

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ВОЗМУЩЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

М. А. Гулиев

(Баку)

Рассматривается распространение фронта возмущения в многослойной среде, разделяемой локально-проницаемыми зонами. Выведены зависимости, позволяющие определить при различных режимах положение подвижной границы и давление на внешней непроницаемой границе. Показано, что при некоторых значениях параметров слоев фронт возмущения может не достигать естественной границы. Установлено, что если фронт возмущения распространится до внешней границы, то на этой границе имеет место предельное значение давления, после которого оно не будет изменяться.

Получены формулы для определения предельной длины фронта возмущения и предельного значения давления на внешней границе.

Исследование распространения фронта возмущения при движении жидкости и газа в многослойной среде имеет большое значение в гидрогеологии, а также при разработке нефтяных и газовых месторождений [1,2]. Точное математическое исследование этих вопросов связано с большими трудностями. Даже для простейших задач, поддающихся точному решению, полученные формулы имеют громоздкий вид и по ним вести численные расчеты и сделать какие-либо практические выводы крайне затруднительно. Поэтому разработка и применение специальных приближенных методов [2-4] и использование средств вычислительной техники для решения задач о течении жидкости и газа в многослойной среде имеют особое значение [5-7].

Пусть батарея скважин, заменяемая галереей, пущена в эксплуатацию с постоянным дебитом q в полубесконечном пласте, который имеет мощность h и коэффициент проницаемости k . В начальный момент времени давление в любой точке пласта постоянное и равно p_0 . Подошва пласта считается непроницаемой. Над этим пластом простирается другой пласт, который отделяется от первого слабопроницаемым слоем и имеет постоянное давление p° . Слабопроницаемый слой между пластами содержит локально-проницаемые зоны. Вначале предполагается, что имеется лишь одна локально-проницаемая зона шириной $(a_2 - a_1)$ с коэффициентами проницаемости k^* и мощностью b^* .

Для точного математического решения этой задачи следует интегрировать дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1)$$

для двумерной области при граничных и начальных условиях

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} y = 0, & 0 \leq x \leq \infty \\ y = h, & 0 \leq x \leq a_1 \\ y = h, & a_2 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad (2)$$

$$p = p^\circ \quad \text{при} \quad y = h + b^*, \quad a_1 < x < a_2$$

$$\frac{k}{\mu} h \frac{\partial p}{\partial x} = q \quad \text{при} \quad x = 0, \quad p = p_0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

Коэффициент пьезопроводности μ и другие коэффициенты принимаются постоянными.

Описанная задача решается с применением приближенных методов, сущность которых заключается в том, что вся область разбивается на возмущенную и невозмущенную зоны. В возмущенной зоне задается закон распределения давления, а в невозмущенной зоне оно принимается первоначальным [2-4].

Рассматривается первая фаза перераспределения давления и закон распределения в возмущенной зоне берется в виде

$$p = p_0 - \frac{\mu l q}{2kh} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad (3)$$

Уравнение (3) удовлетворяет условиям $\partial p / \partial x = 0$, $p = p_0$ при $x = l(t)$

Здесь $l(t)$ — длина фронта возмущения, отсчитываемая от галереи, μ — вязкость жидкости.

Величина $l(t)$, входящая в (3), определяется из уравнения материального баланса.

Пусть dq_1 будет весовое количество жидкости, отбираемое галереей за промежуток времени dt . Тогда

$$dq_1 = q dt \quad (4)$$

Количество жидкости, получаемое за счет упругого запаса, находится из

$$q_2 = \beta h l (p - p_*^\circ) \quad (5)$$

Здесь β — коэффициент упругости пласта и жидкости. Средневзвешенное давление p_*° определяется, исходя из (3), в виде

$$p_*^\circ = p_0 - \frac{\mu q l}{6 k h} \quad (6)$$

Из (5) и (6) получается

$$dq_2 = \frac{q}{3\alpha} dl \quad (7)$$

Как известно, при решении задач о течении в многослойной среде важное значение имеет вопрос учета количества перетекаемой из одного пласта в другой жидкости [2]. Пусть количество жидкости, перетекающей через локально-проницаемую зону слабопроницаемого слоя за промежуток времени dt , будет dq_3 . Тогда

$$\frac{dq_2}{dt} = Q_2 = \frac{\alpha q}{2l} [l^2 (a_2 - a_1) - l (a_2^2 - a_1^2) + 1/3 (a_2^3 - a_1^3)], \quad \alpha = \frac{k^*}{k h b^2} \quad (8)$$

