РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

А В Т О М Е Т Р И Я

2008, том 44, № 3

УДК 519.21 : 62-519

ЗАДАЧА О «РАЗЛАДКЕ» ДЛЯ СКАЧКООБРАЗНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА*

Г. И. Салов

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: sgi@ooi.sscc.ru

Дана байесовская постановка задачи скорейшего обнаружения появления изменений («разладки») в вероятностных характеристиках наблюдаемого скачкообразного случайного процесса со значениями в достаточно общем фазовом пространстве. Предполагается, что момент появления разладки не зависит от течения наблюдаемого процесса и совпадает с моментом одного из скачков этого процесса. Получены уравнения для апостериорной вероятности наличия разладки, носящие рекуррентный характер, и установлена нижняя граница для оптимального момента объявления «тревоги» о происшедшей разладке, минимизирующего сумму вероятности ложной тревоги (в отсутствие разладки) и среднего времени задержки с объявлением тревоги.

Посвящается 50-летию
Института автоматики и электрометрии СО РАН

Введение. В работах [1, 2] и других рассматривались задачи скорейшего обнаружения момента изменения («разладки») в вероятностных характеристиках пуассоновского случайного процесса. В [3, 4] были получены рекуррентные уравнения для апостериорной вероятности наличия разладки более сложного скачкообразного процесса, но изменяющегося, как и пуассоновский, только скачками величины +1.

Однако для описания реальных наблюдаемых процессов (сигналов) часто необходимо использовать более общие скачкообразные случайные процессы. Приведем пример важного случая, возникающего при дистанционном управлении некоторой системой и при дистанционном обнаружении объекта.

П р и м е р. Предположим, что непрерывно ведутся наблюдения за работой некоторой физической системы, функционирующей следующим образом. В начальный момент времени $T_0 = 0$ система делает начальные измере-

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-07-00085а).

ния ряда своих параметров и (случайных) параметров окружающей среды и часть результатов этих измерений, в числе которых могут быть даже изображения, передает наблюдателю по каналу с помехами, имеющими случайный характер. Таким образом, наблюдатель получает случайный элемент Z_0. Затем система в соответствии со всеми результатами измерений в момент T_0 выполняет нужные операции, например меняет свою ориентацию в (физическом) пространстве и/или перемещается на определенное расстояние, зависящие от результатов этих измерений, на что уходит некоторое случайное время. После этого в момент T_1 система делает очередные измерения, передает наблюдателю случайный элемент Z_1 и выполняет соответствующие операции, зависящие теперь уже от результатов измерений в момент T_1, и т. д.

В некоторый случайный момент времени появляются изменения в вероятностных характеристиках измеряемых системой параметров. Момент T_i первого измерения после появления этих изменений и есть момент появления разладки θ поступающего к наблюдателю скачкообразного случайного процесса Z.

1. Постановка задачи. Основные результаты. Будем считать, что наблюдается чисто скачкообразный случайный процесс $Z=\{Z(t),\ t\geq 0\}$, принимающий значения в произвольном измеримом (фазовом) пространстве $(\mathcal{Z},\ \Sigma_{\mathcal{Z}})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\Sigma_{\mathcal{Z}}$ подмножеств пространства $\mathcal{Z}$ [5, с. 267]. Отметим, что такое общее предположение объясняется стремлением охватить все возможные на практике случаи, в частности процесс, состоянием которого в каждый из моментов времени является (случайное) изображение. Для простоты изложения предположим, что процесс Z находится в некотором фиксированном начальном состоянии $Z_0\equiv z_0$, $z_0\in\mathcal{Z}$, до случайного момента времени T_1, когда происходит первый скачок и процесс переходит в случайное состояние Z_1. Во второй случайный момент T_2 процесс переходит в новое случайное состояние Z_2 и т. д. Имеем

$$Z(t)=\sum_{n=0}^{\infty} Z_n I\{T_n\leq t<T_{n+1}\},$$

где $\{T_n,\ n\geq 1\}$ – возрастающая последовательность случайных моментов времени, для которой $\lim T_n=\infty$ почти наверное (п. н.); $\{Z_n\equiv Z(T_n),\ n\geq 1\}$ – последовательность случайных элементов (см. [5–7]), принимающих значения из $(\mathcal{Z},\ \Sigma_{\mathcal{Z}})$. Будем считать также, что все встречающиеся случайные величины и элементы определены на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P})$ и с вероятностью 1 за каждый конечный промежуток времени происходит лишь конечное число скачков процесса Z.

Пусть $S_0=0,\ S_n=T_n-T_{n-1},\ n=1,2,\ldots$. Предположим, что в некоторый неизвестный заранее и не зависящий от течения процесса Z случайный момент θ, совпадающий с моментом одного из скачков процесса Z, могут появиться изменения в (условных) распределениях последовательности пар (S_n, Z_n).

