УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПРЯМОГО ПЬЕЗОЭФФЕКТА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ЦИЛИНДРА

Д. А. Шляхин

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 443001 Самара
E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

Рассматривается нестационарная задача электроупругости для длинного анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра, на радиальных поверхностях которого действуют нормальные напряжения, являющиеся произвольными функциями времени. Методом разложения по собственным вектор-функциям построено замкнутое решение, позволяющее определять частоты собственных колебаний, напряженно-деформированное состояние элемента, а также потенциал и напряженность индуцируемого электрического поля.

Ключевые слова: связанная задача прямого пьезоэффекта, длинный цилиндр, осесимметричная динамическая нагрузка.

Введение. При исследовании динамических задач электроупругости для полого анизотропного радиально поляризованного цилиндра требуется интегрирование сложной системы уравнений в частных производных, поэтому решения таких задач получены в основном при установившемся режиме вынужденных колебаний приближенными методами [1] или методом разложения по собственным вектор-функциям для некоторых одномерных элементов [2, 3]. При указанной выше поляризации точные решения для конечного неоднородного цилиндра построены в задачах на собственные значения [2, 3].

В настоящей работе построено точное замкнутое решение задачи электроупругости для длинного пьезокерамического анизотропного цилиндра при произвольном нестационарном осесимметричном воздействии.

1. Постановка задачи. Пусть полый длинный цилиндр, представляющий собой линейно-упругое анизотропное тело, изготовлен из пьезокерамического материала с наведенной поляризацией вдоль радиуса r_*. Рассматривается случай, когда на электродированных незакрепленных криволинейных поверхностях $r_* = a$, $r_* = b$ действует динамическая нагрузка (нормальные напряжения) $q_1^*(t_*)$, $q_2^*(t_*)$. При этом внешняя радиальная поверхность подключена к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму “холостого хода” (отсутствию свободных электрических зарядов), а внутренняя поверхность заземлена.

Рассматриваемая в данной постановке краевая задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого пьезоэффекта, трансформирующих механическое воздействие в соответствующий электрический сигнал.

Система дифференциальных уравнений, граничные и начальные условия рассматриваемой динамической задачи теории электроупругости в безразмерных переменных имеют вид [1, 2]

$$\nabla^2 U - \frac{C_{11}}{C_{33}}\frac{U}{r^2} + e_{33}\nabla^2\varphi - e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$
$$C_{33}\varepsilon_{33}\nabla^2\varphi - e_{33}\nabla^2 U - e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} = 0; \tag{1}$$

$r = 1, k$:

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=1} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{13}}{C_{33}}U + e_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = q_1(t), \qquad \sigma_{rr}\Big|_{r=k} = \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{C_{13}}{C_{33}}\frac{U}{k} + e_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = q_2(t),$$
$$D_r\Big|_{r=1} = -C_{33}\varepsilon_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + e_{31}U + e_{33}\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \qquad \varphi(k,t) = 0; \tag{2}$$

$t = 0$:

$$U(r,0) = U_0(r), \qquad \dot U(r,0) = \dot U_0(r), \tag{3}$$

где $U = U^*/b$; $r = r_*/b$; $k = a/b$; $q_1(t) = q_1^*/C_{33}$; $q_2(t) = q_2^*/C_{33}$; $t = t_* b^{-1}\sqrt{C_{33}/\rho}$; $\varphi = \varphi^*/(bC_{33})$; $\sigma_{rr}(r_*, t_*)$, $D_r(r_*, t_*)$, $U^*(r_*, t_*)$ — соответственно радиальные компоненты тензора механических напряжений, электрической индукции и вектора перемещений; $\varphi^*(r_*, t_*)$ — потенциал электрического поля; ρ, C_{ms}, e_{ms} ($m = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,3}$), ε_{33} — объемная плотность, упругие постоянные, пьезомодули и диэлектрическая проницаемость анизотропного электроупругого материала; U_0, $\dot U_0$ — известные в начальный момент времени перемещения и скорости перемещений соответственно; $\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\,\partial/\partial r$; точка означает дифференцирование по t.

