

Рис. 3. Расчетные зависимости от давления концентрации окислителя X_{si} (1, 2) и горючего Y_{si} (3, 4) на поверхности в момент зажигания.

q , кал/(см²·с): 1, 4 — 24, 2, 3 — 7,44.

На рис. 3 изображены кривые $X_s(T_{si})$ и $Y_s(T_{si})$ в зависимости от давления. Отметим, что X_s , вычисленное при $q = 24$ кал/(см²·с), больше, чем при $q = 7,44$ кал/(см²·с), для всех p . Для Y_s соотношение обратное. Характерно, что в области малых давлений скорость падения концентрации реагентов с ростом p тем сильнее, чем меньше q . При естественном предположении, что рассеяние внешнего радиационного потока тем сильнее, чем больше реагента накоплено в газовой фазе, из анализа рис. 3 можно представить, что эффективный тепловой поток на поверхность ГС тем быстрее падает с ростом давления, чем меньше q . Это означает, что при малых q минимум зависимости $t_i(p)$ в (19) должен сильно сдвинуться влево по сравнению с расчетами, игнорирующими экранирование. Большое значение в связи с этими соображениями имело бы экспериментальное изучение оптических свойств газовой фазы над поверхностью ГС.

Авторы благодарят В. Т. Кузнецова за содействие в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виллюнов В. Н. Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибирск: Наука, 1984.
2. Kumar V. K., Hermance C. E. Comb. Sci. Technol., 1976, 14, 169.
3. Kumar V. K. Ibid., 1983, 30, 273.
4. Кумар М., Уиллс Д. Э., Кулкарни А. К. и др. Аэрокосмическая техника, 1985, 1, 36.
5. Кузнецов В. Т., Марусин В. П., Скорик А. И. ФГВ, 1974, 9, 4, 526.
6. Коздоба Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности.— М.: Наука, 1975.

Поступила в редакцию 4/XI 1986,
после доработки — 23/II 1987

ТЕПЛОВОЕ ВОСПЛАМЕНЕНИЕ КОЛЬЦЕВОГО СЛОЯ И ЕГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

С. А. Бостанджиян
(Черноголовка)

Воспламенение кольцевого слоя рассматривалось в [1, 2]. В [3] показано существование гидродинамической аналогии между тепловым воспламенением цилиндра и диссипативным пуазейлевским течением в бесконечной круглой трубе инертной жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры.

В данной работе исследуются критические условия теплового воспламенения кольцевого слоя при произвольном перепаде температур на поверхностях цилиндров, при одной термостатированной и другой теплоизолированной поверхностях, а также устанавливается гидродинамическая аналогия между воспламенением кольцевого слоя и диссипативным течением жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры между бесконечными вращающимися цилиндрами при фиксированном значении касательного напряжения на поверхности вращающегося цилиндра.

Пусть пространство между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами заполнено реакционноспособной массой, в которой проте-

Рис. 1. Схематическое изображение условия задачи.

кает реакция нулевого порядка. На поверхности внешнего цилиндра радиусом R_0 поддерживается постоянная температура T_0 , на поверхности внутреннего цилиндра с R_1 поддерживается постоянной T_1 . Если ввести безразмерные переменные и параметры

$$\Theta = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0), \quad \xi = \frac{r}{R_0}, \quad \delta^0 = \frac{Qk_0}{\lambda} \frac{E}{RT_0^2} h^2 e^{-E/RT_0}, \quad \Theta_0 = \frac{E}{RT_1^2} (T_1 - T_0), \quad (1)$$

$$d = R_1/R_0, \quad h = (R_0 - R_1)/2$$

и применить разложение экспоненты в законе Аррениуса по Франк-Каменецкому [4], то уравнение теплового баланса и граничные условия для него в безразмерной форме можно записать так:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} + \frac{\delta^0}{(1-d)^2} e^\Theta = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \xi = d: \quad \Theta = \Theta_0, \\ \xi = 1: \quad \Theta = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В параметре Франк-Каменецкого δ^0 за характерный размер принята половина свода кольцевого слоя. В (1) обозначения: Q — тепловой эффект реакции; E — энергия активации; k_0 — предэкспонент; λ — коэффициент теплопроводности. Условия задачи изображены на рис. 1, а.

