УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВНУТРИ ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ ИЗ ЯЧЕИСТО-ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. В. Федоров, В. М. Фомин, Т. А. Хмель

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mails: fedorov@itam.nsc.ru, khmel@itam.nsc.ru

Развита физико-математическая модель, описывающая течения газа внутри быстро вращающихся тел из ячеисто-пористых материалов. Получены асимптотические и численные решения некоторых задач вынужденной центробежной конвекции внутри ячеисто-пористых тел цилиндрической формы. Исследовано влияние определяющих параметров (коэффициента сопротивления, относительной длины цилиндра) на характеристики и типы течений.

Ключевые слова: ячеисто-пористые материалы, вихревые течения, математическое моделирование.

Введение. С развитием технологий изготовления ячеисто-пористых материалов (ЯПМ) открываются широкие перспективы их применения в технике для различного рода горелочных и энергопреобразующих устройств [1-2]. Необходимость исследования внутренних и внешних течений для тел, полностью или частично состоящих из таких материалов, требует развития подходов к описанию их внутренней аэродинамики при различных условиях. В частности, при вращении изделий из ЯПМ внутри и вокруг них формируется вынужденное конвективное течение, обусловленное центробежными силами. Анализ характеристик и моделирование таких течений представляют интерес с точки зрения возможности управления потоками массы и энергии и формирования желательных гидродинамических структур.

Ранние исследования течений внутри вращающихся пористых материалов проводились в предположении относительно малой угловой скорости. Это позволило в рамках теории фильтрации, а также ее модификации с учетом вращательного движения получить асимптотические и численные решения для ряда задач тепловой конвекции [3–7]. Создаваемые в настоящее время ячеисто-пористые материалы обладают высоким коэффициентом проницаемости (около 0,95) и относительно низким сопротивлением. Для указанных выше практических приложений представляет интерес рассмотрение процессов при высокой частоте вращения тел (1000–5000 об/мин). В этих условиях предположения линейной теории фильтрации о возможности пренебрежения конвективными членами неприемлемы. Поэтому необходимо рассматривать проблему в нелинейной постановке, т. е. с учетом конвективных и инерционных членов в уравнениях сохранения импульса.

Целью настоящей работы является развитие нелинейной физико-математической модели для описания течений газа внутри быстро вращающихся тел из ЯПМ, получение некоторых асимптотических решений и анализ влияния управляющих параметров на характеристики течений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03-01-00453) в рамках интеграционного проекта № 83 СО РАН.

Физико-математическая модель. Рассматривается тело из ЯПМ, вращающееся с определенной угловой скоростью. Вследствие центробежных сил внутри этого тела формируется вынужденное конвективное течение, соответственно, возникает течение и вне тела. Требуется определить параметры внутреннего газового потока, что необходимо, например, для определения нагрузок на тело. Важной задачей является также определение характеристик внешнего потока воздуха.

Поскольку размеры неоднородностей в ячеисто-пористых материалах много меньше характерных макроскопических размеров, описание возможно в рамках подходов механики гетерогенной среды. Структура ЯПМ рассматривается как однородная проницаемая фаза, воздействие которой на протекающую через нее вторую фазу (жидкость или газ) проявляется только в виде силы сопротивления. При этом, учитывая высокий коэффициент проницаемости, можно пренебречь стеснением потока внутри пористой структуры. Тогда взаимодействующая сила сводится только к сопротивлению трения. Ограничимся рассмотрением дозвуковых течений, пренебрегая на первом этапе исследования эффектами сжимаемости, тепловой конвекции, силы тяжести и вязкой диссипации. Вязкость газа поэтому будет учитываться только в представлении силы взаимодействия газа с пористой структурой.

Изучим вначале трехмерное стационарное осесимметричное изотермическое течение газа внутри пористого цилиндрического тела, вращающегося с постоянной скоростью. Уравнения в безразмерных переменных в лабораторной (относительно неподвижного наблюдателя) цилиндрической системе координат (r, z, θ), связанной с осью вращения, имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial ur}{\partial r}+\frac{\partial vr}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u^2 r}{\partial r}+\frac{\partial uvr}{\partial z}=-r\,\frac{\partial p}{\partial r}+w^2-rf_r,\\ \frac{\partial uvr}{\partial r}+\frac{\partial v^2 r}{\partial z}=-r\,\frac{\partial p}{\partial z}-rf_z,\qquad \frac{\partial uwr}{\partial r}+\frac{\partial vwr}{\partial z}=-uw-rf_\theta.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь p — давление; u, v, w — соответственно радиальная, продольная и тангенциальная компоненты скорости; $\boldsymbol{f}$ — объемная сила, описывающая взаимодействие газа с пористой структурой. Введены следующие характерные масштабы задачи: угловая скорость вращения тела Ω; характерная длина — внешний радиус цилиндра R; характерная скорость — $R\Omega$; плотность газа при нормальных условиях ρ_0; масштаб давления $p_0 = \rho_0 R^2\Omega^2$; масштаб времени $1/\Omega$.