Будем предполагать далее, что с вероятностью $\pi\geq 0$ разладка может появиться уже в самом начале наблюдений $(\theta=T_0=0)$, даны априорные вероятности

$$\mathbf{P}(\theta=T_i)=p_i,\qquad \mathbf{P}(\theta\geq T_i)=q_i,\quad i=1,2,\ldots, \tag{1.1}$$

и выполнено условие

(A). Для $B \in \Sigma_{\mathcal{Z}}$ пары (S_n, Z_n), $n \geq 1$, имеют следующие регулярные условные распределения [5, 6]:

$$\mathbf{P}\{S_{n+1} \leq s,\ Z_{n+1} \in B \mid \theta = T_i;\ Z_0 = z_0, S_1 = s_1, Z_1 = z_1, \ldots, S_n = s_n, Z_n = z_n\} =$$

$$= \begin{cases} F(s, B \mid s_n, z_n), & i > n+1, \\ \Phi^0(s, B \mid s_n, z_n), & i = n+1, \\ \Phi(s, B \mid s_n, z_n), & i < n+1, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где возможны, вообще говоря, два случая:

(i) $F = \Phi^0$, $F \neq \Phi$;

(ii) $F \neq \Phi^0$, $F \neq \Phi$, $\Phi^0 \neq \Phi$.

Отметим, что хотя условие (A) означает, что пары (S_n, Z_n) до и после момента разладки образуют две однородные марковские последовательности, сам процесс Z как до момента разладки, так и после не обязательно будет марковским. Будем считать, что момент θ имеет конечное среднее значение $\mathbf{E}\theta < \infty$.

Проблема состоит в том, чтобы, наблюдая за течением процесса Z, обнаружить разладку как можно скорее после ее появления.

Пусть $R_+ = [0, \infty)$, $\mathcal{Y} \overset{\text{def}}{=} R_+ \times \mathcal{Z}$ – прямое произведение пространств R_+ и $\mathcal{Z}$, а $\Sigma_{\mathcal{Y}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}(R_+) \otimes \Sigma_{\mathcal{Z}}$ – произведение их σ-алгебр (σ-алгебра в $\mathcal{Y}$). Обозначим для краткости $Y_0 = Z_0$, $Y_i = (S_i, Z_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Если этими же буквами F, Φ^0 и Φ обозначить соответствующие переходные вероятности, то совместное распределение случайных элементов $(Y_1, \ldots, Y_k)$ при начальном условии $Y_0 = z_0$ можно записать в виде

$$\mathbf{P}\{Y_1 \in dy_1, \ldots, Y_k \in dy_k \mid \theta = T_i, Y_0 = z_0\} =$$

$$= F(dy_1 \mid z_0) \ldots F(dy_{i-1} \mid y_{i-2}) \Phi^0(dy_i \mid y_{i-1}) \Phi(dy_{i+1} \mid y_i) \ldots \Phi(dy_k \mid y_{k-1}).$$

С процессом Z связано неубывающее семейство (или поток) σ-алгебр $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, где $\mathcal{F}_t$ – пополнение (по мере $\mathbf{P}$) σ-алгебры $\sigma\{Z(s);\ s \leq t\}$ подмножеств пространства Ω, порожденной элементами $Z(s)$ при $s \leq t$ [5–7]. Через $\mathcal{F}_\infty$ обозначим наименьшую σ-алгебру, содержащую каждую из σ-алгебр $\mathcal{F}_t$.

Пусть τ – марковский момент (момент остановки) относительно потока $\mathbf{F}$ [7]. В байесовской постановке задачи скорейшего обнаружения разладки, которая и будет рассматриваться, «риск» (или «ущерб») $\rho(\tau)$, связанный с объявлением тревоги о происшедшей разладке в момент τ, допускает такое представление (см. формулу (1.7), приведенную далее), из которого видно, что оптимальное решение, минимизирующее риск, определяется по значениям процесса апостериорной вероятности наличия разладки

$$\pi(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\theta \leq t \mid Z(s), s \leq t\} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\theta \leq t \mid \mathcal{F}_t\}.$$

Пусть $X = \{X(t) \equiv I\{\theta \le t\},\ t \ge 0\}$. Тогда $\pi(t)$ можно рассматривать и как оптимальную (в среднеквадратичном смысле) оценку $\hat{X}(t)$ величины $X(t)$ ненаблюдаемого процесса X в момент $t \ge 0$ по наблюдениям $\{Z(s), 0 \le s \le t\}$.

Поэтому наша первая задача – получение уравнений, удобных для определения (подсчета) значений процесса $\Pi = \{\pi(t), t \ge 0\}$.

Пусть $f(y \mid y_n)$, $\varphi^0(y \mid y_n)$, $\varphi(y \mid y_n)$ – плотности (условных) распределений $F(dy \mid y_n), \Phi^0(dy \mid y_n), \Phi(dy \mid y_n)$ соответственно относительно некоторой σ-конечной меры m на $\Sigma_{\mathcal{Y}}$; всегда можно взять плотности относительно меры $\hat{m} = \hat{m}(dy \mid y_n)$, отвечающей (условному) распределению

$$A(dy \mid y_n) = \frac{1}{3}[F(dy \mid y_n) + \Phi^0(dy \mid y_n) + \Phi(dy \mid y_n)].$$

Будем считать, что плотности $f(y \mid y_n), \varphi^0(y \mid y_n)$ и $\varphi(y \mid y_n)$ $\Sigma^2_{\mathcal{Y}}$-измеримы (по совокупности переменных).

Введем в рассмотрение и (условные) распределения промежутков между последовательными скачками процесса Z:

$$F(s \mid s_n, z_n) = F(s, \mathcal{Z} \mid s_n, z_n); \quad \Phi(s \mid s_n, z_n) = \Phi(s, \mathcal{Z} \mid s_n, z_n). \qquad (1.3)$$

Следующее утверждение позволяет легко (рекуррентным образом) вычислять значения процесса апостериорной вероятности $\Pi = \{\pi(t),\ t \ge 0\}$.

