

**О ВЫРОЖДЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА**

*В. Н. Данилов*

(Москва)

В данной статье строятся точные решения для стационарных электронных пучков, вырожденные в декартовой  $(x, y, z)$ , осесимметричной  $(r, \theta, z)$  и спиральной на плоскостях  $y = \text{const}$   $(u, y, v)$  системах координат. Вырождение определяется тем, что, по крайней мере, две координаты в таком решении — циклические или интегралы движения. Рассматриваются в основном вихревые<sup>1</sup> пучки. В работе [1] рассмотрены инвариантные решения для пучков, в которых наличие вихря приводит к линейной зависимости от указанных координат потенциала электрического поля  $\varphi$ . В вырожденных решениях наличие вихря приводит к квадратичной и более сложной зависимости потенциала от координат, являющихся интегралами движения. В [2]<sup>2</sup> и ряде работ, ссылки на которые имеются в [2], описаны вырожденные состояния безвихревого пучка. Известные вырожденные решения для вихревых пучков относятся к осесимметричному одномерному  $(r)$  пучку с азимутальной компонентой скорости [3] и к релятивистскому коническому течению [1]. Используемые ниже уравнения вытекают из системы электронно-гидродинамических уравнений для стационарного релятивистского пучка

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^\beta} \left[ V \bar{\gamma} g^{\beta\beta} g^{\alpha\alpha} \left( \frac{\partial A_\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial q^\alpha} \right) \right] = 4\pi\rho V \bar{\gamma} g^{\alpha\alpha} u_\alpha$$

$$\sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^\beta} \left( V \bar{\gamma} g^{\beta\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial q^\beta} \right) = 4\pi\rho V \bar{\gamma} u,$$

$$\sum_{\beta=1}^3 g^{\beta\beta} u_\beta^2 + 1 = u^2$$

$$\frac{\eta}{c} u \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q^\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 g^{\beta\beta} u_\beta \left( \frac{\partial p_\beta}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial q^\beta} \right), \quad \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^\beta} (V \bar{\gamma} g^{\beta\beta} \rho u_\beta) = 0$$

$$u \equiv \frac{\eta}{c^2} (\varphi + \mathcal{E}) + 1, \quad cu_\alpha \equiv \frac{\eta}{c} A_\alpha + p_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad \gamma \equiv g_{11}g_{22}g_{33}$$

где  $q^\beta$  — ортогональные координаты с метрическим тензором  $g^{\beta\beta}$  ( $\beta = 1, 2, 3$ );  $A_\alpha$  — магнитный потенциал;  $V_\alpha = (u_\alpha / u)c$  — скорость электрона;  $\rho$  — скалярная плотность пространственного заряда ( $\rho > 0$ );  $\mathcal{E}$  — энергия в эв,  $p_\alpha$  — обобщенный импульс электрона, отнесенный к единице массы;  $\eta$  — отношение заряда к массе электрона.

**§ 1. Соленоидальные пучки.** Ниже строятся решения для плоского и осесимметричного вихревого пучка, все параметры которых являются интегралами движения.

1.1°. Осесимметричный и одномерный  $(r)$  пучок с компонентами 4-скорости  $(0, u_\theta, u_z, -u)$  описывается уравнениями

$$\frac{r}{u_\theta} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{dA_\theta}{dr} = \frac{1}{u_z r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr} = \frac{1}{ur} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi}{dr} = 4\pi\rho$$

$$u^2 = \frac{1}{r^2} u_\theta^2 + u_z^2 + 1, \quad \frac{\eta}{c} u \frac{d\mathcal{E}}{dr} = \frac{1}{r^2} u_\theta \frac{dp_\theta}{dr} + u_z \frac{dp_z}{dr} \quad (1.1)$$

$$cu_\theta \equiv \frac{\eta}{c} A_\theta + p_\theta, \quad cu_z \equiv \frac{\eta}{c} A + p_z, \quad u \equiv \frac{\eta}{c^2} (\varphi + \mathcal{E}) + 1$$

<sup>1</sup> Здесь и ниже вихревым пучком называется пучок с вихревым полем обобщенного импульса.

<sup>2</sup> Следует отметить, что второй пример в п. 6 работы [2] оказался ошибочным.

Система (1.1) накладывает только одно условие на три произвольные функции:  $\mathcal{E}(r)$ ,  $p_\theta(r)$ ,  $p_z(r)$ . Эта неопределенность снимается, если учесть конкретный способ формирования пучка.

Пусть пучок (1.1) формируется в осесимметричных и стационарных условиях. Тогда  $\mathcal{E}$ ,  $p_\theta$  — интегралы движения и определяются через потенциалы поля на поверхности катода  $r = r_k(z)$

$$\mathcal{E} = -\Phi_k(r_k), \quad p_\theta = -\frac{\eta}{c} A_{\theta k}(r_k) \quad (1.2)$$

Электронный ток вдоль  $z$ , ограниченный трубкой траекторий

$$c \int_0^{r_k} \rho u_z 2\pi r dr = J(r_k) \quad (1.3)$$

— также интеграл движения. Задание этих величин, определяемых формирующей пушкой, добавляет два недостающих условия:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(J)$ ,  $p_\theta = p_\theta(J)$ . С другой стороны, можно поставить задачу активно [4]: задавая параметрами движения, определить условия формирования пучка.