Задачу о воспламенении цилиндрического слоя заменой функции и переменной в (2) и (3) можно свести к задаче о несимметричном воспламенении плоского слоя. Заменяем функцию и переменную соотношениями

$$\Theta = u - 2 \ln \xi, \quad \eta = 1 - 2 \ln \xi / \ln d, \quad (4)$$

тогда (2) и граничные условия (3) примут вид

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \delta e^u = 0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \eta = 1: \quad u = 0, \\ \eta = -1: \quad u = u_0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_0 = \Theta_0 + 2 \ln d, \quad \delta = \delta^0 \ln^2 d / (1-d)^2. \quad (7)$$

Уравнение (5) и граничные условия (6) представляют математическую формулировку задачи о несимметричном воспламенении плоского слоя с температурой u , координатой η и температурным напором u_0 . Схематически условия такой задачи изображены на рис. 1, б. Так как $d < 1$, то при $\Theta_0 < 0$ u_0 всегда отрицательна, при $\Theta_0 > 0$ в зависимости от соотношения величин Θ_0 и d u_0 может быть как положительна, так и отрицательна.

Приведем кратко результаты исследования задачи о несимметричном воспламенении плоского слоя. Решение уравнения (5) записывается в виде [4]

$$u(\eta) = \ln \frac{a}{\text{ch}^2 [b + (a\delta)^{1/2} \eta]}, \quad (8)$$

где a и b — постоянные интегрирования, которые определяются из системы трансцендентных уравнений, получающейся в результате удовлетворения граничным условиям (6).

Если $u_0 > 0$ ($\Theta_0 > -2 \ln d$), то

$$a = (\ln p + \ln q)^2 / 2\delta, \quad b = (\ln p \mp \ln q) / 2, \quad (9)$$

где

$$p = a^{1/2} + (a - 1)^{1/2}, \quad q = (ae^{-u_0})^{1/2} + (ae^{-u_0} - 1)^{1/2}.$$

В (9) верхние знаки берутся при $\delta < \delta_1$, нижние при $\delta > \delta_1$,

$$\delta_1 = \ln^2 [e^{u_0/2} + (e^{u_0} - 1)^{1/2}] / 2e^{u_0}.$$

Если $u_0 < 0$ ($\Theta_0 < -2 \ln d$), то

$$a = (\pm \ln p + \ln q)^2 / 2\delta, \quad b = (\pm \ln p - \ln q) / 2. \quad (10)$$

Верхние знаки берутся при $\delta < \delta_2$, нижние при $\delta > \delta_2$, $\delta_2 = \ln^2 [e^{-u_0/2} + (e^{-u_0} - 1)^{1/2}] / 2$. При $\delta < \delta_1$ и $\delta < \delta_2$ профили u представляют монотонно изменяющиеся кривые. Разрешая первые уравнения (9) и (10) относительно δ , получим

$$\delta = \frac{\left(\ln \frac{p}{q}\right)^2}{2a}.$$

При $\delta < \delta_{кр}$ из этого трансцендентного уравнения определяется постоянная интегрирования a , затем по вторым выражениям (9) и (10) вычисляется постоянная интегрирования b . При $\delta > \delta_1$ и $\delta > \delta_2$ профиль u имеет максимум, а для определения a получаем трансцендентное уравнение

$$\delta = \frac{(\ln \frac{p}{q})^2}{2a}. \quad (11)$$

Определим зависимость $\delta_{кр}$ от Θ_0 и d . В критических условиях профиль u имеет максимум внутри зазора. Приравняв к нулю производную функции (11), приходим к следующему трансцендентному уравнению для определения a_0 , при котором δ принимает максимальное значение (критическое)

$$\ln pq = \frac{a^{1/2}}{(a-1)^{1/2}} + \frac{a^{1/2}}{(a - e^{u_0})^{1/2}}. \quad (12)$$

Найдя отсюда a_0 , заменив в (11) логарифм правой частью (12), получим выражение

$$\delta_{кр} = \left[\frac{a_0^{1/2}}{(a_0-1)^{1/2}} + \frac{a_0^{1/2}}{(a_0 - e^{u_0})^{1/2}} \right]^2 / 2a_0. \quad (13)$$

По результатам расчетов подобрана аппроксимирующая функция

$$\delta_{кр}^0 = [0,0156 (\Theta_0 + 2 \ln d)^2 - 0,228 (\Theta_0 + 2 \ln d) + 0,937]^2 (1 - d)^2 / \ln^2 d. \quad (14)$$

При вычислении $\delta_{кр}^0$ по (14) относительная ошибка в диапазоне изменений $(-3 - 2 \ln d) < \Theta_0 < (3 - 2 \ln d)$ не превышает 1%.