Теорема 1.1. В добавление к (1.1) предположим, что выполнено условие (A), $\mathbf{P}(\theta \le T_n) > 0,\ q_{n+1} > 0$ и пусть $\pi_n = \pi(T_n),\ n = 0,1,\dots$. Тогда $\pi_0 = \pi$ и с вероятностью 1:

(i) для каждого $t \in [T_n, T_{n+1}),\ n = 0,1,\dots,$

$$\pi(t) = \left\{\pi_n[1 - \Phi(t - T_n \mid S_n, Z_n)] + (1 - \pi_n)[1 - F(t - T_n \mid S_n, Z_n)]\right\}^{-1} \times$$
$$\times \pi_n[1 - \Phi(t - T_n \mid S_n, Z_n)]; \qquad (1.4)$$

(ii) π_{n+1} определяется рекуррентной формулой

$$\pi_{n+1} = \left\{\pi_n \varphi(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid S_n, Z_n) + \frac{p_{n+1}(1-\pi_n)}{q_{n+1}} \varphi^0(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid S_n, Z_n)\right\} \times$$
$$\times \left\{\pi_n \varphi(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid S_n, Z_n) + \frac{(1-\pi_n)}{q_{n+1}}[p_{n+1}\varphi^0(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid S_n, Z_n) + \right.$$
$$\left. + q_{n+2} f(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid S_n, Z_n)]\right\}^{-1}. \qquad (1.5)$$

Обратимся теперь к задаче оптимального обнаружения разладки, т. е. к задаче выбора по течению процесса Z (марковского) момента τ подачи сигнала тревоги о происшедшей разладке, в байесовской постановке.

Обозначим через $\mathbf{P}^{\pi, z}$ и $\mathbf{E}^{\pi, z}$ условную вероятность и условное математическое ожидание соответственно при начальном условии $(\pi(0), Z(0)) = (\pi, z)$.

Следуя [8, гл. 4, § 3 и 4], в качестве величины, характеризующей риск при подаче сигнала тревоги в момент τ, будем рассматривать величину

$$\rho^{\pi, z}(\tau) = \mathbf{P}^{\pi, z}\{\tau < \theta\} + c\,\mathbf{E}^{\pi, z}\max\{0, \tau - \theta\}, \tag{1.6}$$

где $c > 0$ – некоторая константа.

По аналогии с [8] для данных $\pi \in [0,1]$ и $z \in \mathcal{Z}$ момент остановки $\tau^* = \tau^*_{\pi, z}$ будем называть (π, z)-байесовским, если

$$\rho^{\pi, z}(\tau^*_{\pi, z}) = \rho^{\pi, z} \equiv \inf \rho^{\pi, z}(\tau),$$

где inf берется по классу всех марковских моментов $\tau \in \mathcal{T}(\mathbf{F})$ (относительно потока σ-алгебр $\mathbf{F}$).

Пусть $\pi^{\pi, z}(t) = \mathbf{P}^{\pi, z}\{\theta \le t \mid \mathcal{F}_t\}$. Аналогично выводам в случаях с пуассоновским и винеровским процессами (см., например, [2, 8]) нетрудно показать, что риск (1.6) допускает представление

$$\rho^{\pi, z}(\tau) = \mathbf{E}^{\pi, z}\left\{1 - \pi^{\pi, z}(\tau) + c\int_0^\tau \pi^{\pi, z}(s)\,ds\right\}, \tag{1.7}$$

а, значит, inf достаточно брать по классу

$$\mathcal{T}^1 = \left\{\tau \in \mathcal{T}(\mathbf{F}) : \mathbf{E}^{\pi, z}\int_0^\tau \pi^{\pi, z}(s)\,ds < \infty\right\}.$$

Поскольку

$$\mathbf{E}^{\pi, z}\int_0^\tau \pi^{\pi, z}(s)\,ds = \mathbf{E}^{\pi, z}\max\{\tau - \theta, 0\}$$

и по предположению $\mathbf{E}^{\pi, z}\theta < \infty$, то класс $\mathcal{T}^1$ совпадает с классом марковских моментов $\tau \in \mathcal{T}(\mathbf{F})$, для которых $\mathbf{E}^{\pi, z}\tau < \infty$.

Учитывая (1.7), естественно предположить, что оптимальное правило задается моментом первого достижения процессом $\Pi^{\pi, z} = \{\pi^{\pi, z}(t),\ t \ge 0\}$ некоторого уровня, возможно, зависящего, в частности, от $Z(t-)$ и/или от $Z(t)$ (ср. [9]). В работах [1, 2] такое предположение доказано в случае пуассоновского скачкообразного процесса. Для более общего скачкообразного случайного процесса продвижение встречается с весьма большими трудностями. Поэтому полезной может оказаться следующая оценка снизу для (π, z)-байесовского момента остановки τ^*.

Обозначим через $f(s \mid s_n, z_n)$ (условную) плотность относительно меры Лебега (если она существует) функции распределения $F(s \mid s_n, z_n)$ и положим $a^X(0) = 0$,

$$a^X(t) = \sum_{n \geq 0} I\{T_n < t \leq T_{n+1}\} \frac{p_{n+1} f(t - T_n \mid S_n, Z_n)}{q_{n+1}[1 - F(t - T_n \mid S_n, Z_n)]}. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. В добавление к (1.1) предположим, что выполнено условие (A) и существует непрерывная справа функция плотности $f(s \mid s_n, z_n)$. Тогда (π, z)-байесовский момент остановки

$$\tau^*_{\pi, z} \geq \inf\left\{ t \geq 0 : \pi^{\pi, z}(t) \geq \frac{a^X(t)}{c + a^X(t)} \right\} \quad (\mathbf{P}^{\pi, z} - \text{п. н.}). \tag{1.9}$$

Дополнительные исследования (в марковском случае) показывают, что улучшить (увеличить) оценку, определяемую правой частью (1.9), вообще говоря, невозможно.

