

**УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
ПРИ ПРОГРАММНОМ ИЗМЕНЕНИИ ОСЕВОЙ СЖИМАЮЩЕЙ  
НАГРУЗКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

*Л. М. Куршин, В. Т. Щербаков*

(Новосибирск)

Рассматривается устойчивость цилиндрических оболочек с начальными прогибами при ползучести с программным нагружением. Приводятся данные экспериментального исследования устойчивости оболочек при ползучести, которые сравниваются с результатами расчета.

Большинство оболочек, применяемых в конструкциях летательных аппаратов, работают в условиях ползучести с переменными нагрузками и температурами нагрева. В данной работе проводится расчет устойчивости цилиндрической оболочки с начальными прогибами с изменяемой осевой нагрузкой при постоянной температуре нагрева. Рассматриваются простейшие программы изменения сжимающих усилий (фиг. 1). Приводятся результаты экспериментального исследования устойчивости цилиндрических оболочек при ползучести с программным нагружением.

Вывод уравнений возмущенного движения оболочки, работающей в условиях ползучести с начальным прогибом при постоянной интенсивности напряжений основного состояния, дается в [1]. При этом используются линеаризованные физические соотношения и учитывается геометрическая нелинейность. Аналогично [1] в данной работе записываются уравнения деформирования оболочки, но с переменной интенсивностью напряжений основного состояния.

Пусть уравнение при ползучести имеет вид

$$(1) \quad \dot{p}_i = g(p_i, \sigma_i) \sigma_i$$

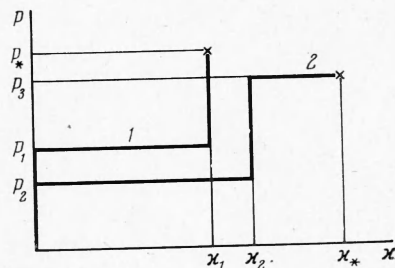
где  $\dot{p}_i$  и  $\sigma_i$  — интенсивности скоростей деформации ползучести и напряжений, и между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести  $\dot{p}_{ij}$  и девиатора напряжений  $\sigma_{ij}^{**}$  имеют место соотношения типа теории течения

$$(2) \quad \dot{p}_{ij} = (3/2) g(p_i, \sigma_i) \sigma_{ij}^{**}, \quad p_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/2 G^{-1}) \sigma_{ij}^{**}$$

Полагаем, что напряженное состояние оболочки складывается из основного безмоментного и некоторого возмущенного состояний

$$(3) \quad \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}(t), \quad \dot{p}_{ij}(t) = \dot{p}_{ij} + \delta\dot{p}_{ij}(t)$$

В процессе ползучести происходит перераспределение напряжений и перемещений. Считаем, что добавки за счет возмущений малы и для вел-



Фиг. 1

чин, характеризующих отклонение от основного состояния, справедливы линеаризованные соотношения [2]

$$(4) \quad \delta \dot{p}_i = \sigma_i \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial p_i} \delta p_i + \sigma_i \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \sigma_i} \delta \sigma_i + g \delta \sigma_i$$

$$\delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{2G} \delta \sigma_{ij}^{**} = \frac{3}{2} g \delta \sigma_{ij}^{**} + \frac{3}{2} \sigma_{ij}^{**} \left( \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \sigma_i} \delta \sigma_i + \frac{\partial g}{\partial p_i} \delta p_i \right)$$

Интегрируя уравнения (4) с учетом переменного  $\sigma_i$ , записывая деформации пологой оболочки, связанные с отклонением от основного состояния, моменты и дополнительные усилия в срединной поверхности и проводя преобразования, аналогичные [1], получаем систему уравнений, описывающих поведение оболочек при ползучести

$$(5) \quad \Delta \Delta \Phi + e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} S (\Lambda_1 \Lambda_1 \Phi) d\kappa - B [\Gamma (w, w_0) - e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} \Gamma (w, w_0) d\kappa] = 0$$

$$U (w, w_0, \Phi) + e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} D \Delta \Delta (w - w_0) d\kappa - e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} S \left( -U (w, w_0, \Phi) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} D \Delta \Delta (w - w_0) - e^{-\kappa} \int_0^{\kappa} e^{\kappa} D \left( \Delta \Delta - \frac{3}{4} \Lambda \Lambda \right) (w - w_0) d\kappa \right) d\kappa = 0$$