Представляет интерес исследование случаев одного термостатированного и другого теплоизолированного цилиндров. Рассмотрим отдельно ситуации, когда теплоизолирован внутренний цилиндр, внешний термостатирован и теплоизолирован, внутренний термостатирован.

Пусть внутренний цилиндр теплоизолирован, на внешнем поддерживается постоянная температура T_0 . Нужно решить уравнение (2) при

$$\begin{aligned} \xi = d: \quad \frac{d\Theta}{d\xi} &= 0; \\ \xi = 1: \quad \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Можно было бы воспользоваться решением (8), заменив в нем u на Θ и η на ξ , согласно (4). Но при такой форме записи решения после

удовлетворения граничным условиям не удастся параметр δ явно выразить через постоянную интегрирования, поэтому нахождение критических условий затруднено. Задача значительно облегчается, если в (2) использовать другую замену переменной:

$$\Theta = u - 2 \ln \xi, \quad \eta = \ln \xi - \ln d.$$

Тогда уравнение для u запишется в виде (5) с той только разницей, что здесь δ и δ_0 связаны соотношением

$$\delta = 4\delta^0 / (1 - d)^2. \quad (16)$$

Заметим, что в общем решении (8) в аргументе гиперболического косинуса можно брать как плюс, так и минус [4]. Беря знак минус и возвращаясь к исходным переменным, решение уравнения (2) можно записать в виде

$$\Theta(\xi) = \ln \frac{a}{\xi^2 \operatorname{ch}^2 [b - (a\delta/2)^{1/2} \ln(\xi/d)]}.$$

Удовлетворив граничным условиям (15), получим систему трансцендентных уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\operatorname{ch} [b + (a\delta/2) \ln d] = a^{1/2}, \quad (a\delta/2)^{1/2} = \operatorname{cth} b,$$

которую легко разрешить относительно δ , тогда

$$(\delta/2)^{1/2} = \operatorname{cth} b / \operatorname{ch} (b + \ln d \cdot \operatorname{cth} b). \quad (17)$$

При $\delta < \delta_{\text{кр}}$ из (17) определяется постоянная интегрирования b , постоянную a можно вычислить по формуле $a = 2 \operatorname{cth}^2 b / \delta$. Приравняв к нулю производную правой части (17), получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{th} b + (\operatorname{sh}^2 b - \ln d) \cdot \operatorname{th} (b + \ln d \cdot \operatorname{cth} b) = 0, \quad (18)$$

откуда находится b_0 , при котором достигается $\delta_{\text{кр}}$. Согласно (17)

$$\delta_{\text{кр}} = 2 \operatorname{cth}^2 b_0 / \operatorname{ch}^2 (b_0 + \ln d \cdot \operatorname{cth} b_0). \quad (19)$$

Пусть теперь внутренний цилиндр термостатирован при T_0 , а внешний теплоизолирован. Уравнение (2) нужно решать при граничных условиях

$$\begin{aligned} \xi = d: \quad \Theta &= 0, \\ \xi = 1: \quad \frac{d\Theta}{d\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В (2) сделаем замену переменных

$$\Theta = u - 2 \ln \xi, \quad \eta = \ln \xi.$$

Уравнение для нахождения u запишется в виде (5), где δ выражается через δ^0 согласно (16). Решение исходного уравнения записывается в виде

$$\Theta(\xi) = \ln \frac{a}{\xi^2 \operatorname{ch}^2 [b - (a\delta/2)^{1/2} \ln \xi]}.$$

В результате удовлетворения граничным условиям (20) приходим к системе трансцендентных уравнений

$$(a\delta/2)^{1/2} = \operatorname{cth} b, \quad d \cdot \operatorname{ch} [b - (a\delta/2)^{1/2} \ln d] = a^{1/2}$$

для определения постоянных интегрирования. Разрешим эту систему относительно δ

$$(\delta/2)^{1/2} = \operatorname{cth} b / d \cdot \operatorname{ch} (b - \ln d \cdot \operatorname{cth} b). \quad (21)$$

Для определения b_0 , соответствующего критическому значению, получаем трансцендентное уравнение

$$\operatorname{th} b + (\operatorname{sh}^2 b + \ln d) \operatorname{th} (b - \ln d \cdot \operatorname{cth} b) = 0. \quad (22)$$

Согласно (21)

$$\delta_{кр} = 2 \operatorname{cth}^2 b_0 / d^2 \operatorname{ch}^2 (b_0 - \ln d \cdot \operatorname{cth} b_0). \quad (23)$$

Рассмотрим установившееся неизотермическое диссипативное течение вязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры вида $\mu(T) = \mu_0 \exp \beta(T - T_0)$ между двумя бесконечными цилиндрами, внутренний из которых радиусом R_1 неподвижен, а наружный вращается под действием приложенного постоянного касательного напряжения τ_0 . Внутренний цилиндр поддерживается при температуре T_1 , внешний при T_0 .

