dot{\lambda}' \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

(Φ — поверхность текучести, которая находится из уравнения $\Phi(I_1, I_2, m_1) = 0$). Полная деформация ϵ_{ij} представляется как сумма

$$(3.2) \quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{p'} + \epsilon_{ij}^{p''},$$

где ϵ_{ij}^e , $\epsilon_{ij}^{p'}$ находятся из (2.5), (2.7). Следуя [9], запишем зависимость Φ от I_1, I_2, m_1 в виде $\Phi = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - Y^2(p, m_1)$. Для определения Y^2 воспользуемся тем, что при пластическом течении микронапряжения лежат на поверхности текучести Мизеса $\frac{3}{2} S'_{ij} S'_{ij} = Y_s^2$. Усредняя эту формулу по объему материала, получим

$$(3.3) \quad \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} + \frac{3}{2} m_2^2 \langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle_s = m_2^2 Y_s^2, \\ S_{ij} = m_2 \langle S'_{ij} \rangle_s, \quad S'_{ij} = S'_{ij} - \langle S'_{ij} \rangle_s, \quad \langle S'_{ij} \rangle_s = 0.$$

Величину $\langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle_s$ определим осреднением решения на ячейке (1.7), (1.8):

$$\langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle_s = \begin{cases} \frac{3}{2} p^2 \frac{m_1}{m_2}, & |p| < |p_0|, \\ \frac{2}{3} Y_s^2 \left(1 - \frac{m_e^2}{m_2} \right), & |p_0| < |p| < |p_*|. \end{cases}$$

Подставляя $\langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle_s$ в (3.3), найдем поверхность текучести пористого материала:

$$(3.4) \quad \Phi = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - Y^2 = 0,$$

$$Y^2 = \begin{cases} Y_s^2 m_2^2 - \frac{9}{4} p^2 m_1, & |p| \leq |p_0|, \\ Y_s^2 m_2 m_e^2, & |p_0| < |p| \leq |p_*|. \end{cases}$$

С помощью прямых численных расчетов в [7, 8] было показано, что (3.4) совпадает с формулой Гарсона [9]. Как отмечено Твергардом [13], в формуле Гарсона и соответственно в (3.4) необходимо произвести замену $m_1 \rightarrow k^* m_1$, где $k^* = 1,5$ для цилиндрических пор. В случае сферических пор в [7, 8] рекомендовано $k^* = 1,7$. Появление множителя k^* связано с наличием упругих областей в ячейке, которые не учитываются при выводе (3.3). Дифференцируя (3.2) по времени, с учетом (2.5), (2.7), (3.1), (3.4) получим уравнения типа Прандтля — Рейсса

$$(3.5) \quad \frac{1}{2\mu} \overset{\nabla}{S}_{ij} + \dot{\lambda}' S_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{kk} = - \left(\frac{p_x}{K} \right) \dot{\lambda}' + \frac{1}{3} \dot{\lambda}' \frac{\partial Y^2}{\partial p}, \\ \frac{1}{2\mu} \overset{\nabla}{S}_{ij} = \left(\frac{S_{ij}}{2\mu} \right) \dot{\lambda}' - \frac{1}{2\mu} (\omega_{ik} S_{kj} + \omega_{jk} S_{ik}), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i v_j - \nabla_j v_i).$$

Здесь $\mu = \mu_p$, $K = K_p$ при $\dot{\lambda}' > 0$, $p_0^2 < I_1 < p_*^2$; $\mu = \mu_y$, $K = K_y$ в остальных случаях; $\dot{\lambda}'$ определяется из условия

$$d\Phi = d \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} - Y^2(p, m_1, Y_s) \right) = 0,$$

которое приводит к уравнению

$$(3.6) \quad 3S_{ij} \frac{dS_{ij}}{d\lambda} - \frac{\partial Y^2}{\partial p} \frac{dp}{d\lambda} + \frac{\partial Y^2}{\partial m_1} \frac{dm_2}{d\lambda} - \frac{\partial Y^2}{\partial Y_s} \frac{dY_s}{d\lambda} = 0.$$

Умножая первое уравнение (3.5) на S_{ij} , с учетом $\Phi = 0$ получим

$$(3.7) \quad S_{ij} \frac{dS_{ij}}{d\lambda} = 2\mu S_{ij} \frac{de_{ij}}{d\lambda} = \frac{4}{3} \mu Y^2 + \frac{2}{3} \frac{Y^2}{\mu} \frac{dp}{d\lambda}.$$

Подставляя (3.7) и второе уравнение (3.5) в (3.6), найдем

$$(3.8) \quad d\lambda = \left(6\mu S_{ij} de_{ij} + \left(2 \frac{Y^2}{\mu} \frac{d\mu}{dp} - \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right) dp - \right. \\ \left. - \frac{\partial Y^2}{\partial Y_s} dY_s \right) / \left(4\mu Y^2 + \frac{m_2}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial m_1} \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right).$$