Соотношения (1)–(3) представляют собой математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения. Краевая задача электроупругости (1)–(3) решается методом конечных интегральных преобразований (КИП) [4] по радиальной координате r.

Краевую задачу (1)–(3) приведем к стандартному виду (с однородными граничными условиями на криволинейных поверхностях цилиндра) на основе представления

$$U(r,t) = H_1(r,t) + u(r,t), \qquad \varphi(r,t) = H_2(r,t) + \chi(r,t), \tag{4}$$

где $H_1(r,t) = f_1(r)q_1(t) + f_2(r)q_2(t)$; $H_2(r,t) = f_3(r)q_1(t) + f_4(r)q_2(t)$.

Подставляя (4) в (1)–(3), с учетом условий

$$f_1(1) = f_1(k) = f_2(1) = f_2(k) = f_1'(k) = f_2'(1) = f_3(k) = f_3'(k) = f_4(1) = f_4'(1) = 0,$$
$$f_1'(1) + e_{33}f_3'(1) = 1, \qquad e_{33}f_1'(1) - C_{33}\varepsilon_{33}f_3'(1) = 0, \tag{5}$$
$$f_2'(k) + e_{33}f_4'(k) = 1, \qquad e_{33}f_2'(k) - C_{33}\varepsilon_{33}f_4'(k) = 0$$

получаем следующую начально-краевую задачу относительно $u(r,t)$, $\chi(r,t)$:

$$\nabla^2 u - \frac{C_{11}}{C_{33}}\frac{u}{r^2} + e_{33}\nabla^2\chi - e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = B_1,$$
$$C_{33}\varepsilon_{33}\nabla^2\chi - e_{33}\nabla^2 u - e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = B_2; \tag{6}$$

$r = 1, k$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{C_{13}}{C_{33}}\,\frac{u}{r} + e_{33}\,\frac{\partial \chi}{\partial r} = 0,$$
$$\Big(- C_{33}\varepsilon_{33}\,\frac{\partial \chi}{\partial r} + e_{31} u + e_{33}\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big)\Big|_{r=1} = 0, \qquad \chi(k,t) = 0; \tag{7}$$

$t = 0$:

$$u_0(r) = U_0(r) - H_1(r,0), \qquad \dot u_0(r) = \dot U_0(r) - \dot H_1(r,0),$$
$$B_1 = -\nabla^2 H_1 + \frac{C_{11}}{C_{33}}\,\frac{H_1}{r^2} - e_{33}\nabla^2 H_2 + e_{31}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}, \tag{8}$$
$$B_2 = -C_{33}\varepsilon_{33}\nabla^2 H_2 + e_{33}\nabla^2 H_1 + e_{31}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial H_1}{\partial r}.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r.

Функции $f_1(r), \ldots, f_4(r)$ определяются из уравнений

$$f_1^{\mathrm{IV}}(r) = f_2^{\mathrm{IV}}(r) = 0, \qquad f_3'''(r) = f_4'''(r) = 0. \tag{9}$$

На сегменте $[k, 1]$ введем вырожденное КИП [4] с неизвестными компонентами вектор-функции ядра преобразования $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$:

$$G(\lambda_i, t) = \int\limits_k^1 u(r,t) K_1(\lambda_i, r) r\, dr; \tag{10}$$

$$u(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i,t) K_1(\lambda_i,r) \|K_i\|^{-2}, \qquad \chi(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i,t) K_2(\lambda_i,r) \|K_i\|^{-2}. \tag{11}$$

Здесь

$$\|K_i\|^2 = \int\limits_k^1 K_1^2(\lambda_i, r) r\, dr,$$

λ_i $(i = \overline{1,\infty}\,)$ — положительные параметры, образующие счетное множество. При этом круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра ω_i связаны с λ_i зависимостью

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{b}\sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}\,.$$