В уравнениях (5) через  $\Phi$ ,  $w$ ,  $w_0$  обозначены функции напряжений, прогиба и начального прогиба,  $D$  — цилиндрическая жесткость оболочки. Операторы  $\Delta$ ,  $\Lambda$ ,  $\Lambda_1$ ,  $U$ ,  $\Gamma$  имеют вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Lambda = \alpha_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \alpha_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Lambda_1 = \alpha_{11} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \alpha_{22} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 3\alpha_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

$$U (w, w_0, \Phi) = -D \Delta \Delta (w - w_0) - \frac{1}{R_1} (N_{11}^0 + \Phi_{yy}) -$$

$$- \frac{1}{R_2} (N_{22}^0 + \Phi_{xx}) + \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\Phi_{xy} w_{xy} + 2h\sigma_i \Lambda w + q$$

$$\Gamma (w, w_0) = \left( \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (w - w_0) + w_{xy}^2 - w_{xy}^{02} -$$

$$- w_{xx} w_{yy} + w_{xx}^0 w_{yy}^0$$

Уравнения (5) совпадают с уравнениями работы [1], но безразмерный параметр, связанный с деформацией ползучести, имеет другой вид

$$\kappa = \int_0^{\kappa} (E / \sigma_i) dp_i$$

В частном случае при  $\sigma_i = \text{const}$  имеем  $\kappa = (E / \sigma_i) p_i = \xi$ .

В случае осевого сжатия цилиндрической оболочки толщиной  $2h$  имеем

$$(6) \quad \sigma_{11} = -\sigma, \quad \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_i = \sigma, \quad \alpha_{11} = -1, \quad \alpha_{12} = \alpha_{22} = 0$$

$$R_1 = \infty, \quad R_2 = R, \quad N_{11} = -2\sigma h, \quad N_{12} = N_{22} = 0$$

Для закона ползучести (1) при

$$(7) \quad g = A \sigma_i^{n-1}$$

величины  $a$ ,  $b$ ,  $S(\varphi)$  равны

$$(8) \quad a = 0, \quad b = n - 1, \quad S(\varphi) = (n - 1) \varphi$$

Уравнения (5) с учетом (6)—(8) принимают вид

$$(9) \quad \Delta \Delta \Phi + e^{-x} \int_0^{x^*} e^x (n-1) \Lambda_1 \Lambda_1 \Phi dx - B \left[ \Gamma(w, w_0) - e^{-x} \int_0^{x^*} e^x \Gamma(w, w_0) dx \right] = 0$$

$$U(w, w_0, \Phi) = e^{-x} \int_0^{x^*} e^x D \left( \Delta \Delta - \frac{3}{4} \Lambda \Lambda \right) (w - w_0) dx - \frac{3n}{4} D e^{-nx} \int_0^{x^*} e^{nx} \Lambda \Lambda (w - w_0) dx$$

Упругое состояние оболочки с начальным прогибом  $w_0$  описывается нелинейными уравнениями

$$(10) \quad -D \Delta \Delta (w - w_0) - \frac{1}{R} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\Phi_{xy} w_{xy} = 0$$

$$\frac{1}{B} \Delta \Delta \Phi = \frac{1}{R} (w - w_0)_{xx} + w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - [w_{xy}^{02} - w_{xx}^0 w_{yy}^0]$$

$$B = 2Eh$$

Приближенное решение уравнений (10) при задании начального прогиба в виде

$$(11) \quad w_0 = f_1^0 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + f_2^0 \cos \alpha x$$

и разыскании решения в виде

$$(12) \quad w = f_1 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + f_2 \cos \alpha x + f_3$$

приводится к уравнениям для амплитуд прогибов  $[\zeta_1 = f_1 / 2h$  и  $\zeta_2 = f_2 / 2h$ , которые являются начальными условиями для решения задачи ползучести оболочек с начальными прогибами  $\zeta_1^0, \zeta_2^0$ .