Пусть, например, катод эквипотенциален  $\Phi_k = -\mathcal{E} = 0$  и требуется рассчитать пучок в однородном магнитном поле  $H$  при отсутствии вращения  $u_\theta = 0$ . Из (1.1) следует решение

$$u = \text{ch } \lambda \sigma, \quad u_z = \text{sh } \lambda \sigma, \quad A_\theta = \frac{1}{2} H r^2, \quad \varphi = \frac{c^2}{4\pi\eta} \frac{\lambda^2}{r^2}$$

$$p_z = 0, \quad \sigma = \ln(r/r_0), \quad r_0 = \text{const}, \quad \lambda = \text{const}$$

Отсюда получаются условия формирования

$$p_\theta = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{c} H r^2, \quad J = \frac{c^3}{2\eta} \lambda (\text{ch } \lambda \sigma - 1)$$

где  $r_0$  — характерный радиус пучка.

Пусть при  $\mathcal{E} = 0$  и  $H_\theta \neq 0$  нерелятивистский пучок должен иметь однородную аксиальную скорость  $V_z = V = \text{const}$ . Тогда нетрудно получить

$$\begin{aligned} p_z &= -A_0 \ln \frac{r}{r_0}, \quad V_\theta = \frac{VA_0}{\Omega} \ln \left( 1 + \frac{\Omega V_\theta}{VA_0} \right) + \frac{\Omega}{2} (r^2 - r_1^2) \\ p_\theta &= V_\theta - \frac{\Omega}{2} r^2, \quad \eta \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2\eta}{r} \left( \frac{J}{V} - Q \right) = \frac{VA_0}{r} + \frac{\Omega^2}{4} r - \frac{1}{r^3} p_\theta^2, \\ A_0 &= \text{const}, \quad \frac{\eta}{c} H_\theta \equiv A_0, \quad \frac{\eta}{c} H_z = \Omega \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $r_0$ ,  $r_1$  — характерные радиусы,  $(0, H_\theta, H_z)$  — компоненты внешнего магнитного поля,  $Q$  — заряд на внутреннем стержне, который может быть расположен в полом пучке.

1.2°. Система уравнений плоского одномерного ( $x$ ) пучка с 4-скоростью  $(0, u_y, u_z, -u)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{A_y''}{u_y} = \frac{A_z''}{u_z} = \frac{\Phi''}{u} = 4\pi\rho, \quad \frac{\eta}{c} u \mathcal{E}' = u_y p_y' + u_z p_z' \quad \left( \Phi' \equiv \frac{d\Phi}{dx} \right) \quad (1.5) \\ u^2 = u_y^2 + u_z^2 + 1, \quad cu_y = \eta c^{-1} A_y + p_y, \quad cu_z = \eta c^{-1} A_z + p_z \end{aligned}$$

Уравнение (1.5) допускает интеграл

$$(\eta c^{-2})^2 [(\varphi')^2 - (A_y')^2 - (A_z')^2] = -k^2 = \text{const} \quad (1.6)$$

Пусть пучок при  $\mathcal{E} = 0$  имеет однородную скорость по оси  $y$ :  $u_y = \beta u$ ,  $\beta = \text{const}$ . В этом случае

$$\begin{aligned} u &= (1 - \beta^2)^{-1/2} \text{ch} \psi, \quad u_z = \text{sh} \psi \\ 4\pi \eta c^{-2} \rho &= (\psi')^2 + \psi'' \text{th} \psi \\ p_y &= (c/a)x, \quad p_z' = - (c/a) \beta (1 - \beta^2)^{-1/2} \text{cth} \psi \\ a \psi' \text{sh} \psi &= \beta (1 - \beta^2)^{-1/2} (\alpha \text{sh} \psi - 1) \end{aligned}$$

где  $a, \alpha$  — произвольные постоянные. Интегрирование последнего уравнения дает

$$\begin{aligned} \frac{\alpha \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x}{a} &= \psi - \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \text{Ar th} \frac{\alpha + \text{th}^{1/2} \psi}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \\ J &= c \int_0^x \rho u_z dx = \frac{c^3 \beta \alpha \text{ch} \psi}{4\pi \eta a \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{4\pi \eta}{c^2} \rho = \frac{\psi' \beta \alpha}{a \sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}$$

Пучок с однородной плотностью пространственного заряда получается, если выбрать

$$\eta c^{-2} \mathcal{E} = (1 - \alpha) u, \quad p_y = (1 - \alpha) c u_y, \quad p_z = (1 - \alpha) c u_z$$

тогда

$$(4\pi \eta / c^2) \rho = \alpha k^2, \quad u = B \text{ch} kx, \quad u_y = B_y \text{sh} kx, \quad u_z = B_z \text{sh} kx$$

где  $B, B_y, B_z$  — константы, причем  $B^2 = B_y^2 + B_z^2$ . В отличие от безвихревого пучка [2], плотность заряда увеличивается в  $\alpha$  раз.