Подвергая систему уравнений (6) и начальные условия (8) КИП (10) в соответствии с разработанным алгоритмом, получаем счетное множество задач Коши для трансформанты $G(\lambda_i, t)$, решение которых имеет вид

$$G(\lambda_i, t) = G_0(\lambda_i)\cos\lambda_i t + \dot G_0(\lambda_i)\lambda_i^{-1}\sin\lambda_i t - \lambda_i^{-1}\int\limits_0^t F(\lambda_i,\tau)\sin\lambda_i(t-\tau)\, d\tau,$$

и, с учетом граничных условий (7), однородную краевую задачу для компонент ядра КИП $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$:

$$\Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big)K_1 - \frac{C_{11}}{C_{33}}\,\frac{K_1}{r^2} + \lambda_{in}^2 K_1 + e_{33}\,\frac{d^2K_2}{dr^2} + (e_{33} - e_{31})\,\frac{1}{r}\,\frac{dK_2}{dr} = 0,$$
$$e_{33}\,\frac{d^2K_1}{dr^2} + (e_{33} + e_{31})\,\frac{1}{r}\,\frac{dK_1}{dr} - C_{33}\varepsilon_{33}\Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\Big)K_2 = 0; \qquad (12)$$

$r = k, 1$:

$$\Big(K_1' + \frac{C_{13}}{C_{33}}\,\frac{K_1}{r} + e_{33}K_2'\Big)\Big|_{r=k} = 0, \qquad (-C_{33}\varepsilon_{33}K_2' + e_{31}K_2 + e_{33}K_1')\big|_{r=1} = 0,$$
$$K_2(\lambda_i, k) = 0, \qquad (13)$$

$$F(\lambda_i, t) = \int_k^1 (B_1K_1 + B_2K_2)r\,dr, \quad G_0(\lambda_i) = \int_k^1 u_0K_1r\,dr, \quad \dot G_0(\lambda_i) = \int_k^1 \dot u_0K_1r\,dr.$$

Система дифференциальных уравнений (12) сводится к следующему разрешающему уравнению третьего порядка относительно новой функции $K_3(\lambda_i, r)$:

$$\Big(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\Big)\Big(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr} + \beta_i^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\Big)K_3(\lambda_i, r) = 0. \qquad (14)$$

Здесь

$$K_3 = \frac{dK_2}{dr} + A\,\frac{dK_1}{dr} + \frac{C_{11}}{C_{33}e_{31}}\,\frac{K_1}{r}, \qquad \beta_i^2 = \frac{C_{33}\varepsilon_{33}\lambda_i^2}{e_{33}^2 - e_{33}C_{33}\varepsilon_{33}A},$$

$$\nu^2 = \Big[e_{31} - e_{33} + C_{33}\varepsilon_{33}\Big(A + \frac{C_{11}}{C_{33}e_{31}}\Big)\Big]\Big[(e_{33} - C_{33}\varepsilon_{33}A)^{-1} - \frac{e_{31}}{e_{33}^2 + C_{33}\varepsilon_{33}}\Big],$$

$$A = -\frac{e_{31}e_{33} + \sqrt{(e_{31}e_{33})^2 + C_{11}\varepsilon_{33}(e_{33}^2 + C_{33}\varepsilon_{33}) + C_{33}\varepsilon_{33}e_{31}^2}}{C_{33}\varepsilon_{33}e_{31}}.$$

Общее решение уравнения (14) записывается в виде [5]

$$K_3(\lambda_i, r) = C_{1i}J_\nu(\beta_ir) + C_{2i}Y_\nu(\beta_ir) + C_{3i}E_\nu(\beta_ir),$$

где $J_\nu(\,\cdot\,)$, $Y_\nu(\,\cdot\,)$, $E_\nu(\,\cdot\,)$ — функции Бесселя первого и второго рода и функция Ломмера — Вебера порядка ν.