Решение уравнений (9) разыскиваем в виде

$$(13) \quad w = \varphi_1(x) f_1 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + \varphi_2(x) f_2 \cos \alpha x + \varphi_3(x) f_3$$

$$\Phi = \Psi_1(x) C_1 \cos \alpha x + \Psi_2(x) C_2 \cos \frac{2my}{R} + \Psi_3(x) C_3 \sin \frac{\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R} + \Psi_4(x) C_4 \sin \frac{3\alpha x}{2} \sin \frac{my}{R}$$

Интегрируя по координатам  $x$  и  $y$  по Бубнову — Галеркину, получаем систему нелинейных интегральных уравнений, связанных с переменной  $\kappa$

$$(14) \quad a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + a_3 = 0, \quad b_1 \varphi_1 + b_2 \varphi_2 + b_3 = 0$$

Решив уравнения относительно линейных частей прогибов при ползучести  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , получаем систему

$$(15) \quad \varphi_1 = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_1}{a_1 b_1 - a_2 b_2}, \quad \varphi_2 = \frac{a_3 b_2 - a_1 b_3}{a_1 b_1 - a_2 b_2}$$

$$a_1 = \zeta_1 [g_1 - (4/3) p - (\eta/4) g_2 \zeta_1^{02} + (1/v^2) \zeta_2^0]$$

$$a_2 = [(4 \zeta_1^0 \zeta_2) / (v^2)] g_3$$

$$a_3 = -\zeta_1^0 [g_1 - (4/v^2 \lambda_1^2) \zeta_2^0] - (1/v^2) g_4 \varphi_1 \varphi_2 \zeta_1 \zeta_2 + (\eta/4) \times$$

$$\times g_2 \varphi_1^3 \zeta_1^3 + (16\eta/v^2) g_5 \varphi_1 \varphi_2^2 \zeta_1 \zeta_2^2 - (k_2/4) g_8 \varphi_1 \zeta_1 J_{22} + (2k_3/v^2 \lambda_1^2) [2\varphi_2 \zeta_2 - (1/2\eta)] g_5 + (k_4/v^2) g_6 \varphi_1 \zeta_1 - [(16k_5\eta) /$$

$$\begin{aligned}
& / (81 v^2 \lambda_2^2) \varphi_2 \zeta_2 J_{54} - (g_8 / 3) [(4/3) \lambda_1^2 - 1] J_{13} - (n / 3) g_8 J_{23} \\
b_1 &= \zeta_2 [g_7 - (16/3) p], \quad b_2 = (2 \zeta_1^0 \zeta_1 g_2) / v^2 \\
b_3 &= -g_7 / \zeta_2^0 + (1 / 4v^2) \zeta_1^{02} - (g_4 \varphi_1^2 \zeta_1^2) / (4v^2) + (8\eta g_9 \times \\
& \times \varphi_1^2 \varphi_2 \zeta_1^2 \zeta_2) v^2 - (16/9) g_8 (J_{11} + 3nJ_{21}) + (2k_3 / v^2 \lambda_1^2) \times \\
& \times (J_{33} - 4\eta J_{34}) \varphi_1 \zeta_1 - (k_4 / g_8) g_6 - (8\eta k_5 / 81 v^2 \lambda_2^2) \varphi_1 \zeta_1 J_{54} \\
g_1 &= (4/9) v^2 \eta \lambda_1^2 + 1 / (v^2 \eta \lambda_1^2), \quad g_2 = v^2 + 1 / v^2, \quad g_3 = 1 / \\
& / \lambda_1^2 - 4\eta \zeta_2^0 X, \quad g_4 = 1 + 8 / \lambda_1^2, \quad g_5 = J_{33} - 4\eta J_{34}, \quad g_6 = J_{41} - \\
& - (\eta / 4) J_{42}, \quad g_7 = (64 / 9) v^2 \eta + 1 / (v^2 \eta), \quad g_8 = v^2 \eta, \quad g_9 = 1 / \\
& / \lambda_1^2 + 1 / (81 \lambda_2^2) \quad \lambda_1 = (1 + v^2) / v^2, \quad \lambda_2 = (1 + 9v^2) / (9v^2)
\end{aligned}$$