Приведенные утверждения дополняют и уточняют результаты, анонсированные в [10, 11].

2. Доказательство теорем 1.1 и 1.2. Моменты T_n скачков процесса Z являются марковскими моментами (моментами остановки) относительно потока $\mathbf{F}$ (см., например, [12]). В силу леммы 2.2 из [12] σ-алгеброй событий, «предшествующих моменту остановки» T_n, т. е. таких событий $A \in \mathcal{F}_\infty$, для которых $A \cap \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \geq 0$, является

$$\mathcal{F}_{T_n} = \sigma\{Z_0, (T_1, Z_1), \ldots, (T_n, Z_n)\} = \sigma\{Z_0, (S_1, Z_1), \ldots, (S_n, Z_n)\}.$$

Обозначим для краткости $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{T_n}$.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.1 ([13, с. 286]). Пусть $Z = \{Z(t),\ t \geq 0\}$ – кусочно-постоянный непрерывный справа случайный процесс со значениями в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{Z}, \Sigma_{\mathcal{Z}})$. Тогда порожденный им поток σ-алгебр $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ непрерывен справа, т. е. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ при любом $t \geq 0$, где $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$. Кроме того, если T – момент остановки относительно потока $\mathbf{F}$, то

$$\mathcal{F}_T = \sigma\{Z(s \wedge T),\ s \in R_+\}.$$

Из теорем 4 и 5 в [14], полученных для менее общего случая: $\mathcal{Z} \equiv R^n$, вытекает следующее представление для условного математического ожидания.

Теорема 2.1. Пусть ξ – случайная величина с $\mathbf{E}|\xi| < \infty$ и T – конечный марковский момент относительно потока σ-алгебр $\mathbf{F}$. Тогда $\mathbf{P}$ – п. в. на множестве $\{\omega \in \Omega:\ T_n(\omega) \leq T(\omega) < T_{n+1}(\omega)\}$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_T\}(\omega) = \frac{\mathbf{E}\{\xi I\{T_n \leq T < T_{n+1}\} \mid \mathcal{F}_n\}(\omega)}{\mathbf{E}\{I\{T_n \leq T < T_{n+1}\} \mid \mathcal{F}_n\}(\omega)}. \tag{2.1}$$

Для дальнейшего исследования важным будет и другое представление. Пусть случайная величина ξ положительна и интегрируема. Введем на σ-алгебре $\mathcal{F}_n$ три меры:

$$\lambda_n(B) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}(B),$$

$$\mu_n(B) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_B I\{T_n \le T < T_{n+1}\}\, d\mathbf{P},$$

$$\mu_n^{\xi}(B) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_B \xi I\{T_n \le T < T_{n+1}\}\, d\mathbf{P} = \int\limits_B \xi\, d\mu_n.$$

Мера μ_n^{ξ}, очевидно, абсолютно непрерывна относительно меры μ_n ($\mu_n^{\xi} \ll \ll \mu_n$), а мера μ_n абсолютно непрерывна относительно меры λ_n ($\mu_n^{\xi} \ll \mu_n \ll \ll \lambda_n$). Поэтому в соответствии с определением условного математического ожидания относительно σ-алгебры (см. [5, 6]) математическим ожиданием в числителе (2.1) является производная Радона – Никодима $d\mu_n^{\xi}/d\lambda_n$, а в знаменателе – $d\mu_n/d\lambda_n$. Отсюда в силу пункта b) леммы из [6, с. 247] вытекает следующее представление.

Теорема 2.2. Пусть ξ – неотрицательная случайная величина с $\mathbf{E}\xi < \infty$ и T – конечный марковский момент относительно потока σ-алгебр $\mathbf{F}$. Тогда $\mathbf{P}$ – п. в. на множестве $\{\omega \in \Omega\colon T_n(\omega) \le T(\omega) < T_{n+1}(\omega)\}$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_T\}(\omega) = \frac{d\mu_n^{\xi}}{d\mu_n}(\omega). \tag{2.2}$$

Дадим простое независимое доказательство теоремы 2.2, справедливое для рассматриваемого здесь более общего пространства значений скачкообразного случайного процесса Z. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2 ([14, теорема 1]). Для любого марковского момента T относительно потока σ-алгебр $\mathbf{F}$ и каждого $n \ge 1$

$$\mathcal{F}_T \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\} = \mathcal{F}_n \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\},$$

или, другими словами, для каждого множества $A \in \mathcal{F}_T$ найдется множество $B \in \mathcal{F}_n$ такое, что

$$A \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\} = B \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\}, \tag{2.3}$$

верно также и обратное.

Доказательство леммы в рассматриваемом здесь более общем случае аналогично доказательству, данному в [14]. Для полноты изложения приведем схему этого доказательства.