Система уравнений движения в напряжениях и уравнение энергии записываются в виде

$$\frac{d}{dr} (r^2 \tau) = 0, \quad \lambda \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + E_0 = 0, \quad (24)$$

где τ — касательное напряжение; λ — коэффициент теплопроводности; диссипативная функция в случае вращательного движения имеет вид

$$\bar{E}_0 = \mu(T) \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right)^2; \quad (25)$$

v — линейная скорость частиц жидкости.

Если проинтегрировать первое уравнение системы (24) и удовлетворить граничному условию $\tau = \tau_0$ при $r = R_0$, получим

$$\tau = R_0^2 \tau_0 / r^2. \quad (26)$$

Крутящий момент M , приходящийся на единицу длины цилиндра, связан с напряжением τ_0 соотношением $M = 2\pi R_0 \tau_0$. Напряжение сдвига через скорость сдвига выражается формулой

$$\tau = \mu(T) \left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} \right). \quad (27)$$

Движение частиц жидкости происходит по окружностям, следовательно, линейная и угловая скорости связаны соотношением $v = \omega r$. С учетом (25) — (27) можно записать

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{R_0^2 \tau_0}{\mu(T) r^2}, \quad E_0 = \frac{\tau_0^2 R_0^4}{\mu(T) r^4}. \quad (28)$$

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \Theta &= \beta(T - T_0), \quad \xi = \frac{r}{R_0}, \quad \Omega = \frac{\mu_0}{\tau_0} \omega, \quad d = \frac{R_1}{R_0}, \\ \Theta_0 &= \beta(T_1 - T_0), \quad \delta^0 = \frac{\tau_0^2 \beta h^2}{\mu_0 \lambda}, \quad h = \frac{R_0 - R_1}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

В параметре диссипации δ^0 в качестве характерного размера взята половина зазора между цилиндрами. При таком выборе характерного размера следует ожидать, что при $d \rightarrow 1$ рассматриваемая ситуация сведется к случаю куэттовского движения между параллельными пластинами. Уравнения энергии и движения в безразмерной форме записываются в виде

$$\frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\Theta}{d\xi} + \frac{4\delta^0}{\xi^4 (1-d)^2} e^\Theta - \Omega, \quad \frac{d\Omega}{d\xi} = e^\Theta / \xi^3 \quad (30)$$

и решаются при граничных условиях

$$\begin{aligned} \xi = d: \quad \Theta &= \Theta_0, \quad \Omega = 0, \\ \xi = 1: \quad \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассматриваемую задачу заменой функции и переменной

$$\Theta = u + 2 \ln \xi, \quad \eta = 1 - 2 \ln \xi / \ln d$$

можно свести к задаче о куэттовском течении жидкости при заданном напряжении на пластине. В новых переменных система (30) и граничные условия (31) переписутся:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \delta e^u = 0, \quad \frac{d\Omega}{d\eta} = -\frac{\ln d}{2} e^u, \quad (32)$$

$$\eta = -1: u = u_0, \quad \Omega = 0, \quad (33)$$

$$\eta = 1: u = 0,$$

$$\delta = \delta^0 \ln^2 d / (1-d)^2, \quad u_0 = \Theta_0 - 2 \ln d.$$

Из сравнения (32), (33) с (5), (6) видно, что для рассматриваемой термогидродинамической задачи уравнение для функции u и граничные условия для него точно такие, как для воспламенения кольцевого слоя с термостатированными при разных температурах поверхностями или несимметричного воспламенения плоского слоя. Существует критическое значение параметра δ (касательного напряжения на поверхности вращающегося цилиндра или крутящего момента), выше которого стационарного решения нет, происходит прогрессивное накопление тепла и увеличение угловой скорости вращения цилиндра, приводящее к гидродинамическому тепловому взрыву. Профиль температур в подкритическом режиме определяется по формуле

$$\Theta(\xi) = \ln \frac{a\xi^2}{\operatorname{ch}^2 [b + (a\delta/2)^{1/2} \ln(d/\xi^2)/\ln d]}.$$

О том, как находятся постоянные интегрирования и $\delta_{кр}$ при использовании вспомогательной функции u , сказано выше.