В выражениях  $a_i$ ,  $b_i$  введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
J_{ij} &= e^{-k_i x} \int_0^{x^*} e^{k_i x} H_j(x) dx \\
H_1 &= \varphi_2 \zeta_2 - \zeta_2^0, \quad H_2 = \varphi_1^2 \zeta_1^2 - \zeta_1^{02} \\
H_3 &= \varphi_1 \zeta_1 - \zeta_1^0, \quad H_4 = \varphi_1 \varphi_2 \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1^0 \zeta_2^0 \\
k_1 &= -1, \quad k_2 = n, \quad k_3 = 1 + (n-1) (v^2 / 2 - 1)^2 / (v^2 + 1)^2 \\
k_4 &= (n+3) / 4, \quad k_5 = 1 + (n-1) (9v^2 / 2 - 1)^2 / (9v^2 + 1)^2 \\
v &= (\alpha R) / (2m), \quad \eta = (3/8) \beta^{*2}, \quad p = (3R\sigma) / (4Eh)
\end{aligned}$$

Продифференцируем систему (14) по  $p$

$$(16) \quad \frac{\partial a_1}{\partial p} \varphi_1 + \frac{\partial a_2}{\partial p} \varphi_2 + \frac{\partial a_3}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial b_2}{\partial p} \varphi_1 + \frac{\partial b_1}{\partial p} \varphi_2 + \frac{\partial b_3}{\partial p} = 0$$

Составляем определитель системы

$$\begin{aligned}
(17) \quad M &= [(a_1 / \zeta_1 + T_2) (b_1 / \zeta_2 + T_3) - 2 (a_2 / \zeta_2 + T_1)^2] \varphi_1 \varphi_2 \\
T_1 &= - (1 / 2v^2) g_4 \varphi_1 \zeta_1 + (16 / v^2) \eta \varphi_1 \varphi_2 \zeta_1 \zeta_2 X + (2 / \lambda_1^2) \times \\
& \times g_5 k_3 - (8\eta k_5 / 81 v^2 \lambda_2^2) J_{54} \\
T_2 &= - (1 / v^2) g_4 \varphi_2 \zeta_2 + (3/4) \eta g_2 \varphi_1^2 \zeta_1^2 + (16 / v^2) \eta \varphi_2^2 \zeta_2^2 \times \\
& \times g_9 - (k_2 / 4) g_8 J_{22} + (k_4 / v^2) g_6 \\
T_3 &= (8 / v^2) \eta g_9 \varphi_1^2 \zeta_1^2
\end{aligned}$$

Критическое время  $\kappa$  находится из условия равенства нулю или минимума величины  $M$ .

По уравнениям (15) проводился расчет оболочки при ползучести для двух случаев изменения осевой сжимающей нагрузки. На фиг. 2 представлены зависимости прогибов при ползучести, рассчитанные для значений начальных прогибов  $\zeta_0 = 3\zeta_2^0 = 0.2$ ,  $\zeta_{0k} = 3\zeta_1^0 = 0.05$ .

В трехмерной системе координат  $\varphi_i$ ,  $\kappa$ ,  $p$  (фиг. 2) кривые  $abcd$ ,  $abcf$  соответствуют несимметричным прогибам  $\varphi_1$  и  $abce$ ,  $abchm$  — симметричным прогибам  $\varphi_2$  при ползучести соответственно для двух значений параметра  $\kappa_1$ , характеризующего время выдержки оболочки под постоянной нагрузкой ( $\kappa_1 = 0.4$ ,  $\kappa_1 = 0.8$ ). Прямая  $ab$  соответствует упругому нагружению оболочки сжимающими напряжениями  $p = 0.3$ . Кривые  $bc$ ,  $bcf$  и  $bc$ ,  $bch$  соответствуют возрастанию несимметричного  $\varphi_1$  и симметричного  $\varphi_2$  прогибов при постоянной сжимающей нагрузке  $p = 0.3$ , кривые  $cd$ ,  $fg$  и  $ce$ ,  $hm$  — росту  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  при мгновенном догружении оболочки сжимающими напряжениями до потери устойчивости. Для программы I (фиг. 1) результаты расчета критических значений нагрузки  $p_*$  при задании различных значений параметра  $\kappa_1$  представлены на фиг. 3.