Очевидно, что множество

$$\{Z(s \wedge T) \in D_s\} \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\}$$

является объединением множеств

$$\{Z_k \in D_s\,,\ T_k \le s < T_{n+1}\} \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\}, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{2.4}$$

и множества

$$\{Z_n \in D_s\,,\ T_n \le s\} \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\}. \tag{2.5}$$

Но каждое из множеств (2.4) и (2.5) является множеством вида

$$B \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\}, \quad B \in \mathcal{F}_n. \tag{2.6}$$

Тем самым доказано, что соотношение (2.3) справедливо для $A = \{Z(s \wedge T) \in$ $\in D_s\}$. Далее, класс множеств A, для которых существует множество $B \in \mathcal{F}_n$ такое, что имеет место (2.3), является σ-алгеброй, а значит, в соответствии с изложенным выше и леммой 2.1 он содержит $\mathcal{F}_T$.

Обратно, пусть $B \in \mathcal{F}_n$. Тогда

$$B \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\} = B \cap \{T_n \le T\} \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\} = A \cap \{T_n \le T < T_{n+1}\}.$$

Но в силу [7, гл. IV, T35] множество $A = B \cap \{T_n \le T\} \in \mathcal{F}_T$. Лемма доказана.

Независимое доказательство теоремы 2.2. Пусть $\Omega_n = \{T_n \le T < T_{n+1}\}$ и $\chi_n = I\{\Omega_n\}$. Надо показать, что

$$\chi_n \mathbf{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_T\} = \chi_n \frac{d\mu_n^{\xi}}{d\mu_n} \quad (\mathbf{P} - \text{п. н.}).$$

Соответственно свойствам моментов остановки событие $\{T_n \le T < T_{n+1}\} \in$ $\in \mathcal{F}_T$ (см., например, [7]), а значит, случайная величина χ_n является $\mathcal{F}_T$-измеримой. Отсюда в силу свойств условного математического ожидания

$$\chi_n \mathbf{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_T\} = \mathbf{E}\{\chi_n \xi \mid \mathcal{F}_T\} \quad (\mathbf{P} - \text{п. н.}).$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\mathbf{E}\{\chi_n \xi \mid \mathcal{F}_T\} = \chi_n \frac{d\mu_n^{\xi}}{d\mu_n} \quad (\mathbf{P} - \text{п. н.}). \tag{2.7}$$

Убедимся сначала, что правая часть (2.7) является $\mathcal{F}_T$-измеримой случайной величиной. По теореме Радона – Никодима величина $d\mu_n^{\xi}/d\mu_n(\omega)$ неотрицательна и $\mathcal{F}_n$-измерима. Следовательно, если $c \ge 0$, то

$$\left\{\chi_n \frac{d\mu_n^{\xi}}{d\mu_n}(\omega) > c\right\} = \left\{\frac{d\mu_n^{\xi}}{d\mu_n}(\omega) > c\right\} \cap \{\chi_n = 1\} = B \cap \Omega_n,$$

где $B \in \mathcal{F}_n$. Но в силу леммы 2.2 существует множество $A \in \mathcal{F}_T$ такое, что $B \cap \Omega_n = A \cap \Omega_n$. А поскольку при этом $A \cap \Omega_n \in \mathcal{F}_T$, видим, что правая часть (2.7) является $\mathcal{F}_T$-измеримой величиной.

Осталось проверить, что обе части (2.7) имеют один и тот же интеграл по любому множеству $A \in \mathcal{F}_T$.

Согласно определению условного математического ожидания интеграл от левой части (2.7) по множеству $A \in \mathcal{F}_T$ равен

$$\int_A \mathbf{E}\{\chi_n \xi \mid \mathcal{F}_T\} d\mathbf{P} = \int_A \chi_n \xi d\mathbf{P}.$$

Переходя к правой части (2.7), в соответствии с леммой 2.2 для любого множества $A \in \mathcal{F}_T$ получаем

$$\int_A \chi_n \frac{d\mu_n^\xi}{d\mu_n} d\mathbf{P} = \int_B \chi_n \frac{d\mu_n^\xi}{d\mu_n} d\mathbf{P} = \int_B \frac{d\mu_n^\xi}{d\mu_n} d\mu_n,$$

где $B \in \mathcal{F}_n$. Но в силу определения $d\mu_n^\xi / d\mu_n$ (теоремы Радона – Никодима) и леммы 2.2 последнее выражение

$$\int_B \frac{d\mu_n^\xi}{d\mu_n} d\mu_n = \int_B \xi d\mu_n = \int_B \chi_n \xi d\mathbf{P} = \int_A \chi_n \xi d\mathbf{P},$$

что и требовалось. Теорема 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Для доказательства (1.4) положим $\xi = I\{\theta \le t\}$ и воспользуемся теоремой 2.2, заменяя в ней T на t.