В данном случае функция $E_\nu(\beta_ir)$ определяется равенством

$$E_\nu(\beta_ir) = \sum_{k=0,2,4,\ldots}^{\infty} a_k(\beta_ir)^{k+1}, \qquad a_0 = \beta_i, \qquad a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+1)^2 - \nu^2}.$$

Учитывая зависимости между $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$ и $K_3(\lambda_i, r)$, полученные в результате сведения системы (12) к уравнению (14), а также рекуррентные соотношения для функций Бесселя [5], получаем следующие выражения для компонент ядра КИП:

$$K_1(\lambda_i, r) = \sum_{j=1}^{3} C_{ji}N_j(\lambda_i, r), \qquad K_2(\lambda_i, r) = \sum_{j=1}^{3} C_{ji}W_j(\lambda_i, r) + C_{4i}. \qquad (15)$$

Здесь

$$N_1(\lambda_i, r) = (m_{1i}\nu + m_{2i})r^{-1}J_\nu(\beta_i r) - m_{1i}\beta J_{\nu+1}(\beta_i r),$$

$$N_2(\lambda_i, r) = (m_{1i}\nu + m_{2i})r^{-1}Y_\nu(\beta_i r) - m_{1i}\beta Y_{\nu+1}(\beta_i r),$$

$$N_3(\lambda_i, r) = \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} a_k[m_{1i}\beta_i(k+1) + m_{2i}](\beta_i r)^k,$$

$$W_1(\lambda_i, r) = \int \Big[J_\nu(\beta_i r) + \Big(A\nu - \frac{C_{11}}{C_{33}e_{31}}\Big)r^{-1}J_\nu(\beta_i r) - A\beta_i J_{\nu+1}(\beta_i r)\Big]\, dr,$$

$$W_2(\lambda_i, r) = \int \Big[Y_\nu(\beta_i r) + \Big(A\nu - \frac{C_{11}}{C_{33}e_{31}}\Big)r^{-1}Y_\nu(\beta_i r) - A\beta_i Y_{\nu+1}(\beta_i r)\Big]\, dr,$$

$$W_3(\lambda_i, r) = a_0(m_{1i}\beta_i + m_{2i})\Big[A - \frac{C_{11}}{C_{33}e_{31}\beta_i}\ \ln(r)\Big] + \sum_{k=0,2,4,\dots}^{\infty} a_k[\beta_i(k+2)]^{-1}(\beta_i r)^{k+2} +$$

$$+ \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} a_k\Big(A - \frac{C_{11}}{C_{33}e_{31}\beta_i k}\Big)[m_{1i}\beta_i(k+1) + m_{2i}](\beta_i r)^k,$$

$$m_{1i} = -\lambda_i^{-2}\Big(e_{33} + \frac{C_{33}\varepsilon_{33}(1 + e_{33}A)}{e_{33} - C_{33}\varepsilon_{33}A}\Big), \qquad m_{2i} = m_{1i} + e_{31}\lambda_i^{-2}.$$

С учетом (15) граничные условия (13) позволяют получить систему однородных уравнений относительно постоянных интегрирования $C_{1i}, \dots, C_{4i}$. Отыскивая нетривиальное решение этой системы, получаем трансцендентное уравнение для определения собственных значений λ_i, а также выражения для постоянных $C_{1i}, \dots, C_{4i}$.

3. Расчетные соотношения. Заключительным этапом проводимого исследования является определение функций $f_1(r), \dots, f_4(r)$, входящих в разложения (4). Используя дифференциальные уравнения (9) и граничные условия (5), имеем

$$\begin{gathered} f_1(r) = \frac{C_{33}\varepsilon_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2}\,[r^3 - (2k+1)r^2 + k(k+2)r - k^2](k-1)^{-2}, \\ f_2(r) = \frac{C_{33}\varepsilon_{33}}{C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2}\,[r^3 - (k+2)r^2 + (2k+1)r - k](k-1)^{-2}, \\ f_3(r) = \frac{e_{33}}{2(C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2)}\,[r^2 - 2kr + k^2](1-k)^{-1}, \\ f_4(r) = -f_3(r)\,\frac{r^2 - 2r + 2k - k^2}{r^2 - 2kr + k^2}. \end{gathered} \tag{16}$$