При получении формулы (8) принято, что $p_0 = p^\circ = 0$. Как видно из формулы (8), количество перетекаемой жидкости зависит не только от параметров эксплуатируемого пласта, но и от параметров слабопроницаемого слоя. Так как

$$dq_1 = dq_2 + dq_3 \quad (9)$$

то из (4), (7) и (8) получается

$$\kappa dt = \frac{ldl}{3 \{1 - 1/2 \alpha l^{-1} [l^2 (a_2 - a_1) - l (a_2^2 - a_1^2) + 1/3 (a_2^3 - a_1^3)]\}} \quad (10)$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение для определения неизвестного $l(t)$, когда слабопроницаемый слой содержит лишь одну локально-проницаемую зону шириной $(a_2 - a_1)$. Интегрирование уравнения (10) в пределах от 0 до t и от 0 до l соответственно приводит к выражению

$$\begin{aligned} \frac{\kappa t}{2} = & - \frac{l}{3\alpha (a_2 - a_1)} + \frac{B}{18\alpha^2 (a_2 - a_1)} \ln \frac{C + 3\alpha l^2 (a_2 - a_1) - Bl}{C} + \\ & + \frac{B^2 - 6\alpha^2 (a_2^3 - a_1^3) (a_2 - a_1)}{18\alpha^2 (a_2 - a_1)^2 A} \ln \frac{l(B + A) - 2C}{l(B - A) - 2C} \end{aligned} \quad (11)$$

$$A = \{[6 + 3\alpha (a_2^2 - a_1^2)]^2 - 12\alpha^2 (a_2^3 - a_1^3) (a_2 - a_1)\}^{1/2}$$

$$B = 6 + 3\alpha (a_2^2 - a_1^2), \quad C = \alpha (a_2^3 - a_1^3)$$

Уравнение (11) позволяет определить положение подвижной границы для любого момента. Если иметь в виду и закон распределения (3), то для любого момента можно найти давление в любом сечении эксплуатируемого пласта.

Следует отметить, что при изучении движения жидкости в многослойной среде были обнаружены предельные режимы [2]. Установлено, что при некоторых значениях параметров слабопроницаемого слоя и эксплуатируемого пласта фронт возмущения может не достигать естественной границы пласта. Другими словами, предельное положение фронта возмущения зависит от коэффициентов проницаемости и мощности пласта и слабопроницаемого слоя. Наличие предела распространения фронта возмущения впервые было показано П. Я. Полубариновой-Кочиной в [8]. Далее, если параметры пласта и слабопроницаемого слоя таковы, что возмущение может дойти до непроницаемой внешней границы пласта, то на внешней границе существует предельное значение давления, после которого оно изменяться не будет. Идея наличия предельного значения давления на непроницаемой границе впервые высказана М. А. Гусейн-заде [2].

С применением приближенных методов и средств вычислительной техники определены соответственно максимальное значение удаления фронта возмущения и предельное значение давления на внешней непроницаемой границе для различных случаев [9].

Предельное значение распространения фронта возмущения для рассматриваемого случая определяется из (10)

$$l_* = \frac{6 + 3\alpha (a_2^2 - a_1^2) + \{[6 + 3\alpha (a_2^2 - a_1^2)]^2 - 12\alpha^2 (a_2^3 - a_1^3)\}^{1/2}}{6\alpha (a_2 - a_1)} \quad (12)$$

Из выведенных выше формул можно найти решения для случая, когда имеет место переток жидкости по всей протяженности слабопроницаемого слоя. Для этого в полученные формулы надо поставить $a_1 = 0$ и $a_2 = l$. Тогда

$$l_* = \sqrt{6} \alpha^{-1/2}, \quad l^2 = \frac{6}{\alpha} [1 - \exp(-2\kappa\alpha t)]$$

Эти результаты совпадают с формулами М. А. Гусейн-заде [2]. Таким образом получены формулы, которые позволяют определить давление в любом сечении пласта в произвольный момент для случая, когда возмущение еще не достигло внешней границы пласта.

Если на границе задается условие

$$p = p_* \quad \text{при} \quad x = 0$$

то решение описанной задачи получается в виде

$$\begin{aligned} \kappa t = & -\frac{l}{3\alpha(a_2 - a_1)} + \frac{B}{18\alpha^2(a_2 - a_1)} \ln \frac{3l^2(a_2 - a_1)\alpha + C - Bl}{C} + \\ & + \frac{B^2 - 6\alpha^2(a_2^3 - a_1^3)(a_2 - a_1)}{18\alpha^2(a_2 - a_1)^2 A} \ln \frac{l(B + A) - 2C}{l(B - A) - 2C} \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13) получена при

$$p = p_0 - (p_0 - p_*) (1 - x/l)^2 \quad (14)$$

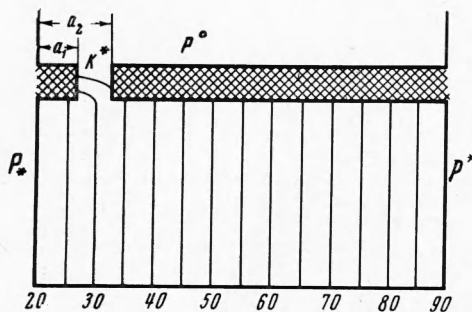
Уравнение (14) удовлетворяет условиям

$$p = p_0 \quad \text{при} \quad x = l(t), \quad p = p_* \quad \text{при} \quad x = 0$$

Предельное значение длины фронта возмущения для этого случая также определяется по формуле (12).