Для $A \in \mathcal{F}$ введем две меры: $\mathbf{P}^0(A) = \mathbf{P}\{A \mid \theta > T_n\}$ и $\mathbf{P}^1(A) = \mathbf{P}\{A \mid \theta \le T_n\}$. Так как событие $\{T_n \le t\} \in \mathcal{F}_n$, то из свойств условного математического ожидания следует, что при любом $B \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbf{P}^0(B \cap \{T_n \le t < T_{n+1}\}) = \int_B \mathbf{P}^0\{T_n \le t < T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} d\mathbf{P}^0 =$$

$$= \int_B I\{T_n \le t\} \mathbf{P}^0\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\} d\mathbf{P}^0.$$

Аналогично можно представить и $\mathbf{P}^1(B \cap \{T_n \le t < T_{n+1}\})$. Отсюда

$$\mu_n^\xi(B) = \mathbf{P}^1(B \cap \{T_n \le t < T_{n+1}\}) \mathbf{P}(\theta \le T_n) =$$

$$= \int_B I\{T_n \le t\} \mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\} \mathbf{P}(\theta \le T_n) d\mathbf{P}^1 =$$

$$= \int_B I\{T_n \le t\} \mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\} \mathbf{P}(\theta \le T_n) \rho^1 d\mathbf{P}^\Sigma, \qquad (2.8)$$

$$\mu_n(B) = \mathbf{P}^0(B \cap \{T_n \le t < T_{n+1}\}) \mathbf{P}(\theta > T_n) + \mathbf{P}^1(B \cap \{T_n \le t < T_{n+1}\}) \mathbf{P}(\theta \le T_n) =$$

$$= \int_B I\{T_n \le t\} \Big\{ \mathbf{P}^0\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\} \mathbf{P}(\theta > T_n) \rho^0 +$$

$$+\,\mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\}\mathbf{P}(\theta \le T_n)\rho^1\Bigg\}\, d\mathbf{P}^\Sigma, \qquad (2.9)$$

где $\mathbf{P}^\Sigma = \mathbf{P}^0 + \mathbf{P}^1$; $\rho^i = d\mathbf{P}^i \big/ d\mathbf{P}^\Sigma$, $i = 0,1.$ Но из (2.8) и (2.9) следует, что меры μ_n^ξ и μ_n абсолютно непрерывны относительно меры $\mathbf{P}^\Sigma$ ($\mu_n^\xi \ll \mathbf{P}^\Sigma$, $\mu_n \ll \mathbf{P}^\Sigma$). Отсюда в соответствии с теоремой 2.2 при $t \in [T_n, T_{n+1})$

$$\pi(t) = \frac{d\mu_n^\xi}{d\mu_n} = \mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\}\mathbf{P}(\theta \le T_n)\rho^1 \times$$

$$\times \left\{\mathbf{P}^0\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\}\mathbf{P}(\theta > T_n)\rho^0 + \mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\}\mathbf{P}(\theta \le T_n)\rho^1\right\}^{-1}. \qquad (2.10)$$

Отметим теперь, что в силу, в частности, теоремы 2.2 на множестве $\{T_n = t\}$ условное математическое ожидание $\mathbf{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}$ совпадает ($\mathbf{P}$ – п. н.) с условным математическим ожиданием $\mathbf{E}\{\xi \mid \mathcal{F}_t\}$. Далее, по предположению $\mathbf{P}(S_{n+1} > 0) = 1$, а значит, $\mathbf{P}\{S_{n+1} > 0 \mid \mathcal{F}_n\} = 1.$ Отсюда в силу (2.10)

$$\pi_n = \frac{\mathbf{P}(\theta \le T_n)\rho^1}{\mathbf{P}(\theta > T_n)\rho^0 + \mathbf{P}(\theta \le T_n)\rho^1} \qquad (\mathbf{P} - \text{п. н.}). \qquad (2.11)$$

Сравнивая (2.10) и (2.11), получаем

$$\pi(t) = \left\{(1 - \pi_n)\mathbf{P}^0\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\} + \pi_n \mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\}\right\}^{-1} \times$$

$$\times\, \pi_n \mathbf{P}^1\{S_{n+1} > t - T_n \mid \mathcal{F}_n\},$$

что вместе с (1.2), (1.3) доказывает (1.4).

Доказательство справедливости представления (1.5), применимого к обоим случаям, проведем в предположении, что имеет место более сложный случай – ($\mathrm{A}_{(\mathrm{ii})}$). Воспользуемся следующим утверждением.

Обозначим $Y^n = (Z_0, Y_1, \ldots, Y_n)$, $y^n = (z_0, y_1, \ldots, y_n)$, где $z_0 \in \mathcal{Z}$, $y_i \in \mathcal{Y}$, $i = 1, 2, \ldots$. Прямое произведение пространств $\mathcal{Z} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times \ldots \times \mathcal{Y}$ (n раз) будем записывать в виде $\mathcal{Y}^n$, а произведение их σ-алгебр $\Sigma_{\mathcal{Z}} \otimes \Sigma_{\mathcal{Y}} \otimes \Sigma_{\mathcal{Y}} \otimes \ldots \otimes \Sigma_{\mathcal{Y}}$ (n раз) – в виде $\Sigma_{\mathcal{Y}}^n$.

Введем в рассмотрение регулярное условное распределение

$$G_{n+1}(s, B \mid y^n) = \mathbf{P}\{S_{n+1} \le s,\ Z_{n+1} \in B \mid \theta \le T_{n+1},\ Y^n = y^n\} \qquad (2.12)$$

и его плотность $g_{n+1}(s, z \mid y^n)$ относительно некоторой σ-конечной меры m (или в общем случае $\hat{m}$) на $\Sigma_{\mathcal{Y}}$.

Теорема 2.3. В добавление к (1.1) предположим, что $\mathbf{P}(\theta \le T_{n+1}) > 0$, $q_{n+1} > 0$. Тогда с вероятностью 1

$$\pi_{n+1} = \psi_n g_{n+1}(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid Z_0, S_1, Z_1, \dots, S_n, Z_n) \times$$

$$\times \Big\{ \psi_n g_{n+1}(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid Z_0, S_1, Z_1, \dots, S_n, Z_n) +$$

$$+ (1-\psi_n) f_{n+1}(S_{n+1}, Z_{n+1} \mid Z_0, S_1, Z_1, \dots, S_n, Z_n) \Big\}^{-1},$$

где $\psi_n = \mathbf{P}\{\theta \le T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \pi_n + (1-\pi_n) p_{n+1} / q_{n+1}$, $n \ge 0$.