Применяя к трансформанте (10) последовательно формулы обращения КИП (11), с учетом (4) получаем выражения для определения перемещений $U(r,t)$ и потенциала электрического поля $\varphi(r,t)$:

$$\begin{gathered} U(r,t) = f_1(r)q_1(t) + f_2(r)q_2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t)K_1(\lambda_i, r)\|K_i\|^{-2}, \\ \varphi(r,t) = f_3(r)q_1(t) + f_4(r)q_2(t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t)K_2(\lambda_i, r)\|K_i\|^{-2}. \end{gathered} \tag{17}$$

Собственные значения λ_i свободных осесимметричных колебаний цилиндров

i	Пьезокерамический цилиндр			Керамический цилиндр		
	$a/b = 0{,}2$	$a/b = 0{,}5$	$a/b = 0{,}8$	$a/b = 0{,}2$	$a/b = 0{,}5$	$a/b = 0{,}8$
1	1,985	1,421	1,139	2,150	1,658	1,333
2	5,334	7,425	14,633	5,358	6,592	15,784
3	9,442	14,294	32,441	8,499	12,720	31,570

Функции (17) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1), краевым (2) и начальным (3) условиям, т. е. представляют собой замкнутое решение рассматриваемой задачи электроупругости.

Разность потенциалов $V(t)$ между электродированными радиальными плоскостями пьезокерамического цилиндра определяется по формуле [6]

$$V(t) = \varphi(1, t) - \varphi(k, t).$$

С учетом (13), (16), (17) окончательно получаем

$$V(t) = \frac{e_{33}(1-k)}{2(C_{33}\varepsilon_{33} + e_{33}^2)}\,[q_1(t) + q_2(t)] + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_i, t) K_2(\lambda_i, 1)\,\|K_i\|^{-2}.$$

4. Анализ численных результатов. В качестве примера рассмотрим пьезокерамический цилиндр (изготовленный из состава ЦТС-19), на радиальных поверхностях которого действует нагрузка

$$q_1(t) = q\sin\theta t, \qquad q_2(t) = 0$$

(θ — частота вынужденных колебаний).

Расчеты выполнялись при следующих исходных данных [2]: $e_{31} = -4{,}9$ Кл/м^2, $e_{33} = 14{,}9$ Кл/м^2, $C_{11} = 10{,}9 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $C_{13} = 5{,}4 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $C_{33} = 9{,}3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\varepsilon_{33} = 7{,}26 \cdot 10^{-9}$ Ф/м.

В таблице приведены собственные значения λ_i свободных осесимметричных колебаний элементов, изготовленных из пьезокерамики и керамического материала с такими же упругими характеристиками. Расчеты выполнялись при различных значениях относительной толщины a/b. Анализ результатов показывает, что учет связанности механических и электрических полей напряжения оказывает существенное влияние на величину ω_i. При этом увеличение параметра a/b приводит к уменьшению значения λ_1. Однако при сравнении частот последующих тонов колебаний наблюдается обратная зависимость, кроме того, частотный спектр становится менее плотным.

На рис. 1 показано изменение во времени t трансформант $G(\lambda_1, n, t)$, вносящих основной вклад в напряженно-деформированное состояние цилиндра ($a/b = 0{,}2$) при различных частотах вынужденных колебаний.

Результаты расчета показывают, что допущение о стационарности режима вынужденных колебаний, используемое при исследовании динамических задач, справедливо только в том случае, когда частоты собственных и вынужденных колебаний существенно различаются. При высокочастотном внешнем воздействии вследствие наложения отраженных волн деформирования наблюдается более сложный характер изменения напряженного состояния системы во времени. В качестве подтверждения данного вывода на рис. 2 приведена зависимость $V(t)$ при $a/b = 0{,}2$, $\theta = 0{,}6\lambda_1$.