1.3°. Плоский двумерный  $(x, z)$  пучок с компонентами 4-скорости  $(0, u_y(x, z), 0, -u)$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} u^2 &= u_y^2 + 1, \quad (\eta / c) u d\mathcal{E} = u_y dp_y, \quad u_y = (\eta / c) A_u + p_y \\ \frac{1}{u_y} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{1}{u} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 4\pi \rho \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для случая  $p_y = \mathcal{E} = 0$  известно решение [5]

$$\begin{aligned} u &= \text{ch} f, \quad u_y = \text{sh} f, \quad (4\pi \eta / c^2) \rho = (\nabla f)^2 \\ \nabla^2 f &= 0, \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, 0, \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Если в (1.7) положить  $u = \text{ch} \psi$ ,  $u_y = \text{sh} \psi$ , то получатся уравнения

$$\frac{d^2 \psi}{df^2} \left( c \text{ch} \psi - \frac{dp_y}{d\psi} \right) = \left( \frac{d\psi}{df} \right)^2 \left( \frac{d^2 p_y}{d\psi^2} - \text{th} \psi \frac{dp_y}{d\psi} \right), \quad \frac{\eta}{c} \frac{d\mathcal{E}}{d\psi} = \text{th} \psi \frac{dp_y}{d\psi}$$

из которых следует при произвольной зависимости  $\psi(f)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} p_y &= \text{sh} \psi - \alpha \int \text{ch} \psi df, \quad \frac{\eta}{c^2} \mathcal{E} = \text{ch} \psi - \alpha \int \text{sh} \psi df \\ \frac{4\pi \eta}{c^2} \rho &= \alpha (\nabla f)^2 \frac{d\psi}{df}, \quad \frac{\eta}{c^2} A_y = \alpha \int \text{ch} \psi df, \quad \frac{\eta \Phi}{c^2} = \alpha \int \text{sh} \psi df - 1 \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная. В частности, при  $\psi = f$  решение (1.9) отличается от безвихревого (1.8) на коэффициент  $\alpha$ .

1.4°. Осесимметричный двумерный  $(r, z)$  пучок с 4-скоростью  $(0, u_0, 0, -u)$  определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{r}{u_0} \left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) \frac{A_0}{r} &= \frac{\Delta \Phi}{u} = 4\pi\rho, \quad \Delta \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ u &= \frac{1}{r^2} u_0^2 + 1, \quad \frac{\eta}{c} u \frac{d\mathcal{E}}{dp_0} = \frac{u_0}{r^2} dp_0, \quad cu_0 = \frac{\eta}{c} A_0 + p_0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Зависимость  $p_0 = \mathcal{E}\eta / \omega$ , где  $\omega = \text{const}$  — угловая скорость, приводит к случаю однородного вращения пучка

$$u = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad u_0 = r\beta(1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = r\omega / c$$

При этом система (1.10) сводится к линейному уравнению для  $\mathcal{E}'$

$$\mathcal{E}' \equiv \mathcal{E} - \frac{2c^2}{\eta \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial r^2} - \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}'}{\partial z^2} = 0 \quad (1.11)$$

В нерелятивистском пределе из (1.10) следует

$$\left( \Delta - \frac{1}{r^2} \right) \frac{A_0}{r^2} = 0, \quad \eta \frac{d\mathcal{E}}{dp_0} = \frac{V_0}{r^2}, \quad \eta(\Phi + \mathcal{E}) = \frac{V_0^2}{2r^2}, \quad 4\pi\rho = \Delta\Phi$$

Если задаться некоторой зависимостью  $p_0 = p_0(F)$ , то первые два уравнения сводятся к одному для  $F$ . Пусть  $p_0 = r_0^2 F$ , где  $r_0 = \text{const}$ , тогда

$$2\eta\mathcal{E} = r_0^2 F^2, \quad 2\eta\Phi = (r^2 - r_0^2) F^2, \quad \Delta F + \frac{2}{r} \frac{r^2 + r_0^2}{r^2 - r_0^2} \frac{\partial F}{\partial r} = 0$$

т. е. задача сводится к линейному уравнению для  $F$ . В случае  $F = \omega = \text{const}$  получается нерелятивистский эквивалент рассмотренного выше примера

$$p_0 = \frac{\eta}{\omega} \mathcal{E}, \quad 2\eta(\Phi + \mathcal{E}) = \omega^2 r^2, \quad 4\pi\rho = 2\omega^2 - 2 \frac{\eta}{r} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}$$

Функция  $\mathcal{E}$  должна быть найдена из уравнения (1.11) при  $\beta \rightarrow 0$ .

**§ 2. Релятивистский плоский пучок.** Пусть пучок имеет двузначную скорость вида  $u_z = \pm w(z)$ , т. е. состоит из двух подпотоков, движущихся навстречу друг другу по оси  $z$ . Пусть плотности подпотоков равны  $1/2 \rho$  и в сумме дают полную плотность заряда в пучке  $\rho$

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho w = 0, \quad \rho = I/cw, \quad I = \text{const} \quad (2.1)$$

В этом случае ток пучка по оси  $z$  отсутствует, но имеется так называемый вращающийся ток  $+1/2 I$ .

Ниже строятся решения для пучков с плотностью (2.1), в которых электронный ток направлен по циклической координате. Эти пучки можно интерпретировать как однопоточные с током  $I$  по оси  $z$  только при ограничении на ширину пучка, достаточном для того, чтобы пренебречь магнитным полем тока  $I$ .

2.1°. Плоский безвихревой пучок с компонентами 4-скорости

$$u_x(z), u_y = a(z) \text{sh}[kx + \psi(z)], \quad u_z = \pm w, \quad u = a \text{ch}[kx + \psi]$$

удовлетворяет уравнениям

$$\frac{1}{u_x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{\nabla^2 u_y}{u_y} = \frac{\nabla^2 u}{u} = \frac{4\pi\eta I}{c^2 w}, \quad w^2 = a^2 - u_x^2 + 1 \quad (2.2)$$

где  $\nabla^2$  определяется по (1.8). Далее задача сводится к одномерным уравнениям для  $a, u_x, \psi$

$$\frac{u_x''}{u_x} = \frac{a''}{a} + k^2 + (\psi')^2 = \frac{\lambda^2}{2w}, \quad 2 \frac{a'}{a} = - \frac{\psi''}{\psi'}, \quad \lambda^2 \equiv \frac{8\pi\eta}{c^3} I \quad \left( a' \equiv \frac{da}{dz} \right) \quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) допускают интегралы (2.4)

$$\psi' = a^{-2} d, (a')^2 + k^2 a^2 - a^{-2} d^2 = \lambda^2 w + b \quad (b, d = \text{const})$$

Случай  $k = 0$  рассмотрен в [6]. Пусть  $u_x = 0, k \neq 0$ . Тогда

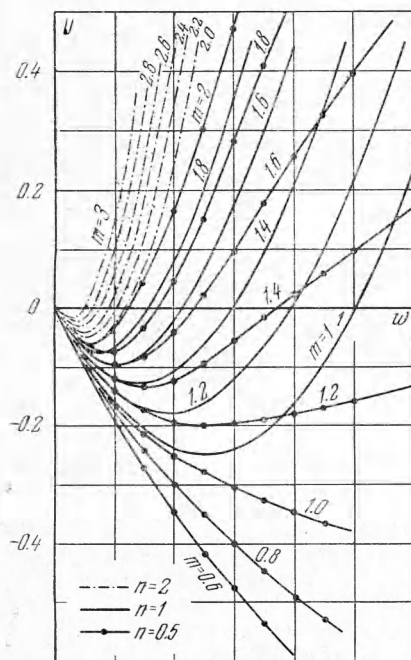
$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{w^2 (w')^2}{1+w^2} = b - U, \quad U \equiv \frac{-w}{1+w^2} (1 + w^2 - m^2 w - n^2 w^3)$$

$$m^2 = (k^2 + d^2) \lambda^{-2}, \quad n^2 = k^2 \lambda^{-2} \quad (2.5)$$

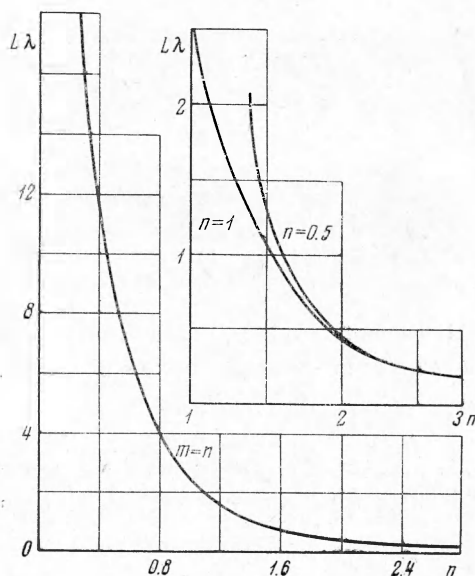
Следуя [7], можно сказать, что уравнение (2.5) описывает движение фиктивной частицы с энергией  $b$  в поле с потенциалом  $U$ . По графикам на фиг. 1 можно определить точку поворота частицы  $w_m$  для различных  $b$ . При полном пространственном заряде ( $b = 0$ ) имеются две точки поворота:  $w = 0$  и  $w = w_m$ . В этом случае движение периодически и представимо в виде волн  $w$  по оси  $z$ . Для длины волны  $L$  (фиг. 2)

$$\lambda L = 2 \int_0^{w_m} \frac{\sqrt{wdw}}{\sqrt{1+w^2 - m^2 w - n^2 w^3}}$$

В нерелятивистском пределе это решение переходит в известное [8], которое описывает волнообразное возмущение потенциала по оси  $z$ , наложенное на плоский бриллиуеновский пучок.



Фиг. 1



Фиг. 2

2.2°. Решение предыдущего пункта можно обобщить на вихревой пучок с компонентами 4-скорости

$$0, u_y = a(z) \text{sh } kx, \quad u_x = \pm w(z), \quad u = a(z) \text{ch } kx \quad (2.6)$$

Если взять импульс  $p_y$  и энергию  $\mathcal{E}$  в виде

$$p_y = cp \text{sh } kx, \quad \eta \mathcal{E} = c^2 p \text{ch } kx, \quad p = \text{const}, \quad k = \text{const} \quad (2.7)$$

то уравнение  $(\eta/c) u d\mathcal{E} = u_y dp_y$  удовлетворяется, и остается решить уравнения для поля:

$$\frac{\Delta^2 A_y}{u_y} = \frac{\Delta^2 \Phi}{u} = \frac{4\pi I}{cw}, \quad cu_y = \frac{\eta}{c} A_y + p_y, \quad u = \frac{\eta}{c^2} (\Phi + \mathcal{E}) + 1 \quad (2.8)$$

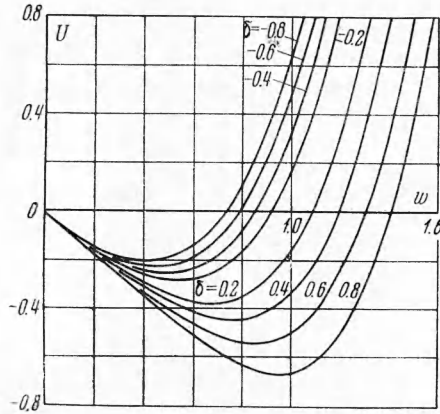
Подстановка (2.6), (2.7) в (2.8) дает

$$a'' + k^2(a - p) = \frac{\lambda^2}{2w} a, \quad a^2 - 1 = w^2, \quad \lambda \equiv \frac{8\pi\eta}{c^3} I$$

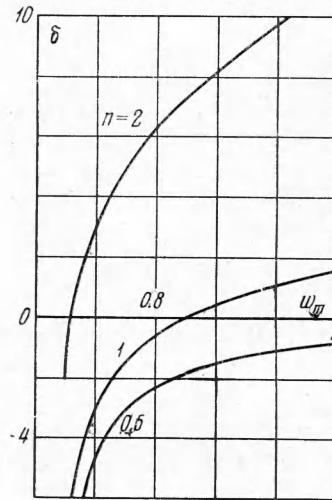
В результате получается уравнение для  $w$

$$\frac{1}{\lambda^2} \frac{w^2 (w')^2}{1+w^2} = b - U, \quad U \equiv -[w - n^2 w^2 + \delta(\sqrt{1+w^2} - 1)] \\ w' \equiv dw/dz, \quad b = \text{const}, \quad n = k/\lambda, \quad \delta = pk^2 \lambda^{-2} \quad (2.9)$$

На фиг. 3 даны графики  $U(w)$ , по которым можно найти точку поворота  $w_m$ , когда  $U(w_m) = b$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

В случае полного пространственного заряда ( $b = 0$ ) уравнение описывает периодические волны  $w(z)$  с амплитудой  $w_m$  (фиг. 4) и длиной  $L$

$$\lambda L = 2 \int_0^{w_m} \frac{w dw}{\sqrt{1+w^2} \sqrt{w - n^2 w^2 + \delta(\sqrt{1+w^2} - 1)}}$$

В нерелятивистском пределе получается

$$\pm \lambda z = \alpha^{-3/2} [\text{arc sin } \sqrt{\alpha w} - \sqrt{\alpha w(1 - \alpha w)}], \quad \alpha \equiv n^2 - 1/2 \delta$$

Видно, что при достаточно интенсивном вихре  $\delta > 2n^2$  решение становится аперидичным.

§ 3. Аксиальный нерелятивистский пучок. Решения неплоского пучка аналогичные § 2, удается построить только в нерелятивистском случае.

3.1°. Уравнения для осесимметричного пучка имеют вид

$$V_z^2 + \frac{V_\theta^2}{r^2} = 2\eta(\Phi + \mathcal{E}), \quad \eta d\mathcal{E} = \frac{V_\theta}{r^2} dp_\theta, \quad V_\theta = \frac{\Omega}{2} r^2 + p_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho, \quad \rho = \frac{I}{V_z}, \quad \Omega = \frac{\eta}{c} H, \quad (3.1)$$

где  $H$  — однородное аксиальное магнитное поле. Эти уравнения удовлетворяются при предположении  $V_z = V(z)$ ,  $V_\theta = V_\theta(r)$ , если положить

$$\varphi = \pi \rho_0 r^2 + 2 Q \ln(r/r_0) + 1/2 V^2 \eta^{-1}, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad Q = \text{const}, \quad (3.2)$$

то в результате получается уравнение для  $V$

$$(V dV/dz)^2 = 4 \pi \eta (IV - 1/2 \rho_0 V^2) + b, \quad b = \text{const}$$

В случае ( $b = 0$ ) получаются два типа решения

$$z = \frac{4\pi\eta}{\omega^3} I(\omega t - \sin \omega t), \quad s = 1$$

$$z = -\frac{4\pi\eta}{\omega^3} I(\omega t - \text{sh } \omega t), \quad s = -1 \quad (3.3)$$

$$s = \text{sign } \rho_0, \quad \omega^2 = |4\pi\eta\rho_0|, \quad dt = V^{-1} dz$$

Решение (3.3) совпадает с полученным из приближенного парааксиального уравнения в работе [9]. Однако точные условия реализации рассматриваемого пучка отличаются от приближенных [9]. Из (3.1), (3.2) следует выражение для  $\mathcal{E}$ ,  $p_\theta$

$$2\eta \mathcal{E} = r^{-2} (1/2 \Omega r^2 + p_\theta)^2 - 1/2 s \omega^2 r^2 - 4\eta Q \ln r/r_0 \quad (3.4)$$

$$p_\theta = \pm [1/4 (\Omega^2 - 2 s \omega^2) r^4 - 2 \eta Q r^2]^{1/2} \quad (3.5)$$

В частности, если внутри пучка нет стержня, то  $Q = 0$  и

$$\frac{\eta}{c} A_k = \frac{\mp J}{4\pi I} \sqrt{\Omega^2 - 2s\omega^2}, \quad \eta \varphi_k = \frac{-J}{4\pi I} [\Omega^2 \pm \sqrt{\Omega^2 - 2s\omega^2} - 2s\omega^2]$$

где  $J$  — электронный ток<sup>1</sup>, определяемый (1.3).

3.2°. Решение для безвихревого осесимметричного пучка вида (3.3) обобщается на пучок эллиптического сечения [8]. В таком пучке при введении вихря можно реализовать и решение  $s = -1$ . Так пусть

$$p_x = v_{11} x + v_{12} y, \quad p_y = v_{21} x + v_{22} y, \quad 2\eta \mathcal{E} = \alpha_{11} x^2 + 2 \alpha_{12} x y + \alpha_{22} y^2$$

где  $v_{11}, \dots; \alpha_{11}, \dots$  — константы. Из интеграла энергии

$$V_z^2 \equiv 2 \eta \Phi = 2 \eta (\varphi + \mathcal{E}) - V_x^2 - V_y^2, \quad V_x = -1/2 \Omega y + p_x,$$

$$V_y = 1/2 \Omega x + p_y \quad (3.7)$$

где  $H_z = (c/\eta) \Omega$  — однородное магнитное поле, следует

$$d^2 \Phi / dz^2 = 4\pi (\rho - \rho_0), \quad 4\pi\eta\rho_0 = v_{11}^2 + 1/2 \Omega^2 + 2 v_{12} v_{21} + v_{22}^2$$

отсюда, учитывая выражение  $\rho = I/V_z$ , нетрудно получить (3.3), так как выбором  $v_{12}$  и  $v_{21}$  можно сделать  $\rho_0$  отрицательным. При этом уравнения для вихря

$$\eta \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = V_y \left( \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = -V_x \left( \frac{\partial p_y}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial y} \right)$$

накладывают четыре условия на семь произвольных констант  $v_{11}, \alpha_{11}, \dots$ . В частности,  $v_{11} = -v_{21}$ , что означает соленоидальность скорости  $V_x, V_y$

<sup>1</sup> Нерелятивистские пучки, рассматриваемые в § 3,4, интерпретируются здесь как однопоточные.

3.3°. Интересно отметить решение для безвихревого пучка с несолоноидальной скоростью в плоскости  $x, y$ . Положив  $v_{11} = v_{22}$ ;  $\mathcal{E} = 0$  и  $v_{11} + v_{22} = v$ , нетрудно получить из уравнения неразрывности

$$\rho = \frac{I}{v} \frac{d}{dz} (i - e^{-vt}), \quad t = \int \frac{dz}{V_z}, \quad I = \text{const} \quad (3.8)$$

Учитывая (3.8), из уравнения Пуассона и интеграла энергии можно получить уравнение для траектории  $z(t)$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z + 4\pi\eta \frac{I}{v} [1 - e^{-vt}], \quad \omega^2 \equiv 2v_{12}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2 + v_{11}^2 + v_{22}^2$$

Решение этого уравнения для случая  $(\partial\Phi / \partial z)_{\Phi=0} = 0$  имеет вид

$$z = \frac{4\pi\eta I}{v(\omega^2 + v^2)} \left[ 1 - e^{-vt} - \frac{v}{\omega} \sin \omega t + \frac{v^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \right] \quad (3.9)$$

Решение (3.9) имеет смысл до первой точки  $t_1$

$$\exp(-vt_1) = \cos \omega t_1 - (v/\omega) \sin \omega t_1, \quad \Phi_{t=t_1} = 0$$

в которой возникает виртуальный катод.

§ 4. Спиральный нерелятивистский пучок. Разделением переменных в спиральных координатах  $u, v$

$$x + iz = r_0 \exp [b_1 u + b_2 v + i(b_1 v - b_2 u)] \\ r_0^2 = (b_1^2 + b_2^2)^{-1} = \text{const} \quad (4.1)$$

можно получить вырожденные решения для вихревых пучков. Ниже этот вопрос рассматривается применительно к двумерному  $(x, z)$  плоскому нерелятивистскому пучку с компонентами скорости  $(\partial\chi / \partial x, V_y, \partial\chi / \partial z)$  и вихрем в компоненте

$$V_y = \eta c^{-1} A_y + p_y \quad (4.2)$$

Уравнения плоского пучка имеют вид

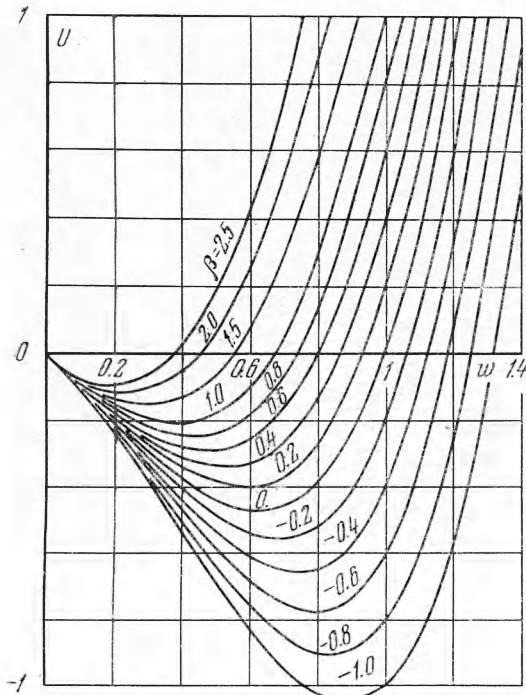
$$\nabla^2 A_y = 0, \quad \nabla\phi = 4\pi\rho$$

$$\nabla(\rho\nabla\chi) = 0$$

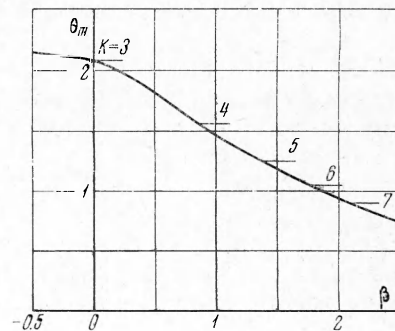
$$2\eta(\phi + \mathcal{E}) = (\nabla\chi)^2 + V_y^2$$

$$\eta d\mathcal{E}/dp_y = V_y$$

где  $\nabla$  определяется (1.8).



Фиг. 5



Фиг. 6



Переходя в (4.2) к координатам  $u, v$  и положив

$$A = A(v), \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(v), \quad \chi = \chi(u)$$

нетрудно получить

$$\begin{aligned} e^{-2b_1 u} w^2 &= 2\eta\Phi \equiv e^{2b_2 v} 2\eta(\varphi - \psi), \quad 2\eta\psi \equiv V_y^2 - 2\eta\mathcal{E} \\ \frac{\eta}{c} A_y &= \Omega v, \quad \eta \frac{d\mathcal{E}}{dp_y} = V_y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = \frac{4\pi}{w} J(v) e^{2b_1 u + 2b_2 v} \\ w &\equiv d\chi / du, \quad \Omega = \text{const} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если произвольные функции  $\psi$  и  $J$  определить так

$$\psi = \pi b^{-2} \rho_0 e^{-2b_2 v} + 2b_2 v Q + \psi_0, \quad J = I e^{-4b_2 v} \quad (4.4)$$

где  $\rho_0, Q, I, \psi_0$  — константы, то получится уравнение

$$\frac{d^2 \Phi}{du^2} + 4b_2^2 \Phi = \frac{4\pi}{w} e^{2b_2 v} - 4\pi \rho_0, \quad w = e^{2b_1 u} \sqrt{2\eta\Phi} \quad (4.5)$$

Наиболее просто выглядят случаи полярной симметрии  $(r, \varphi, \theta)$ , вытекающие из (4.5).

4.1°. В случае азимутальной зависимости

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1/r_0, \quad r = r_0 \exp(v/r_0), \quad \theta = u/r_0$$

из (4.5) следует

$$d^2 \Phi / d\theta^2 + 4\Phi = 4\pi I r_0^2 (2\eta\Phi)^{-1/2} - 4\pi \rho_0 r_0^2 \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) при  $\rho_0 = 0$  переходит в известное для пучка с одной компонентой скорости ( $V_y = 0$ ) [10]. Из (4.6) следует интеграл

$$w^2 (dw / d\theta)^2 = b - U, \quad U \equiv w^4 + \beta w^2 - w \quad (4.7)$$

$$w \equiv \sqrt{2\eta\Phi} / V_0, \quad \beta \equiv \rho_0 V_0 / 2I, \quad V_0^3 \equiv 8\pi\eta I r_0^2$$

На фиг. 5 изображена «потенциальная яма»  $U$  в зависимости от  $\beta$ . В случае  $(b = 0)$  получаются периодические по  $\theta$  решения  $U(w_m) = 0$  при любых  $\beta$  с амплитудой  $w_m$  и длиной волны

$$\theta_m = 2 \int_0^{w_m} \frac{V_0 dw}{\sqrt{1 - \beta w - w^3}} \quad (4.8)$$

Если пучок занимает всю плоскость, то период волны  $w(\theta)$  должен быть кратен  $2\pi$ , как это условно изображено точками на фиг. 6. В частности, для  $\beta = 0$  находится точно одно значение  $k = 3$ .

В азимутальном пучке действие геометрического эффекта (член  $4\Phi$  в (4.6)) оказывается сильнее влияния вихря, и уравнение (4.6) описывает периодические решения даже при отрицательных  $\rho_0$ . Выражение для вихревого импульса, вытекающее из (4.3) (4.4), имеет вид

$$p_y = -\Omega v + 2b_2 \eta Q / \Omega - (\pi \eta \rho_0 / b_2 \Omega) \exp(-2b_2 v)$$

В противоположном случае радиальной зависимости

$$b_2 = 0, \quad b_1 = 1/r_0, \quad r = r_0 \exp(u/r_0), \quad \theta = u/r_0$$

задача сводится к уравнению

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{du} \right)^2 + 4\pi \rho_0 \Phi = 4\pi I \frac{1}{\eta} \left( \frac{d\chi}{du} - \frac{\chi}{r_0} \right) + b, \quad 2\eta\Phi \equiv \frac{d\chi}{du} \quad (4.9)$$

Здесь нельзя построить периодическое решение для  $\Phi$ , так как действие  $\chi$  монотонно нарастает, и существует только одна точка  $\chi = 0$ , где можно расположить при  $b = 0$  виртуальный катод:  $\Phi = d\Phi / dr = 0$ .

4.2°. Интересно отметить решение для безвихревого плоского пучка в магнитном поле вида

$$\frac{\eta}{c} A_y = A e^{-b_1 v}, \quad A = A_0 \cos b_2 u + B_0 \sin b_2 u \quad (4.10)$$

которое оказывается аналогичным решению для вихревого пучка вне магнитного поля.

Действительно, положив в (4.2)  $\mathcal{E} = p_y = 0$ ,  $d\chi / du = w(u)$  и учитывая (4.10), нетрудно получить в спиральных координатах

$$\rho = J(v) / w, \quad e^{-2b_1 u} w^2 = 2\eta\Phi, \quad \varphi = \left( \Phi + \frac{A^2}{2\eta} \right) e^{-2b_2 v}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = 4\pi \rho \exp(-2b_1 u - 2b_2 v) \quad (4.11)$$

Пусть  $J(v)$  определяется по (4.4). Тогда из (4.10), (4.11) следует уравнение, совпадающее с (4.5), где константа  $\rho_0$  определяется уже через амплитуду магнитного потенциала

$$\eta 4\pi \rho_0 = b_2^2 (A_0^2 + B_0^2) \geq 0 \quad (4.12)$$

В частности, для азимутального пучка ( $b_1 = 0$ ) можно построить решение вида (4.7) при положительных значениях параметра  $\beta$ .

Таким образом, действие вихря в обобщенном импульсе плоского пучка оказывается эквивалентным компенсирующему действию периодического магнитного поля на безвихревой плоский пучок той же геометрии.

Пользуюсь случаем поблагодарить А. Н. Иевлеву за помощь в вычислительной и графической работе.

Поступила 9 VI 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сыровый В. А. О некоторых точных решениях уравнений стационарного моноэнергетического пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1965, № 6.
2. Данилов В. Н. К теории бриллюэновских электронных потоков. Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 11.
3. Harris L. A. Axially Symmetric Electron Beam and Magnetic Field Systems, Proc IRE, 1952, vol. 40, № 6.
4. Алямовский И. В. Электронные пучки и электронные пушки. «Советское радио», 1966.
5. Lomax R. I. Single Component Relativistic Space Charge Flow. J. Electronics and Control, 1958, vol. 5, № 6.
6. Данилов В. Н. К теории релятивистского магнетрона. Радиотехника и электроника, 1966, т. 11, № 12.
7. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разряженной плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1964, т. 4.
8. K e n t G. Generalized Brillouin Flow. Commun. and Electronics, 1960, vol. 48, № 5.
9. Овчаров В. Т. Уравнения электронной оптики для плоскосимметричных и осесимметричных электронных пучков с большой плотностью тока. Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 5.
10. M e l t e r V. Single — component Stationary Electron Flow under Space-Charge Conditions. J. Electronics, 1956, vol. 2, № 2.