Это утверждение является простым обобщением теоремы 1 из [9].

Таким образом, чтобы доказать (1.5) достаточно получить подходящее представление для плотности $g_{n+1}(s, z \mid y^n)$ условного распределения (2.12).

Введем в рассмотрение следующие меры на измеримом пространстве $(\mathcal{Y}^n, \Sigma_{\mathcal{Y}}^n)$:

$$P^n(D) = \mathbf{P}(\theta \le T_{n+1},\, Y^n \in D), \quad D \in \Sigma_{\mathcal{Y}}^n,$$

$$P_i^n(D) = \mathbf{P}(\theta = T_i,\, Y^n \in D), \quad i = 0, 1, \dots, n+1.$$

Тогда согласно (1.2)

$$\mathbf{P}\{S_{n+1} \le s,\ Z_{n+1} \in B;\ \theta \le T_{n+1},\, Y^n \in D\} =$$

$$= \int_D [\Phi^0(s, B \mid y_n) - \Phi(s, B \mid y_n)] P_{n+1}^n(dy^n) + \int_D \Phi(s, B \mid y_n) P^n(dy^n). \quad (2.13)$$

Но в силу теоремы 2.3 (см. определение ψ_n)

$$P_{n+1}^n(D) = \int_D \mathbf{P}\{\theta = T_{n+1} \mid Y^n = y^n\} P_{Y^n}(dy^n) = \int_D [1 - \pi_n(y^n)] \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} P_{Y^n}(dy^n),$$

$$P^n(D) = \int_D \psi_n(y^n) P_{Y^n}(dy^n),$$

где $P_{Y^n}(dy^n) = \mathbf{P}(Y^n \in dy^n)$. Отсюда вытекает, что меры P_{n+1}^n и P^n абсолютно непрерывны относительно меры P_{Y^n} и имеют плотности

$$\frac{dP_{n+1}^n}{dP_{Y^n}}(y^n) = \frac{p_{n+1}[1 - \pi_n(y^n)]}{q_{n+1}}, \qquad \frac{dP^n}{dP_{Y^n}}(y^n) = \psi_n(y^n).$$

Следовательно,

$$\frac{dP_{n+1}^n}{dP^n}(y^n) = \frac{p_{n+1}[1 - \pi_n(y^n)]}{q_{n+1}\, \psi_n(y^n)}.$$

Поэтому правую часть (2.13) можно записать в виде

$$\int_D \left\{ [\Phi^0(s, B \mid y_n) - \Phi(s, B \mid y_n)] \frac{p_{n+1}[1-\pi_n(y^n)]}{q_{n+1}\psi_n(y^n)} + \Phi(s, B \mid y_n) \right\} P^n(dy^n).$$

Отсюда выводим, что

$$G_{n+1}(s, B \mid y^n) = \frac{p_{n+1}[1-\pi_n(y^n)]}{q_{n+1}\psi_n(y^n)} [\Phi^0(s, B \mid y_n) - \Phi(s, B \mid y_n)] + \Phi(s, B \mid y_n),$$

а значит, искомая плотность допускает представление

$$g_{n+1}(s, z \mid y^n) = \frac{p_{n+1}[1-\pi_n(y^n)]}{q_{n+1}\psi_n(y^n)} [\varphi^0(s, B \mid y_n) - \varphi(s, B \mid y_n)] + \varphi(s, B \mid y_n). \tag{2.14}$$

В силу (1.2), (2.14) и теоремы 2.3 получаем (1.5).

Для доказательства (1.5) в случае ($A_{(i)}$) достаточно применить теорему 2.3 к $\mathbf{P}\{\theta \le T_n \mid \mathcal{F}_{n+1}\}$, учитывая, что в этом случае $\psi_n = \mathbf{P}\{\theta \le T_n \mid \mathcal{F}_n\} = \pi_n$, $\mathbf{P}\{S_{n+1} \le s,\ Z_{n+1} \in B \mid \theta \le T_n,\ Y^n = y^n\} = \Phi(s, B \mid y_n)$ (ср. (2.12)),

$$\pi_{n+1} = \mathbf{P}\{\theta \le T_n \mid \mathcal{F}_{n+1}\} + \mathbf{P}\{\theta = T_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n+1}\},$$

$$\mathbf{P}\{\theta = T_{n+1} \mid \mathcal{F}_{n+1}\} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}(1-\pi_n).$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Обозначим $\mathcal{G}_t$ σ-алгебру $\sigma\{(X(s), Z(s)),\ s \le t\}$, пополненную $\mathbf{P}^{\pi, z}$-нулевыми множествами из $\mathcal{F}$. Процесс X является ограниченным субмартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \ge 0\}$ [15]. Для предсказуемого возрастающего процесса A^X, входящего в разложение Дуба – Мейера процесса X, согласно [12; 15, гл. 3, формула (4.7) и задача 4.3] получаем

$$A^X(t+dt) - A^X(t) = \mathbf{P}^{\pi, z}\{X(t+dt) - X(t) = 1 \mid \mathcal{G}_t\} =$$

$$= [1 - X(t)] \sum_{n \ge 0} I\{T_n < t \le T_{n+1}\} \frac{p_{n+1} f_{n+1}(t - T_n \mid Y_n)}{q_{n+1}[1 - F_{n+1}(t - T_n \mid Y_n)]} dt + o(dt),$$