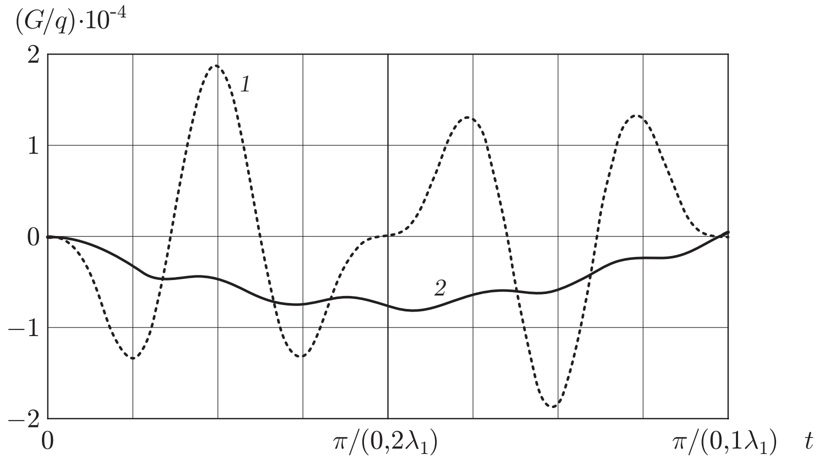

Рис. 1. Изменение во времени трансформант $G(\lambda_1, n, t)$, вносящих основной вклад в напряженно-деформированное состояние цилиндра ($a/b = 0{,}2$) при различных частотах вынужденных колебаний:
1 — $\theta = 0{,}6\lambda_1$; *2* — $\theta = 0{,}1\lambda_1$

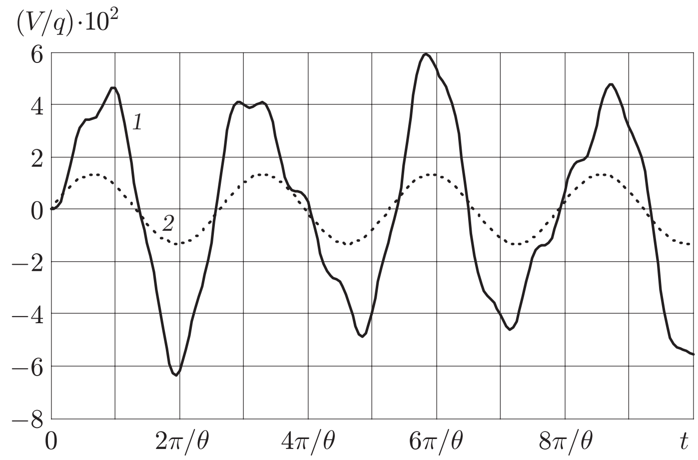

Рис. 2. Зависимость разности потенциалов между электродированными радиальными плоскостями пьезокерамического цилиндра от времени (*1*) и осциллограмма внешней нагрузки (*2*) при $a/b = 0{,}2$, $\theta = 0{,}6\lambda_1$

На рис. 3 показаны нормированные формы $K_1(\lambda_i, r)$, $K_2(\lambda_i, r)$ свободных колебаний цилиндра при $a/b = 0{,}2$.

Следует отметить, что в пьезокерамическом цилиндре, так же как и в обычном длинном анизотропном элементе, характер зависимости $K_1(\lambda_i, r)$ определяется в основном числом нулей этой зависимости. Нулевое значение функции $K_2(\lambda_i, r)$ при $r = k$ соответствует электрическому заземлению внутренней радиальной поверхности.

На рис. 4 показано изменение амплитудных значений механических и электрических функций по толщине при $a/b = 0{,}2$, $\theta = 0{,}2\lambda_1$.

Полученные результаты, с одной стороны, подтверждают известный факт, что величина радиальной компоненты нормальных напряжений существенно меньше окружной компоненты, с другой — не подтверждают результаты численного расчета [2], согласно