Определим профиль угловых скоростей. Подставим u из (8) в (32) и проинтегрируем с учетом граничного условия (33). Возвращаясь в полученном после интегрирования выражении к прежним переменным, имеем

$$\Omega(\xi) = \ln d (a/2\delta)^{1/2} \{ \operatorname{th} [b - (a\delta/2)^{1/2}] - \operatorname{th} [b + (a\delta/2)^{1/2} \ln(d/\xi^2)/\ln d] \}.$$

На рис. 2, а изображены критические профили температур, причем по оси абсцисс отложено расстояние от внутреннего цилиндра, отнесенное к зазору между цилиндрами. В отличие от куэттовского течения профиль температур несимметричный, с уменьшением d точка максимума температуры смещается в сторону внутреннего цилиндра тем

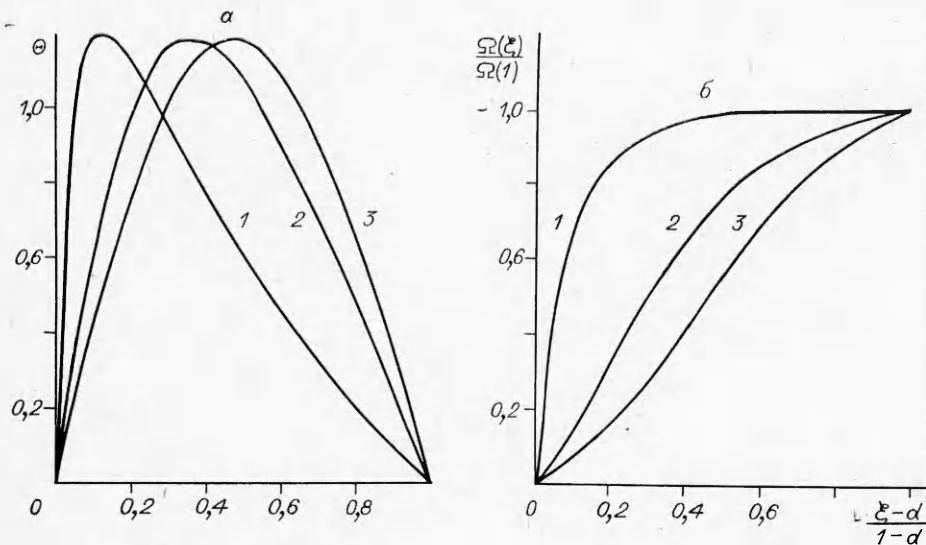


Рис. 2. Критические профили температур (а) и угловых скоростей (б).
 d : 1 — 0,1, 2 — 0,5, 3 — 0,9.

сильнее, чем меньше отношение радиусов d . Следует подчеркнуть, что предвзрывной разогрев слабо зависит от d и близок к значению $\Theta_m = 1,187$ для куэттовского течения. При уменьшении d предвзрывной разогрев слегка возрастает: превышение над Θ_m для куэттовского течения составляет 0,1 и менее 1% при $d = 0,5$ и $0,2$ соответственно.

Профили угловых скоростей, соответствующие этим профилям температур, приведены на рис. 2, б. Из (26) видно, что при заданном значении τ_0 на внешнем цилиндре напряжение на внутреннем обратно пропорционально d^2 . Согласно (28), при малых d вблизи внутреннего цилиндра резко возрастают сдвиговые деформации и интенсивность механических источников тепла. Последнее приводит к тому, что тепло от диссипации в основном выделяется в сравнительно узкой зоне вблизи поверхности внутреннего цилиндра, где температура повышается, вязкость падает, что способствует еще большему увеличению градиента скорости. В результате при малых d в критических условиях сдвиговой деформацией охвачена сравнительно небольшая часть вблизи внутреннего цилиндра, остальная часть вращается с внешним цилиндром почти как твердое тело. Так, при $d = 0,1$ угловая скорость частиц жидкости, находящихся на середине зазора между цилиндрами, отличается от угловой скорости вращения цилиндра всего на 1,5%. При дальнейшем уменьшении d этот эффект еще более усиливается.