так что в силу теоремы Дуба – Мейера (см., например, [15]) и (1.8)

$$X(t) = \int_0^t [1 - X(s)] a^X(s)\, ds + M^X(t), \tag{2.15}$$

где $\{M^X(t),\ t \geq 0\}$ – мартингал относительно потока σ-алгебр $\mathbf{G}$. Интегрируя обе части (2.15), в силу теоремы Фубини и $\mathcal{F}_t$-измеримости случайной величины $a^X(t)$ находим

$$\mathbf{E}^{\pi,z}\pi^{\pi,z}(\tau) = \pi + \mathbf{E}^{\pi,z}\int_0^\tau (1-\pi^{\pi,z}(t))a^X(t)\,dt. \tag{2.16}$$

Из (1.7) и (2.16) получаем

$$\rho^{\pi,z}(\tau) = 1-\pi-\mathbf{E}^{\pi,z}\int_0^\tau (1-\pi^{\pi,z}(t))a^X(t)\,dt + \mathbf{E}^{\pi}\int_0^\tau c\pi^{\pi,z}(t)\,dt =$$

$$= 1-\pi+\mathbf{E}^{\pi,z}\int_0^\tau \left(\pi^{\pi,z}(t) - \frac{a^X(t)}{c+a^X(t)}\right)(c+a^X(t))\,dt. \tag{2.17}$$

Введем в рассмотрение марковский момент $\hat{\tau}^* = \hat{\tau}^*_{\pi,z}$, определяемый правой частью соотношения (1.9). Отметим, что согласно (1.9) для всех $t < \hat{\tau}^*$

$$\pi^{\pi,z}(t) < \frac{a^X(t)}{c+a^X(t)}. \tag{2.18}$$

Обозначим $A = \{\tau^* < \hat{\tau}^*\}$. Допустив, что вероятность $\mathbf{P}^{\pi,z}(A) > 0$, в силу (2.17) и (2.18) получим

$$\rho^{\pi,z}(\tau^* \vee \hat{\tau}^*) = \rho^{\pi,z}(\tau^*) +$$

$$+\mathbf{E}^{\pi,z} I\{A\}\int_{\tau^*}^{\hat{\tau}^*} \left(\pi^{\pi,z}(t) - \frac{a^X(t)}{c+a^X(t)}\right)(c+a^X(t))\,dt < \rho^{\pi,z}(\tau^*).$$

Но это противоречит предположению оптимальности τ^*, так что $\mathbf{P}^{\pi,z}(A) = 0$. Теорема 1.2 доказана.

Заключение. В данной работе поставлена проблема скорейшего обнаружения появления изменений (разладки) в вероятностных характеристиках чисто скачкообразного случайного процесса, принимающего значения из достаточно общего фазового пространства. Получены уравнения, удобные с вычислительной точки зрения, для подсчета апостериорной вероятности наличия разладки. Установлена (вообще говоря, неулучшаемая) оценка снизу для оптимального момента подачи сигнала тревоги о происшедшей разладке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гальчук Л. И., Розовский Б. Л.** Задача о «разладке» для пуассоновского процесса // Теория вероятностей и ее применения. 1971. **16**, вып. 4. С. 729.
2. **Davis M. H. A.** A note on the Poisson disorder problem // Banach Center Publications. 1976. Vol. 1. P. 65.

3. **Wan C. B., Davis M. H. A.** The general point process disorder problem // IEEE Trans. Inform. Theory. 1977. **IT-23**, N 4. P. 538.
4. **Салов Г. И.** К задаче о «разладке» для точечного случайного процесса // АиТ. 1986. № 7. С. 70.
5. **Боровков А. А.** Теория вероятностей. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999.
6. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989.
7. **Мейер П.-А.** Вероятность и потенциалы. М.: Мир, 1973.
8. **Ширяев А. Н.** Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.
9. **Салов Г. И.** Уравнение для апостериорной вероятности наличия «разладки» последовательности зависимых случайных величин и оптимальное по Ширяеву обнаружение момента появления «разладки» // Теория вероятностей и ее применения. 1989. **34**, вып. 4. С. 799.
10. **Salov G. I.** The disorder problem for stochastic jump processes // Proc. of the IASTED Intern. Conf. “Automation, Control, and Information Technology” (ACIT-2002). Anaheim – Calgary – Zurich: ACTA Press, 2002. P. 522.
11. **Salov G. I.** The disorder problem for pure jump Markov processes // Proc. of the Second IASTED Intern. Multi-Conf. “Signal and Image Processing”. Anaheim – Calgary – Zurich: ACTA Press, 2005. P. 205.
12. **Davis M. H. A.** The representation of martingales of jump processes // SIAM Journ. Control and Optimization. 1976. **14**. P. 623.
13. **De Sam Lazaro J.** Sur les helices du flot special sous une function // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 1974. Bd. 30. S. 279.
14. **Kohlmann M., Makowski A., Rishel R.** Representation results for jump processes with application to optimal stopping // Stochastic. 1980. **4**. P. 143.
15. **Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.** Теория мартингалов. М: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 29 мая 2007 г.