Для замыкания (3.8) необходимо задать закон упрочнения $Y_s = Y_s(\epsilon_{ij}^e \epsilon_{ij}^e)$ и уравнение состояния $p = p(\rho, \mathcal{E})$. В данной работе рассматривается идеально пластический материал, поэтому $Y_s = \text{const}$. Уравнение состояния с учетом тепловых эффектов зададим в обычном виде

$$p = p_x + p_T, \quad \mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}_x + \bar{\mathcal{E}}_T, \quad p_T = \Gamma \rho \mathcal{E}_T, \\ \Gamma / \Gamma_s = K / (m_2 K_s), \quad \mathcal{E}_T = c_V T, \\ \mathcal{E}_x = \left(\frac{1}{2} K_y (\epsilon_{kk}^e)^2 + \mu_y e_{ij}^e e_{ij}^e \right) / \rho, \quad p_x = -K_y \epsilon_{kk}^e,$$

где T — температура; c_V — удельная теплоемкость; \mathcal{E} , \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_T — удельная энергия, холодная и тепловая энергии; p_x , p_T — холодное и тепловое давления; Γ — коэффициент Грюнайзена. Приращение удельной энтропии при пластическом течении определяется по формуле [12] $dS = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^p$, откуда с учетом (3.2) имеем

$$(3.9) \quad dS = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p'} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p''}.$$

Как было показано выше (2.8), при $\dot{I} > 0$, $p_0^2 < I_1 < p_*^2$ справедливо неравенство $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p'} > 0$, в остальных случаях $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p'} = 0$, так как $d\epsilon_{ij}^{p'} = 0$. Таким образом, первое слагаемое в (3.9) больше либо равно нулю. Выясним знак второго слагаемого. Определяя $d\epsilon_{ij}^{p''}$ из (3.1), с учетом (3.4) найдем

$$(3.10) \quad \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p''} = d\lambda \left(\frac{2}{3} v^2 - \frac{\rho}{3} \frac{\partial Y^2}{\partial p} \right), \quad d\lambda > 0.$$

Поверхность текучести (3.4) удовлетворяет неравенству $\rho \frac{\partial Y^2}{\partial p} \leq 0$, поэтому выражение (3.10) больше нуля. Если $I_2 < Y^2$, то $d\epsilon_{ij}^{p''} = 0$ и $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p''} = 0$, тогда в общем случае $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^{p''} \geq 0$. Подставляя эти выражения в (3.9), получим $dS \geq 0$.

4. Обсуждение результатов. Рассмотрим на двух примерах основные особенности деформирования пористого материала в рамках предложенной модели. В первом примере будем считать тензор напряжения шаровым ($\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$). Тогда зависимость $p(\epsilon_{kk})$ при нагрузке с учетом пластической зоны определяется из первого и третьего уравнений системы (2.5). На рис. 3 эта зависимость показана кривой *ОВС*. Разгрузка из состояния *С* происходит вдоль прямой $\Delta p = -K_y \Delta \epsilon_{kk}$. Последующее нагружение до точки *С* также происходит вдоль прямой *ЕС* (автофретаж [11]). В точке *D* ($p = |p_*|$) имеем $dp/d\epsilon_{kk} = 0$, а при $p > |p_*|$ пора теряет устойчивость и происходит сжатие (рост) поры. Если пластическая зона не учитывается, то

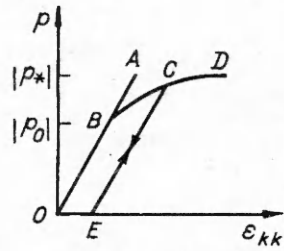


Рис. 3

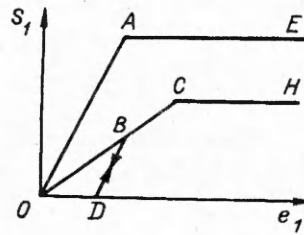


Рис. 4

нагрузка и разгрузка происходят вдоль прямой OA , которая описывается уравнением $p = -K_y \epsilon_{kk}$.

Во втором примере сначала приложим к пористому материалу постоянное давление p , а затем переменные сдвиговые напряжения S_i : $S_3 = 0$, $S_1 + S_2 = 0$. На рис. 4 в плоскости S_1, e_1 представлены два случая нагружения при одной и той же пористости m_1 . В первом случае, показанном прямыми OAE , $p = p_1 = \text{const}$, $|p_1| < |p_0|$, поэтому пластическая зона не возникает. При изменении S_1 до точки A нагрузка и разгрузка описываются уравнением $S_1 = 2\mu_y e_1$. В точке A начинается пластическое течение, поэтому на прямой AE $S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y(p_1, m_1) = \text{const}$. Во втором случае $|p_2| > |p_0|$, $p_2 = \text{const}$ и возникает пластическая зона, а нагружение на отрезке OC подчиняется уравнению $S_1 = 2\mu_p e_1$. Разгрузка из точки B определяется уравнением $\Delta S_1 = 2\mu_y \Delta e_1$. Последующая нагрузка до точки B тоже описывается этим уравнением. В точке C начинается пластическое течение (3.1) с постоянным напряжением $S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} Y(p_2, m_1)$, где $Y(p, m_1)$ находится из (3.4). Положение линий OAE и OCH на рис. 4 определяется следующими неравенствами: $|p_2| > |p_1|$, $Y(p_2, m_1) < Y(p_1, m_1)$, $\mu_p < \mu_y$. Отметим, что если пластическая зона не учитывается, то кривая нагружения совпадает с OAE . Используя уравнения (2.1), (2.5), (2.7), найдем пластические деформации $e_1^{p'}$ на участке OC (рис. 4) в виде

$$(4.1) \quad e_1^{p'} = \frac{S_1}{2\mu_p} - \frac{S_1}{2\mu_y} = \frac{S_1}{2\mu_y} \frac{(m_p - m_1)}{m_e m_2}.$$