Для целей вискозиметрии интерес представляет случай теплоизолированного внутреннего цилиндра. Решение для этого случая можно получить из задачи для двух термостатированных цилиндров, считая неизвестной температуру внутреннего цилиндра Θ_0 и определяя ее из условия равенства нулю градиента температуры на поверхности внутреннего цилиндра. В подкритическом режиме постоянную a удастся явно выразить через Θ_0 , и задача сводится к решению трансцендентного уравнения относительно Θ_0 . Однако при таком подходе вопрос об определении критических условий гидродинамического теплового взрыва осложняется тем обстоятельством, что не удастся получить зависимость параметра δ от постоянной интегрирования в явном виде.

Определить критические условия гидродинамического теплового взрыва для теплоизолированного внутреннего цилиндра можно, если для системы уравнений (30) использовать граничные условия

$$\begin{aligned} \xi = d: \quad \frac{d\Theta}{d\xi} &= 0, \\ \xi = 1: \quad \Theta &= 0 \end{aligned}$$

и другую замену переменной. В (30) сделаем замены $\Theta = u + 2 \ln \xi$, $\eta = \ln \xi - \ln d$ и получим

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \delta e^u = 0, \quad \frac{d\Omega}{d\eta} = e^u, \quad (34)$$

где δ через δ^0 выражается по (16).

Запишем решение системы (34) после перехода к первоначальным переменным

$$\begin{aligned} \Theta(\xi) &= \ln \frac{a \xi^2}{\text{ch}^2 [b + (a\delta/2)^{1/2} \ln(\xi/d)]^2} \\ \Omega(\xi) &= (2a/\delta)^{1/2} \{ \text{th} [b + (a\delta/2)^{1/2} \ln(\xi/d)] - \text{th} b \}. \end{aligned}$$

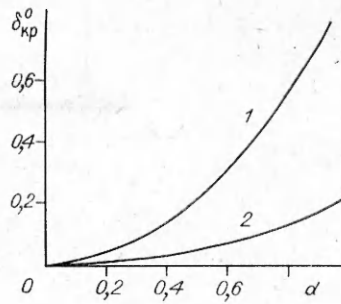
Постоянные интегрирования a и b находятся аналогично тому, как это делалось при решении задач воспламенения цилиндрического слоя для одного теплоизолированного цилиндра. И окончательно

$$(\delta/2)^{1/2} = \text{cth} b / \text{ch} (b - \ln d \cdot \text{cth} b), \quad a = \text{ch}^2 (b - \ln d \cdot \text{cth} b). \quad (35)$$

В подкритическом режиме из первого трансцендентного уравнения находится δ , из второго — a . Сравнивая (35) с (21), видим, что зависимость $\delta(b)$ отличается от аналогичной для теплового воспламенения цилинд-

Рис. 3. Зависимость $\delta_{кр}^0(d)$.

1 — цилиндры термостатированы при одинаковой температуре; 2 — внутренний цилиндр теплоизолирован, внешний термостатирован.



рического слоя при теплоизолированном внешнем цилиндре постоянным множителем. Поэтому значение b_0 , при котором достигается $\delta_{кр}$, можно найти из (22), а

$$\delta_{кр} = 2 \operatorname{cth}^2 b_0 / \operatorname{ch}^2 (b_0 - \ln d \cdot \operatorname{cth} b_0). \quad (36)$$

Рассмотрим случай теплоизолированного внешнего цилиндра. Если сделать замену $\Theta = u + 2 \ln \xi$, $\eta = \ln \xi$, получим ту же систему (34), которая решается так:

$$\Theta(\xi) = \ln \frac{a \xi^2}{\operatorname{ch}^2 [b - (a\delta/2)^{1/2} \ln \xi]},$$

$$\Omega(\xi) = (2a/\delta)^{1/2} \{ \operatorname{th} [b - (a\delta/2)^{1/2} \ln d] - \operatorname{th} [b - (a\delta/2)^{1/2} \ln \xi] \},$$

$$(\delta/2)^{1/2} = d \operatorname{cth} b / \operatorname{ch} (b + \ln d \cdot \operatorname{cth} b), \quad a = d^{-2} \operatorname{ch}^2 (b + \ln d \cdot \operatorname{cth} b). \quad (37)$$

Из сравнения (37) с (17) видно, что значение b_0 можно определить из трансцендентного уравнения (18), а

$$\delta_{кр} = 2d^2 \operatorname{cth}^2 b_0 / \operatorname{ch}^2 (b_0 + \ln d \cdot \operatorname{cth} b_0). \quad (38)$$

Из сравнения (19) с (38) и (23) с (36) вытекает интересная связь между $\delta_{кр}$ при гидродинамическом тепловом взрыве и тепловым взрыве химического происхождения

$$\delta_{кр}^1 = d^2 \delta_{кр}^x. \quad (39)$$

Одна существенная деталь: если используется гидродинамическое значение $\delta_{кр}$ для теплоизолированного внутреннего цилиндра, то $\delta_{кр}$ теплового воспламенения нужно брать для теплоизолированного внешнего цилиндра, и наоборот. Поскольку δ во всех четырех случаях выражается одинаково через фигурирующие в постановках задач δ^0 , то эта же зависимость (39) справедлива, если в ней $\delta_{кр}$ заменить на $\delta_{кр}^0$.