Из полученных формул следует, что независимо от режима эксплуатации максимальное удаление границы возмущенной и невозмущенной зон имеет одно и то же выражение. Однако для каждого из рассмотренных случаев оно достигается в разное время. Действительно, из формул (11) и (13) видно, что максимальное значение длины фронта возмущения при эксплуатации в режиме постоянного давления достигается в два раза быстрее, чем в режиме постоянного дебита. Указанное обстоятельство представляет также практический интерес, заключающийся в том, что через определенный период времени галерея практически будет питаться только за счет верхнего пласта, расположенного над слабопроницаемым слоем.

Отметим, что в используемых законах распределения давления, а также в применяемых в работе [2] приближенных формулах с целью решения задач о течении в многослойной среде отсутствуют члены, характеризующие изменение давления по мощности пласта. Это объясняется тем, что в естественных условиях проницаемость слабопроницаемого слоя намного хуже проницаемости эксплуатируемого пласта [2]. Поэтому при очень больших значениях отношения k/k^* можно пренебречь изменением давления в вертикальном направлении. На фиг. 1 приведены результаты экспериментов, полученные на вычислительной машине при



$$p^* = 90 \text{ атм}, \quad p^0 = 40 \text{ атм}$$

$$p_* = 20 \text{ атм}, \quad a_1 = 3 \text{ м}$$

$$a_2 = 6 \text{ м}, \quad k^* : k = 0.2$$

$$L = 33 \text{ м}, \quad h = 15 \text{ м}, \quad b^* = 3 \text{ м}$$

где p^* — давление на нагревательной галерее, p_* — давление на эксплуатационной галерее.

Результаты, представленные на фиг. 1, получены для аналогичного случая при стационарном течении. Как видно из фиг. 1, даже при $k = 5k^*$ эквипотенциальные линии будут почти прямыми. Точность используемых приближенных методов неоднократно оценена [2,9,10].

Если возмущение достигнет внешней границы пласта, то наступит вторая фаза перераспределения. Тогда

$$l(t) = L = \text{const}, \quad p_0 = p_\infty(t) = \text{var}$$

Здесь L — расстояние от галереи до внешней границы пласта, $p_\infty(t)$ — давление на внешней непроницаемой границе пласта.

Поступая так же, как это было сделано выше, можно найти, что

$$dq_2 = -\beta h L^2 / 3 dp_\infty \quad (15)$$

$$dq_3 = 1/2 \alpha q L^{-1} [L^2 (a_2 - a_1) - L (a_2^2 - a_1^2) + 1/3 (a_2^3 - a_1^3)] dt \quad (16)$$

Исходя из (4), (15), (16) и имея в виду (9), получается

$$q dt \{1 - 1/2 \alpha L^{-1} [L^2 (a_2 - a_1) - L (a_2^2 - a_1^2) + 1/3 (a_2^3 - a_1^3)]\} = -\beta h L dp_\infty \quad (17)$$

Интегрирование уравнения (17) в пределах соответственно от p_0 до p_∞ от 0 до t приводит к решению

$$p_\infty(t) = p_0 - \frac{qt}{\beta h L} \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2L} \left[L^2 (a_2 - a_1) - L (a_2^2 - a_1^2) + \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right] \right\} \quad (18)$$

Если жидкость перетекает по всей протяженности слабопроницаемого слоя, то из уравнения (18), как частный случай, определяется

$$p_\infty(t) = p_0 - \frac{qt}{\beta h L} \left(1 - \frac{\alpha L^2}{6} \right) \quad (19)$$

которое совпадает с формулой М. А. Гусейн-заде [2]. Если эксплуатируемый пласт не имеет никаких связей с лежащим выше пластом ($\alpha = 0$), то уравнение (19) принимает вид

$$p_\infty(t) = p_0 - \frac{qt}{\beta h L} \quad (20)$$

Для случая, когда задается давление на галерее, уравнения для определения d и dq_3 приобретают вид

$$dq_1 = \frac{k h^2 (p_\infty - p_*)}{\mu L} dt \quad (21)$$

$$dq_3 = \frac{k^*}{\mu} \left\{ p_0 (a_2 - a_1) + p_\infty \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3L^2} - \frac{a_2^2 - a_1^2}{L} \right] - p_* \left[(a_2 - a_1) - \frac{a_2^2 - a_1^2}{L} + \frac{a_2^3 - a_1^3}{3L^2} \right] \right\} dt \quad (22)$$