Согласно (3.4), в точке C

$$(4.2) \quad S_1 = \frac{Y_c}{\sqrt{3}} \sqrt{m_2} m_e.$$

Подставляя (4.2) в (4.1), получим, что в точке C

$$e_1^{p'}|_c = \frac{Y_c}{2\sqrt{3}\mu_y} \frac{(m_p - m_1)}{\sqrt{m_2}},$$

откуда при $m_p = 1$ максимальная деформация

$$(4.3) \quad (e_1^{p'})_{\max} = \frac{Y_c \sqrt{m_2}}{2\sqrt{3}\mu_y}.$$

Из рис. 3, 4 и оценки (4.3) следует, что учет пластической зоны качественно изменяет кривые нагружения пористого материала.

Пластическая зона оказывает также существенное влияние на зависимость предела текучести от давления, которая определяется уравнениями (3.4). Если это влияние не учитывается, то $Y(p)$ имеет вид

$$(4.4) \quad Y^2 = Y_s^2 m_2^2 - \frac{9}{4} p^2 m_1.$$

Из уравнения (4.4) вытекает, что $Y = 0$ при $p_1^* = \frac{2}{3} Y_s \frac{m_2}{m_1^{1/2}}$, тогда как из (3.4)

имеем $Y = 0$ при $p_2^* = \frac{2}{3} Y_s \ln \frac{1}{m_1}$. В результате для отношения критических давлений получим $p_1^*/p_2^* \rightarrow \infty$ при $m_1 \rightarrow 0$.

Работа выполнена по программе Российского фонда фундаментальных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хашин З. Упругие модули неоднородных материалов // Прикл. механика.— 1962.— Т. 29, № 1.
2. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций.— М.: ИЛ, 1963.
3. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред.— М.: Наука, 1977.
4. Хилл Р. Упругие свойства составных сред; некоторые теоретические принципы // Механика: Сб. пер. иностр. лит.— 1964.— № 5.
5. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.
6. Победря Б. Е. Механика композиционных материалов.— М.: Изд-во МГУ, 1984.
7. Киселев С. П. Упругопластическая модель деформирования пористого материала // Фильтрация многофазных систем.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1991.
8. Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах.— Новосибирск: Наука, 1992.
9. Гарсон А. Л. Континуальная теория вязкого разрушения, обусловленного образованием и ростом пор. Ч. 1. Критерий текучести и законы течения для пористой пластической среды // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теорет. основы инж. расчетов.— 1977.— № 1.
10. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высш. шк., 1969.
11. Качанов Л. М. Основы теории пластичности.— М.: ГИТЛ, 1956.
12. Седов Л. И. Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1970.— Т. 2.
13. Tvergaard V. Numerical study of localization in a void-sheet // Int. J. Solids Structures.— 1989.— V. 25, N 10.

г. Новосибирск

Поступила 15/V 1992 г.,
в окончательном варианте — 20/1 1993 г.

УДК 532

Б. Г. Кузнецов

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

1. Сравнение скоростей распространения возмущений при использовании моделей Эйлера и Навье — Стокса приводит к весьма странному выводу: в то время как в идеальном газе эта скорость в полном соответствии с опытом конечна и равна скорости звука, в вязком газе (т. е. в модели, призванной более аккуратно отражать свойства реальных газов) она бесконечна. Последнее, естественно, не может не вызывать некоторых сомнений в безусловной справедливости уравнений Навье — Стокса. Возникает желание разобраться в причинах данного парадокса и попытаться их устранить.

Рассмотрим в связи с этим сначала простейшую модель — модель баротропной среды с уравнением состояния $p = a^2\rho$, где $a = \text{const}$ — скорость звука, p — давление, ρ — плотность. Уравнения, описывающие движение такой среды при отсутствии массовых сил, имеют вид

$$(1.1) \quad \rho_t + \text{div}(\rho v) = 0,$$

$$\rho(v_t + v \cdot \text{grad} v) + \text{grad} p = \text{div}(2\mu D).$$

Здесь v — скорость; D — тензор скоростей деформации; μ — коэффициент вязкости, равный нулю в случае идеального газа (второй вязкостью ради простоты пренебрегается). Уравнения характеристик (всюду в дальнейшем они будут приводиться для случая одномерного движения) при $\mu = 0$ следуют из соотношения [1]

$$\begin{vmatrix} \omega_t + u\omega_x, & \rho\omega_x \\ a^2\omega_x, & \rho(\omega_t + u\omega_x) \end{vmatrix} = 0,$$