На рис. 3 изображены зависимости $\delta_{кр}^0$ от отношения радиусов d . У обеих кривых прослеживаются два предельных случая при $d \rightarrow 1$ и $d \rightarrow 0$, $\delta_{кр}^0 = 0,878$ и $0,2196$ соответственно. Как и следовало ожидать, при $d \rightarrow 1$ переходим к куэттовскому течению между параллельными пластинами. В случае термостатированных цилиндров $\delta_{кр}^0$ определялось по (7), где $\delta_{кр}$ вычислялось по (13), для теплоизолированного внутреннего цилиндра $\delta_{кр}$ вычислялось по формуле (36). После обработки результатов расчетов получены простые эмпирические формулы, с хорошей точностью аппроксимирующие зависимость $\delta_{кр}^0(d)$. В случае двух термостатированных при одинаковой температуре цилиндров эта зависимость имеет вид $\delta_{кр}^0 = 0,888d^2 - 0,01d$. При вычислении $\delta_{кр}^0$ по этой формуле в диапазоне $0,1 \leq d \leq 0,45$ относительная ошибка не превышает 1%, а в диапазоне $0,45 \leq d < 1$ 0,2%.

Для внутреннего теплоизолированного цилиндра зависимость $\delta_{кр}^0(d)$ можно аппроксимировать выражением

$$\delta_{кр}^0 = 0,2196d^2 [0,1(1-d) + d^{1/2}].$$

Относительная ошибка в диапазоне $0,15 \leq d < 1$ не превышает 0,2%.

При $d \rightarrow 0$ $\delta_{кр}^0 \rightarrow 0$. Это связано с тем, что при малых d основное тепловыделение происходит вблизи внутреннего цилиндра, откуда затруднен теплоотвод из-за малой площади теплоотдачи. При любом сколь угодно малом фиксированном значении напряжения на внешнем цилиндре при $d \rightarrow 0$ напряжение на внутреннем возрастает и может стать сколь угодно большим. Это в сочетании с резким повышением темпе-

ратуры вблизи внутреннего цилиндра приводит к тому, что практически все сдвиговое течение происходит в малой окрестности вблизи внутреннего цилиндра, где и созревают условия гидродинамического теплового взрыва. Эта ситуация практического интереса не представляет. С практической точки зрения более интересен предел $d \rightarrow 1$, что соответствует ненагруженному подшипнику при малой толщине смазочного слоя, а также модели коаксиально-цилиндрического вискозиметра. Выше отмечалось, что при этом $\delta_{кр}$ стремится к соответствующему значению для плоского слоя. Из (29) находим

$$\tau_{кр} = (\mu_0 \lambda \delta_{кр}^0 / h^2 \beta)^{1/2},$$

откуда видно, что при $d \rightarrow 1$ ($h \rightarrow 0$) критическое значение напряжения на цилиндре стремится к бесконечности. Чем меньше смазочный слой, тем труднее достигаются условия гидродинамического теплового взрыва.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о том, что в случае сильной нелинейной зависимости вязкости от температуры благодаря диссипации энергии могут существовать критические условия теплового режима течения жидкости. Наличие сильной нелинейной зависимости вязкости от температуры еще не является достаточным условием существования гидродинамического теплового взрыва. Существование критических условий еще зависит от постановки задачи, от того, что фиксируется в ее условии. При фиксировании динамических факторов — напряжения на пластине, крутящего момента, градиента давления в паузейлевском течении [3] — критические условия теплового режима течения существуют. Если же фиксируются кинематические факторы — скорость пластины, угловая скорость вращения цилиндра, расход — критических условий нет, стационарные решения существуют при всех значениях этих параметров. В работе [5] авторы обращают внимание на принципиальное различие между постановками задачи с заданием постоянных скорости границы и напряжения с точки зрения наличия критических условий. Рассматривая в нестационарной постановке с осреднением температуры по зазору куэттовское течение и течение между вращающимися цилиндрами, авторы показали, что при фиксировании напряжения на подвижной границе критические условия существуют, а при фиксировании скорости подвижной границы критических условий нет. Экспериментально гидродинамический тепловой взрыв реализован в работе [6].