Исходя из (15), (21) и (22), получается

$$\alpha dt = - \frac{2L dp_\infty}{p_\infty B(\alpha) - 3\alpha p_0 (a_2 - a_1) + p_* [3\alpha (a_2 - a_1) - B(\alpha)]} \quad (23)$$

$$B(\alpha) = \frac{3\alpha (a_2^2 - a_1^2)}{L} + \frac{6}{L} - \frac{3\alpha (a_2^3 - a_1^3)}{3L^2}$$

Предельное значение давления на внешней непроницаемой границе определяется в виде

$$p_\infty^0 = p_* B^{-1}(\alpha) [B(\alpha) - 3\alpha (a_2 - a_1)] + 3B(\alpha) p_\infty \alpha (a_2 - a_1) \quad (24)$$

Для случая, когда жидкость перетекает через всю протяженность слабопроницаемого слоя ($a_2 = L$, $a_1 = 0$, $p_0 = 0$), уравнение (24) принимает следующий вид [2]:

$$p_\infty^0 = \frac{p_*}{3 + \alpha L^2} \left(3 - \frac{\alpha L^2}{2} \right) \quad (25)$$

Интегрирование уравнения (23) соответственно от 0 до t и от 0 до p_∞ дает

$$p_\infty(t) = p_* \left[1 - \frac{3\alpha (a_2 - a_1)}{B(\alpha)} \right] \left(1 - \exp \frac{-B(\alpha) \alpha t}{2L} \right) \quad (26)$$

Если эксплуатируемый пласт связан с лежащим выше пластом через большое число локально-проницаемых зон, то решение будет получено в следующем виде:

$$p_\infty(t) = p_* \left\{ 1 - \frac{3\alpha [(a_2 - a_1) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1})]}{B(\alpha)} \right\} \left(1 - \exp \frac{-B(\alpha) \alpha t}{2L} \right) \quad (27)$$

Здесь n принимает целые положительные значения. При перетоке жидкости по всей протяженности слабопроницаемого слоя ($a_1 = 0$, $a_2 = L$, ..., $a_{2n} = a_{2n-1}$) будем иметь ранее полученное решение [2]

$$p_{\infty}(t) = \frac{p_*}{3 + \alpha L^2} \left(3 - \frac{\alpha L^2}{2} \right) \left[1 - \exp \frac{-(\alpha L^2 + 3) \kappa t}{L^2} \right] \quad (28)$$

Если же связь между эксплуатируемым и лежащим выше пластами отсутствует, то формула (28) принимает вид

$$p_{\infty} = p_* \left(1 - \exp \frac{-3 \kappa t}{L^2} \right)$$

Таким образом, получены простые формулы для определения положения подвижной границы в любой момент и изменения давления на внешней непроницаемой границе. Автор благодарит М. А. Гусейн-заде за обсуждение результатов работы.

Поступила 23 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Гусейн-заде М. А. Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. М., «Недра», 1965.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
4. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
5. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960.
6. Гулиев М. А. К приближенному решению и электрическому моделированию задачи о течении жидкости в многослойной среде, разделяемой локально-проницаемыми зонами. Докл. АН АзербССР, 1968, т. 24, № 7.
7. Гулиев М. А. О неустановившемся плоско-параллельном течении жидкости в неоднородном пласте. Изв. вузов, Нефть и газ, 1966, № 9.
8. Полубаринова - Кочина П. Я. О радиусе влияния скважины. Изв. СО АН СССР, 1960, № 5.
9. Гусейнов Г. П., Вагабова Н. Р. Приближенный метод решения задач перетока из одного горизонта в другой через малопроницаемые перегородки при нестационарной фильтрации. Изв. АН АзербССР, Сер. физ.-техн. и матем. н., 1965, № 6.
10. Гулиев М. А. Исследование неустановившегося течения жидкости в неоднородном пласте. Изв. АН АзербССР, Сер. физ.-техн. и матем. н., 1964, № 1.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОТНОСТИ ЛЕГКОПЛАВКИХ МЕТАЛЛОВ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ ПЛАВЛЕНИЯ

А. С. Басин, С. П. Волчкова, А. Н. Соловьев

(Новосибирск)

Плотность и тепловое расширение легкоплавких и, в частности, щелочных металлов вблизи точки фазового перехода «плавление — затвердевание» исследовались неоднократно [1]. Однако в большинстве случаев проводились исследования либо твердой, либо только жидкой фаз, и поэтому на разных образцах веществ. Если учесть к тому же, что составы образцов, исследовавшихся разными авторами, существенно различаются и что количество замеров в непосредственной близости к точке плавления обычно недостаточно для обеспечения высокой точности измерений температурных и других зависимостей, то, естественно, подробной информации об изменениях плотности при плавлении — затвердевании щелочных и большинства других металлов почти нет.