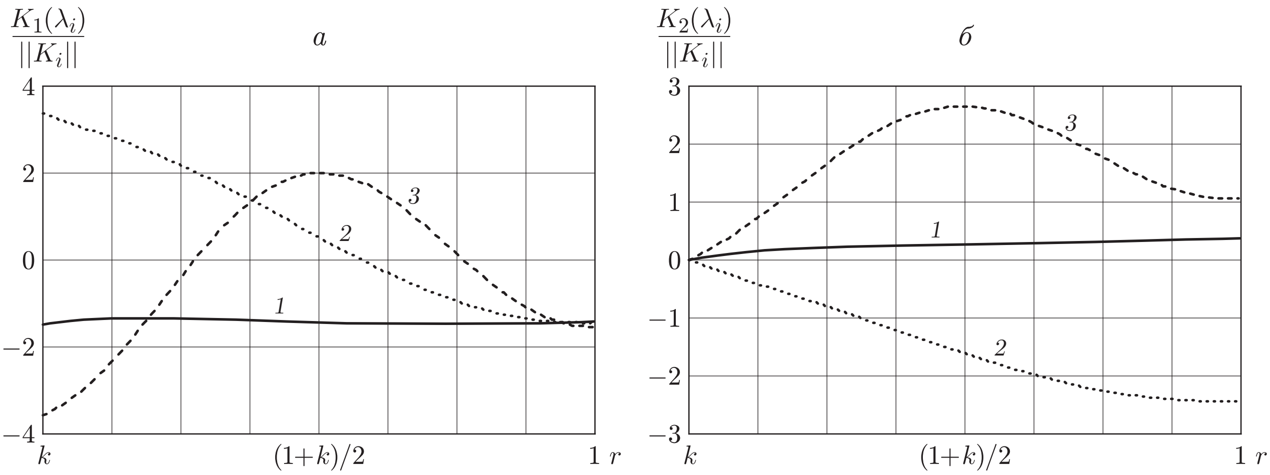

Рис. 3. Нормированные формы $K_1(\lambda_i, r)$ (*а*) и $K_2(\lambda_i, r)$ (*б*) свободных колебаний цилиндра при $a/b = 0{,}2$:
1 — $i = 1$; *2* — $i = 2$; *3* — $i = 3$

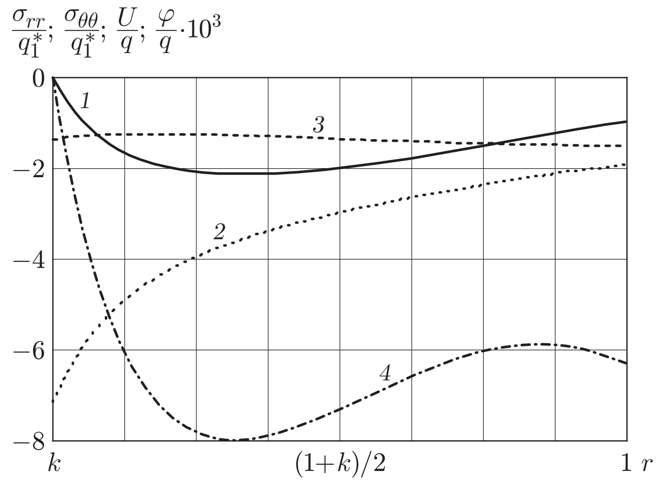

Рис. 4. Изменение амплитудных значений механических и электрических функций по толщине при $a/b = 0{,}2$, $\theta = 0{,}2\lambda_1$:
1 — σ_{rr}, *2* — $\sigma_{\theta\theta}$, *3* — U, *4* — φ

которым изменение компонент тензора напряжений имеет линейный характер. Заметим, что только радиальная компонента вектора перемещений изменяется практически по линейному закону, остальные функции изменяются по сложной криволинейной зависимости.

В заключение следует отметить, что построенный алгоритм решения позволяет также рассмотреть случай "короткого замыкания" и получить результаты, которые могут быть использованы при определении электроакустической чувствительности преобразователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. М.: Наука, 1988.
2. **Гринченко В. Т.** Механика связанных полей в элементах конструкций / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. Киев: Наук. думка, 1989.

3. **Шульга Н. А.** Колебания пьезоэлектрических тел / Н. А. Шульга, А. М. Болкисев. Киев: Наук. думка, 1990.
4. **Сеницкий Ю. Э.** Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики // Изв. вузов. Математика. 1991. № 4. С. 57–63.
5. **Янке Е.** Специальные функции: Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. М.: Наука, 1977.
6. **Тамм И. Е.** Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 17/V 2007 г.,
в окончательном варианте — 27/I 2009 г.