* *
*

1. Исследованы критические условия теплового воспламенения кольцевого слоя при произвольном перепаде температур на поверхностях цилиндров, а также при одной термостатированной и другой теплоизолированной поверхностях. Получены трансцендентные уравнения, определяющие критическое значение параметра Франк-Каменецкого.

2. При тех же температурных граничных условиях рассмотрено диссипативное течение между двумя вращающимися цилиндрами вязкой жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры при задании значения касательного напряжения на поверхности вращающегося цилиндра. Установлена аналогия между тепловым воспламенением кольцевого слоя и диссипативным течением жидкости между двумя вращающимися цилиндрами.

3. В случае одной теплоизолированной поверхности аналогия существует между воспламенением кольцевого слоя с внутренним теплоизолированным цилиндром и диссипативным течением при внешнем теплоизолированном цилиндре, и наоборот.

4. Для этих случаев существует простая связь между критическими значениями параметра Франк-Каменецкого гидродинамического теплового взрыва и теплового взрыва химического происхождения (39).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин А. М. ПМТФ, 1962, 5, 75.
2. Гришин А. М. ПМТФ, 1963, 2, 175.
3. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Докл. АН СССР, 1965, 163, 1, 133.
4. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1967.
5. Мержанов А. Г., Столин А. М. Докл. АН СССР, 1971, 198, 6, 1291.
6. Мержанов А. Г., Посецельский А. П., Столин А. М. и др. Докл. АН СССР, 1973, 210, 1, 52.

Поступила в редакцию 10/X 1986,
после доработки — 26/III 1987

ВОСПЛАМЕНЕНИЕ И ГОРЕНИЕ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА В КИСЛОРОДЕ

Ю. В. Фролов, А. Н. Пивкина, В. В. Гусельников
(Москва)

Процессы горения металлов давно привлекают внимание исследователей как с научной, так и с практической точки зрения [1—4]. Экспериментальные методы различаются в основном по виду энергии, используемой для нагрева образца: газовые горелки, модельные камеры сгорания, нагрев электрическим током и акустическим ударом, абразивный и лазерный нагревы и т. д. Общая постановка экспериментов во всех случаях практически неизменна: источник нагревает образец (чаще всего — в виде проволоочки) до температуры воспламенения в статистической или динамической агрессивной среде (воздух, кислород и т. п.). Изучаются характеристики воспламенения (температура, давление, критический диаметр образца и т. д.), скорость горения и ее зависимость от «внешних» параметров (давление, диаметр образца и его ориентация в пространстве, состояние поверхности).

В работах [3, 4] собраны данные по исследованию процесса возгорания Fe, Cu, Pb, Zn, Ni, Al, Mo, Co, Ti, Be и ряда других металлов и сплавов на их основе. Установлено, что зависимость температуры воспламенения T_v от давления при $p \leq 150$ атм, как правило, имеет нелинейный характер: при возрастании p T_v снижается, а затем при $p > 150$ атм остается практически неизменной.

В работе [5] экспериментально изучена T_v образцов из жаропрочных сплавов промышленных марок с повышенным содержанием никеля (в кислороде). Получено линейное уменьшение T_v от p (при $p \leq 120$ атм). Образцы нагревались параллельно с нагружением растягивающей силой, приложенной к концам образца. В работе не выяснена причина столь резкого падения T_v при увеличении давления — специфика постановки эксперимента или физико-химическая природа сплава.

В данной работе экспериментально изучаются процессы воспламенения и горения аналогичных жаропрочных сплавов ХН73МВТЮ и ХН67МВТЮ [6] в газообразном кислороде в условиях омического нагрева без приложения растягивающей нагрузки. Образцы в виде проволочек с $d = 1,2 \div 3$ мм, установленные в приборе постоянного давления, нагревались проходящим через них электрическим током промышленной частоты. Температура поверхности образца фиксировалась термомпарами с диаметром спая 100 мкм. Кинесъемка велась скоростной камерой ККС-М с частотой кадров 1000—1500 кадр/с. Давление кислорода $p = 1 \div 130$ атм.

В исходном состоянии образец покрыт окисной оболочкой. Время прогрева образца до воспламенения $\tau_{пр}$ регулировалось величиной подаваемого тока, определяющей тепловое состояние образца. В результате исследований выделены характерные картины воспламенения: