

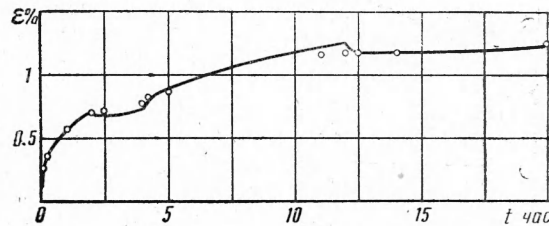
О ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ

Г. И. Брызгалин (Новосибирск)

Для описания поведения материалов в условиях ползучести при переменных напряжениях создано несколько типов теорий. Они удовлетворительно описывают процесс деформирования при довольно жестких ограничениях на изменение напряжений; причем рамки этих ограничений нельзя пока считать четко установленными. По-видимому, важны как поиски более универсальной теории, способной описывать ползучесть при резко меняющихся напряжениях, так и установление более точных границ применимости и усовершенствование существующих теорий ввиду их относительной простоты в математических расчетах.

Рассмотрим широко известные теории наследственности и упрочнения и отметим некоторые их особенности, необходимые для построения на их основе теории с более широкой областью применения. В каждой из этих теорий принято, что полная деформация складывается из мгновенной и временной составляющих. Последнюю, т. е. собственно деформацию ползучести обозначим $e(t)$, если она подчиняется теории наследственности, и $p(t)$, если она подчиняется теории упрочнения. Мгновенные деформации из рассмотрения исключим, кроме того, ограничимся некоторой постоянной температурой. При произвольно меняющихся со временем напряжениях $\sigma(t)$ деформация ползучести согласно теории наследственности выражается оператором Вольтерра

$$e(t) = \int_0^t K(t - \tau) f[\sigma(\tau)] d\tau \quad (1)$$



Фиг. 1. Ползучесть винипласта при растяжении (контрольный эксперимент). Напряжения в кг/мм^2 : 2.8 при $0 \text{ ч} < t < 2 \text{ ч}$; 2.5 при $2 \text{ ч} < t < 4 \text{ ч}$; 2.8 при $4 \text{ ч} < t < 12 \text{ ч}$; 2.5 при $12 \text{ ч} < t < 20 \text{ ч}$. Точки — эксперимент, кривая — уравнение (16)

По теории упрочнения деформация также представляется некоторым оператором, действующим на функции $\sigma(t)$, однако более распространена следующая запись:

$$\dot{p} = \Phi(\sigma, p) \quad (2)$$

Будем считать, что при $\sigma = 0$ функции $f(\sigma)$ и $\Phi(\sigma, p)$ обращаются в нуль или практически неотличимы от нуля.

В работе [1] отмечено, что теория упрочнения лучше согласуется с опытом при повышающихся напряжениях, а теорию наследственности можно применять для описания обратной ползучести.

Если подвергнуть образец ползучести при некотором постоянном напряжении σ_0 до момента времени τ_0 , а затем частично разгрузить его, то как для металлов, так и для полимеров можно наблюдать прекращение ползучести в течение некоторого времени. Сравним фиг. 5 работы [1] с экспериментальными точками фиг. 1 предлагаемой работы на участках времени от двух до двух с половиной и от двенадцати до пятнадцати часов. Если в момент τ_0 разгрузка будет полной, то начнется процесс обратной ползучести: накопленная деформация исчезает со временем, однако для большинства материалов значительная доля ее сохраняется в течение любого промежутка времени, на графиках кривая обратной ползучести (при $\sigma = 0$) будет иметь горизонтальную асимптоту, лежащую выше оси времени (фиг. 2б). Для металлов доля остаточной деформации больше, для полимеров меньше, но качественное сходство кривых возврата имеет место.

Рассмотрим, какое поведение предсказывают образцу во время обратной ползучести теории (1) и (2), которые основываются только на экспериментах с прямой ползучестью при постоянных напряжениях. Обозначим

$$\int_0^t K(t - \tau) d\tau \equiv \varphi(t), \quad \text{или} \quad K(t) = \dot{\varphi}(t) \quad (3)$$

Для ползучести при постоянном напряжении σ_0 (теория (1)) с учетом обозначения (3) дает зависимость

$$e(\sigma_0, t) = f(\sigma_0) \varphi(t) \quad (4)$$

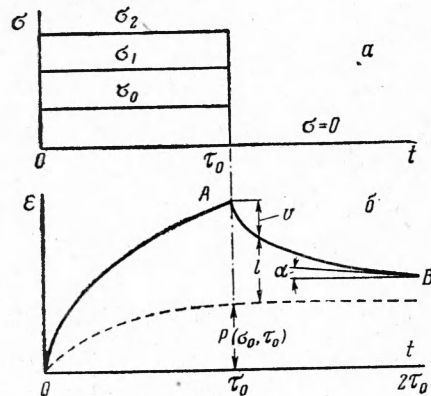
При интегрировании уравнения (1) для ступенчатой функции

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } t \leq \tau_0 \\ 0 & \text{при } t > \tau_0 \end{cases} \quad (5)$$

получается соотношение

$$e(t) = f(\sigma_0) [\varphi(t) - \varphi(t - \tau)] \quad (t > \tau_0) \quad (6)$$

выражающее изменение деформации ползучести при возврате согласно теории наследственности. Функция $\varphi(t)$ — обычно степенная с показателем, меньшим единицы, или логарифмическая. В равенстве (6) в обоих случаях $e \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. кривая возврата асимптотически приближается к оси времени. Значит вся деформация обратима и исчезнет после снятия напряжения практически полностью за достаточно большой промежуток времени.



Фиг. 2. Схема основного эксперимента на ползучесть при растяжении: *a* — изменение напряжений: $\sigma = \sigma_0$ при $0 \leq t \leq \tau_0$, $\sigma = 0$ при $t > \tau_0$. То же для уровней напряжения σ_1, σ_2 ; *b* — изменение деформаций для одного из уровней напряжения σ_0 . Сплошная линия — деформация ползучести, пунктирная — ее необратимая составляющая. $t_{\text{га}} = \dot{v}(\sigma_0, \tau_0)$

ляющие деформации, так как в таких испытаниях замеряется только их сумма. Следовательно, надо расширить основной эксперимент, включив в него испытания, в которых меняется только одна составляющая. Этому условию удовлетворяет обратная ползучесть при полностью снятых напряжениях, когда обратимая деформация исчезает, а необратимая остается неизменной. Геометрия кривой возврата *AB* (фиг. 2б) по существу определяется изменением обратимой составляющей, тогда как наличие необратимой составляющей задает лишь положение этой кривой как жесткого целого на том или ином расстоянии от оси времени.

Программу основного эксперимента предполагаем состоящей из двух частей. (А). Ползучесть при постоянных напряжениях $\sigma = \text{const}$ до некоторого момента времени τ_0 . (В). Полная разгрузка в момент τ_0 и обратная ползучесть.

На фиг. 2 схематически изображено изменение напряжений и деформаций в таком эксперименте. Если напряжения меняются согласно (5), то обратимая составляющая при $t > \tau_0$ уменьшается согласно (6).

Часть обратимой деформации, исчезнувшей за время $t - \tau_0$ после разгрузки, обозначим $v(\sigma_0, t - \tau_0)$. Ясно, что обратимая деформация, имеющаяся в образце в некоторый момент времени $t (t > \tau_0)$, равна разности между всей накопленной до разгрузки и исчезнувшей после разгрузки

$$e(t) = e(\sigma_0, \tau_0) - v(\sigma_0, t - \tau_0) \quad (7)$$

Заменяя $e(t)$ и $e(\sigma_0, \tau_0)$ при помощи равенств (6) и (4), получим

$$v(\sigma_0, \tau_0) = f(\sigma_0) [\varphi(\tau_0) - \varphi(t) + \varphi(t - \tau_0)] \quad (8)$$

Зададимся конкретным видом функции $\varphi(t)$ с некоторым количеством неизвестных постоянных. Выбрав несколько моментов времени $t_1, t_2, \dots (t > \tau_0)$ и на основе (8), составляя отношения вида

$$\frac{v(\sigma_0, t_1 - \tau_0)}{v(\sigma_0, t_2 - \tau_0)} = \frac{\varphi(\tau_0) - \varphi(t_1) + \varphi(t_1 - \tau_0)}{\varphi(\tau_0) - \varphi(t_2) + \varphi(t_2 - \tau_0)}$$

получим необходимое количество уравнений для определения постоянных функции $\varphi(t)$, значения v здесь берутся из эксперимента.

Ту же операцию можно проделать для других уровней напряжения: σ_1, σ_2 , осреднив затем полученные значения постоянных по всем напряжениям. Так как функция $\varphi(t)$ стала известной, то для каждого σ из равенства (8) можно найти значение $f(\sigma)$, т. е. восстановить полностью эту функцию.

Согласно теории упрочнения (2) при $\sigma = 0$ имеем $\dot{p} = 0$, т. е. в процессе возврата деформация p не меняется. Эта теория требует, чтобы деформация ползучести была полностью необратимой.

В реальном материале накапливаются, вообще говоря, как обратимые, так и необратимые деформации ползучести. Если допустить, что они независимы, то каждая из них должна подчиняться своему закону.

Для построения теории, учитывающей такое разделение деформаций, принимаем следующие основные гипотезы.

(а). Деформация ползучести $\varepsilon(t)$ представляет собой сумму независимых составляющих: обратимой $e(t)$ и необратимой $p(t)$

$$\varepsilon(t) = e(t) + p(t)$$

(б). Составляющая $e(t)$ подчиняется теории наследственности в виде (1).

(в). Необратимая составляющая $p(t)$ подчиняется теории упрочнения в виде (2).

Если, как обычно, принять за основной эксперимент испытание при постоянных напряжениях, то гипотезы (б) и (в) не дадут возможности практически разделить состав-

Таким образом, обратимая деформация полностью определена, найдены конкретные функции, характеризующие ее зависимость от времени и напряжения. Подставляя $\varphi(t)$ в (3), а затем $K(t - \tau)$ и $f(\sigma)$ в (1), получим закон изменения обратимых деформаций при произвольно меняющихся напряжениях.

Возвращаясь к первой части основного эксперимента — ползучести при постоянных напряжениях, — находим разность между всей деформацией ползучести и ее обратимой частью, которая представляет собой необратимую деформацию, накопленную при постоянных напряжениях

$$p(\sigma_0, t) = \epsilon(\sigma_0, t) - f(\sigma_0) \varphi(t) \quad (9)$$

Аналогично для других уровней напряжения σ_1, σ_2 . Полученная зависимость необратимой составляющей от времени и напряжения обобщается на случай переменных напряжений обычным способом по теории упрочнения.

Методика получения характеристик обратимой деформации может быть значительно упрощена, если $\varphi(t) \equiv t^n$ и скорость деформации при возврате достаточно велика. В этом случае уравнение (8) получит вид

$$v(\sigma_0, t - \tau_0) = f(\sigma_0) [\tau_0^n - t^n + (t - \tau_0)^n]$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\dot{v}(\sigma_0, t - \tau_0) = nf(\sigma_0) [-t^{n-1} + (t - \tau_0)^{n-1}]$$

Для момента времени $t = 2\tau_0$ из последних равенств имеем

$$n = \frac{2\tau_0 \dot{v}(\sigma_0, \tau_0)}{v(\sigma_0, \tau_0)}, \quad f(\sigma_0) = \frac{v(\sigma_0, \tau_0) \tau_0^n}{2 - 2^n} \quad (10)$$

Для обобщения теории на случай сложного напряженного состояния можно воспользоваться результатами [2] для обратимых деформаций и [1] для необратимых.

Согласно предлагаемому способу были проведены эксперименты на кратковременную ползучесть технического листового винипласта. Образцы имели форму двойной лопатки, размеры рабочей части $10 \times 10 \times 3$ мм. Для стабилизации материала готовые образцы подвергались отжигу при температуре 90°C в течение десяти часов с последующим остыванием вместе с термостатом. Температура испытаний $50^\circ \pm 1^\circ \text{C}$. Предварительный прогрев печи вместе с образцом длился три часа. Опыты производились на машине рычажного типа, созданной в Институте гидродинамики.

Программа основного эксперимента состояла из опытов на ползучесть при растяжении с постоянными нагрузками (напряжения 1.5, 2.5, 2.8, 3.0 кг/мм²) в течение трех часов, мгновенной разгрузки и обратной ползучести не менее трех часов (фиг. 3); контрольный эксперимент — ползучесть при ступенчато меняющихся нагрузках. Для одного образца начальное напряжение составляло 2.8 кг/мм², затем следовали частичные разгрузки и догрузки порядка 10% начального напряжения (фиг. 1); для двух других образцов начальная нагрузка была 3 кг/мм², а последующая частичная разгрузка и догрузка — 50% начального.

Из построения кривых ползучести при $\sigma = \text{const}$ в логарифмических координатах получена зависимость

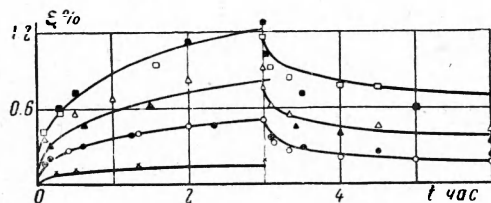
$$\epsilon(\sigma, t) = F(\sigma) \cdot t^{0.33} \quad (11)$$

По кривым возврата (фиг. 3) определены $v(\sigma_0, \tau_0)$, $\dot{v}(\sigma_0, \tau_0)$ для каждого образца, причем $\dot{v}(\sigma_0, \tau_0)$ определялись как тангенсы углов наклона секущей, проходящей через точку $t = 2\tau_0$, $v = v(\sigma_0, \tau_0)$ и несколько предыдущих точек, к отрицательному направлению оси времени (см. схему на фиг. 2б). Принято, что $\varphi(t) \equiv t^n$ и по формулам (10) получены значения n и $f(\sigma_0)$, соответствующие отдельным образцам и напряжениям. Для значений n взято среднее $n = 0.33$, а по значениям $f(\sigma)$ построена аппроксимирующая функция $f(\sigma) = \sigma^{2.3}$. Окончательно получим

$$e(\sigma, t) = \sigma^{2.3} t^{0.33} \quad (t \leq \tau_0, \sigma = \text{const}) \quad (12)$$

Заметим, что разделение переменных в (11) и совпадение функций, выражающих зависимость от времени для всей деформации ползучести и обратимой ее части, существенно облегчает задачу нахождения зависимости для необратимой деформации

$$p(\sigma, t) = [F(\sigma) - \sigma^{2.3}] t^{0.33} \quad (t \leq \tau_0, \sigma = \text{const})$$



Фиг. 3. Ползучесть винипласта при растяжении с разгрузкой (основной эксперимент). Уровни напряжений (снизу вверх): 1.5, 2.5, 2.8, и 3.0 в кг/мм². Кривые — зависимости (14), (15), описывающие этот эксперимент; точки: крестик — эксперименту при $\sigma = 1.5$; светлые и темные кружочки, треугольники и четырехугольники — двум экспериментам при значениях $\sigma = 2.5, 2.8$ и 3.0 кг/мм².

Из разности между экспериментальными значениями $F(\sigma)$ и значениями $\sigma^{2.3}$ обработанной в полулогарифмических координатах, найдена зависимость необратимых деформаций от напряжений. Окончательно получим

$$p(\sigma, t) = 1.0 \cdot 10^{-5} \exp(4.6\sigma) t^{0.33} \quad (13)$$

$(t \leq \tau_0, \sigma = \text{const})$

Во всех формулах за единицу деформации принята относительная деформация, равная 0.0001; за единицу времени — 1 мин, за единицу напряжения — 1 кг/мм².

Сплошные кривые на фиг. 3 представляют результаты основного эксперимента:

1) при $t \leq \tau_0$ деформация ползучести равна сумме накапливаемых при постоянных напряжениях обратимой и необратимой составляющих

$$\varepsilon(t) = [\sigma^{2.3} + 10^{-5} e^{4.6\sigma}] t^{0.33} \quad (14)$$

Фиг. 4. Ползучесть винилпласта при растяжении (контрольный эксперимент). Точки — эксперимент, кривые — уравнение (16). Два образца испытаны по одной программе. Напряжения в кг/мм²:

$$\sigma = 3 \quad \text{при } 0 \text{ ч} < t < 2 \text{ ч}$$

$$\sigma = 1.5 \quad \text{при } 2 \text{ ч} < t < 5 \text{ ч}$$

$$\sigma = 3 \quad \text{при } 5 \text{ ч} < t < 9 \text{ ч}$$

2) при $t \geq \tau_0$ деформация ползучести равна сумме необратимой составляющей, накопленной к моменту разгрузки (см. (13) при $t = \tau_0$), и не успевшей исчезнуть обратимой составляющей (см. (6) при $\varphi(t) = t^{0.33}$ и $f(\sigma) = \sigma^{2.3}$)

$$\varepsilon = 10^{-5} \exp(4.6\sigma) \tau_0^{0.33} + \sigma^{2.3} [t^{0.33} - (t - \tau_0)^{0.33}] \quad (15)$$

В соответствии с гипотезой (б) для произвольно меняющихся напряжений

$$\varepsilon(t) = 0.33 \int_0^t (t - \tau)^{-0.67} (\sigma(\tau))^{2.3} d\tau$$

В соответствии с гипотезой (в), дифференцируя (13) по времени и исключая из полученного время, найдем

$$\dot{p}(t) = 0.33 p^{-2.03} \exp(13.94\sigma - 34.89)$$

Интегрируя последнее уравнение и пользуясь гипотезой (а), получим связь между деформацией ползучести и напряжением

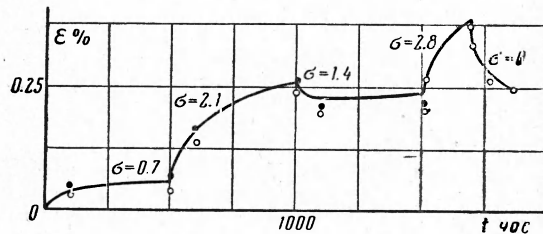
$$\varepsilon(t) = 0.33 \int_0^t (t - \tau)^{-0.67} \sigma(\tau)^{2.3} d\tau + \left[\int_0^t \exp[13.94\sigma(\tau) - 34.89] d\tau \right]^{-0.33} \quad (16)$$

На фиг. 1 и 4 представлены результаты контрольного эксперимента, где сплошными линиями обозначена зависимость (16), точками — экспериментальные данные.

В работе [3] описываются результаты испытаний некоторых пластмасс на ползучесть при растяжении. Программа — ступенчато меняющиеся нагрузки. Продолжительность опытов — порядка 2000 ч. Представляет интерес обработка результатов этих испытаний на основе гипотез (а), (б), (в); однако необходимого количества опытов с полной разгрузкой в этой работе не публикуется. Следовательно, для разделения деформаций надо будет принять дополнительную гипотезу.

Для обработки выбраны результаты опытов с поливинилхлоридом, по-видимому, наиболее надежные. Для ползучести при постоянных напряжениях в [3] принято

$$\varepsilon = mt^n \text{sh} \frac{\sigma}{\sigma^m}$$



Фиг. 5. Ползучесть поливинилхлорида при растяжении, обработка эксперимента Финдли и Козла [3]. Точки сняты с кривых ползучести фиг. 4 работы [3], мгновенная деформация исключена. Сплошная линия соответствует уравнению (18). Напряжения в фунтах на квадратный дюйм (psi): 1000 при $0 \text{ ч} < t < 504 \text{ ч}$, 3000 при $504 \text{ ч} < t < 1008 \text{ ч}$, 2000 при $1008 \text{ ч} < t < 1512 \text{ ч}$, 4000 при $1512 \text{ ч} < t < 1692 \text{ ч}$, 0 при $1692 \text{ ч} < t < 1860 \text{ ч}$. Здесь эти значения приведены приближенно в кг/мм².

где для выбранного материала $m = 0,018\%$, $\sigma_m = 2100$ psi, $n = 0.3109$; время в часах. Предполагаем, что при постоянных напряжениях составляющие деформации ползучести разделены следующим образом:

$$e(\sigma, t) = \frac{m}{\sigma_m} \sigma t^n, \quad p(\sigma, t) = m \left(\operatorname{sh} \frac{\sigma}{\sigma_m} - \frac{\sigma}{\sigma_m} \right) t^n \quad (17)$$

Обобщая эти равенства на случай переменных напряжений при помощи гипотез (б) и (в), получим уравнение, аналогичное (16)

$$\varepsilon(t) = \frac{mn}{\sigma_m} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} \sigma(\tau) d\tau + \left[m \int_0^t \left(\operatorname{sh} \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_m} - \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_m} \right) d\tau \right]^n \quad (18)$$

На фиг. 5 зависимость (18) сравнивается с экспериментом при ступенчато меняющихся нагрузках. Для каждого участка с экспериментальных кривых фиг. 4 работы [3] снято по несколько точек. Мгновенные деформации исключены.

Результаты обработки аналогичного эксперимента с другой программой ступенчатых догрузок, не представленные здесь, дают такое же хорошее совпадение теории и эксперимента. Это подтверждает, в частности, принятое в (17) и отмеченное ранее в работе [1] предположение о линейной зависимости обратимых деформаций от напряжения. Существенная нелинейность, полученная в (12), по-видимому, объясняется относительно высоким уровнем напряжений и температуры для выбранного материала.

Поступила 5 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
2. Розовский М. И. О нелинейных интегральных уравнениях ползучести бетонной цилиндрической оболочки, находящейся под внешним давлением. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 9.
3. Findley W. and Kosla G. Application of the Superposition Principle and Theories of Mechanical Equation of State, Strain, and Time Hardening to Creep of Plastics under Changing Loads, Journal of Applied Physics, July 1955, vol. 26, p. 7.

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЕЩИНАХ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА

Р. Л. Салганик (Москва)

В рамках общей теории трещин, образующихся при хрупком разрушении, развитой Г. И. Баренблаттом [1,2], рассматриваются две задачи: о дискообразной и бесконечной кольцевой трещинах продольного сдвига в безграничном упругом теле. Трещины находятся под действием распределенных по их поверхностям скручивающих касательных напряжений. Первая из этих задач была предложена Л. А. Галиным.

Отметим, что осесимметричная контактная задача для случая, когда есть только касательные напряжения, рассматривалась в работе [3]. Отметим также, что рассмотрение трещины с приложенными к ее поверхности силами можно считать составной частью задачи о свободной от напряжений трещине, развивающейся под действием приложенных к телу внешних сил. В этом случае поле упругих элементов разлагается на два: одно вычисляется как результат действия внешних сил на сплошное тело, а другое — как результат присутствия в теле трещины, нагруженной напряжениями, равными по величине и обратными по знаку тем, которые в этом месте имели первое поле.

§ 1. Вывод формулы для радиуса дискообразной трещины продольного сдвига.

1°. Рассмотрим безграничное тело и дискообразную трещину в нем (фиг. 1). Ее радиус обозначим через a . Ось z цилиндрической системы координат r, θ, z направим перпендикулярно к плоскости трещины через ее центр, который примем за начало отсчета. К поверхностям трещины приложены только касательные напряжения $\tau_{z\theta}$, в каждой точке равные одно другому по величине и противоположные по знаку. Вектор смещения имеет единственную отличную от нуля компоненту v по оси θ . Из-за осевой симметрии v не зависит от θ , а из-за антисимметрии относительно плоскости трещины $z=0$ величина v — нечетная функция z . Из последнего и непрерывности смещения в сплошном теле следует, что в плоскости трещины вне ее $v = 0$. Таким образом, учитывая уравнения равновесия и связь между напряжениями и деформациями, приходим к следующей постановке задачи для v в безразмерных координатах $\xi = z/a, \rho = r/a$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{v}{\rho^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{a}{\mu} \varphi(\rho) \equiv -g(\rho) \quad (0 < \rho < 1), \quad v = 0 \quad (1 < \rho < \infty) \quad \text{при } \xi = 0 \quad (1.2)$$

Здесь μ — модуль сдвига, $\varphi(\rho) = \tau_{z\theta}$ — заданная функция.