Расчеты по уравнениям (15), (17) проводились на ЭЦВМ для значений начальных прогибов  $\zeta_0 = 0.2$ ,  $\zeta_{0k} = 0.05$ . Кривая 2 соответствует случаю

$p_1 = 0.224$ , кривая 3 — случаю  $p_1 = 0.3$ . Величина  $p_1$  связана с уровнем постоянных напряжений, при которых накапливалась деформация ползучести оболочек (фиг. 1). Значения полной критической деформации  $\varepsilon$  определялись по формуле

$$\varepsilon = p_* + \kappa_1 p_1$$

Рассматривая результаты расчета критических деформаций оболочек в условиях ползучести, представленных на фиг. 3 кривыми 2 и 3, можно заметить, что для разрушения оболочки в зависимости от величины предварительной деформации ползучести требуется различная дополнительная мгновенная догрузка. Величина этой догрузки заметно уменьшается только при значительной величине накопленной деформации ползучести.

Отметим также, что кривая 2 (или 3), соответствующая критическим параметрам  $p$ ,  $\varepsilon$  в случае программы с догрузкой (программа I, фиг. 1), лежит выше кривой I, соответствующей критическим параметрам при ползучести с постоянными сжимающими усилиями. Таким образом, при разрушении с догрузкой критическая деформация больше (точка а), чем при разрушении в условиях ползучести с постоянной нагрузкой, равной по величине критической сжимающей нагрузке, которую выдерживают оболочки при разрушении с догрузкой (точка б).

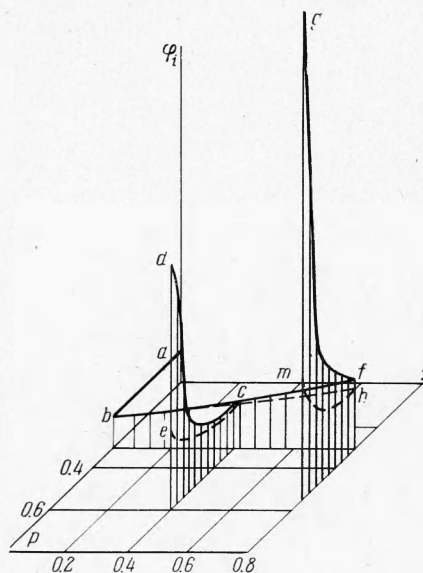
Расчеты критических деформаций проводились также для программ нагружения типа программы 2 (фиг. 1). Ниже даны результаты расчета критических значений  $\kappa_*$  при заданных значениях сжимающих нагрузок  $p_2 = 0.244$ ,  $p_3 = 0.375$  и различных фиксированных значениях  $\kappa_2$ .

$\kappa_2$	0.20	0.30	0.37	0.40	0.60	0.70	0.75	0.78
$\kappa_*$	0.47	0.53	0.56	0.59	0.70	0.76	0.80	0.82

Представляет интерес сопоставление результатов данной работы с данными экспериментального исследования устойчивости оболочек в условиях ползучести при программном нагружении. Для выполнения расчета необходимо задание значений начальных прогибов оболочек. Для этого использовалась методика, предложенная в [3, 4].

При программном нагружении в условиях ползучести были испытаны четыре оболочки, точеные из материала Д16Т, при  $T = 250^\circ \text{C}$  (радиус  $R = 88 \text{ мм}$ , толщина  $2h = 0.5 \text{ мм}$ , длина  $l = 425 \text{ мм}$ ). В эксперименте измерялись время, нагрузка и сближение торцов оболочки (для определения осевой деформации ползучести). Была реализована программа изменения осевой нагрузки типа I.

После нагрева до заданной температуры оболочка нагружалась до значения  $p = 0.32$ , при котором выдерживалась до накопления некоторой величины деформации ползучести, затем быстро нагружалась осевой силой до разрушения. Оболочки теряли устойчивость «хлопком» с образованием поясов ромбических вмятин по окружности. Результаты испытаний пока-



Фиг. 2