Конкретизация вида объемной силы зависит от определенных условий. Так, при достаточно больших скоростях вращения сила взаимодействия между газом и пористым скелетом может быть представлена в форме квадратичной зависимости $\boldsymbol{f} = K|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_s|(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_s)$. Здесь $\boldsymbol{v}_s = r\boldsymbol{i}_\theta$ — скорость движения элемента объема вращающегося тела; $K = kR$, где k — коэффициент сопротивления, зависящий от свойств материала, пористости, вязкости газа. Будет рассматриваться также линейный закон, справедливый при малых скоростях просачивания, $\boldsymbol{f} = L(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_s)$, $L = \lambda/\Omega$, где λ — коэффициент в законе фильтрации. В [8] представлены результаты экспериментальных исследований коэффициента сопротивления различных ЯПМ и двучленная зависимость, при которой объемная сила $\boldsymbol{f}$ представляется в виде линейной комбинации двух вышеприведенных формул.

Одномерные закрученные течения. Закрученные течения, параметры которых зависят только от радиуса, реализуются, например, в дисках с внутренней полостью, закрытых с торцевых сторон непроницаемыми стенками [9]. При вращении такого диска газ свободно протекает из внешней области во внутреннюю полость радиуса r_0, проходит через пористый материал и вытекает через внешнюю поверхность $r = 1$. Для установившегося течения уравнения (1) сводятся к системе обыкновенных дифференциальных

уравнений
$$\frac{dur}{dr} = 0, \qquad \frac{du^2r}{dr} = -r\,\frac{dp}{dr} + w^2 - rf_r, \qquad \frac{duwr}{dr} = -uw - rf_\theta, \tag{2}$$
непосредственно из которых можно определить $u = q/r$ (q — постоянная величина, характеризующая расход). Краевая задача для системы (2) ставится в соответствии с физическими условиями. Давление определяется с точностью до константы, задаваемой условиями на бесконечности. Если каким-то образом поддерживается заданный расход газа через пористое тело, то $u = q_0/r$. Тогда достаточно одного условия для w, например $w(r = r_0) = 0$ (отсутствие закрутки входного течения на внутренней поверхности). Если тело находится в свободном пространстве, то дополнительное условие, определяющее расход, можно получить из интеграла Бернулли для входного и выходного течений. (В [9] соответствующее условие выписано в общем виде с учетом трения и потерь давления.)

В случае линейного закона сопротивления ($f_r = Lu$, $f_\theta = L(w - r)$) решение определяется аналитически и при $w(r_0) = 0$ имеет вид
$$w = \Big(r - \frac{1}{\alpha r}\Big) - \frac{r_0}{r}\Big(r_0 - \frac{1}{\alpha r_0}\Big)\exp\,[-\alpha(r^2 - r_0^2)], \qquad \alpha = \frac{L}{2q}. \tag{3}$$
Для квадратичного закона сопротивления $f_r = Ku\sqrt{u^2 + (w - r)^2}$, $f_\theta = K(w - r) \times \sqrt{u^2 + (w - r)^2}$ и задача сводится к решению уравнений
$$u = \frac{q}{r}, \qquad \frac{dW}{dr} - \frac{2r}{q} = -KW\sqrt{1 + W^2}, \qquad W = -\frac{r(w - r)}{q}. \tag{4}$$
При малых r мало́ W, тогда с точностью до W^2 правую часть второго уравнения в (4) можно заменить на $-KW$ и получить асимптотическое решение
$$w = r - \frac{2}{K} + \frac{2}{K^2 r} - \frac{r_0}{r}\Big(r_0 - \frac{2}{K} + \frac{2}{K^2 r_0}\Big)\exp\,[-K(r - r_0)]. \tag{5}$$

Распределения азимутальной скорости, полученные из численного решения уравнения (4) при различных значениях q, показаны на рис. 1 сплошными линиями, асимптотические решения (5) — штриховыми. Как видно, при $q > 1$ имеет место хорошее совпадение

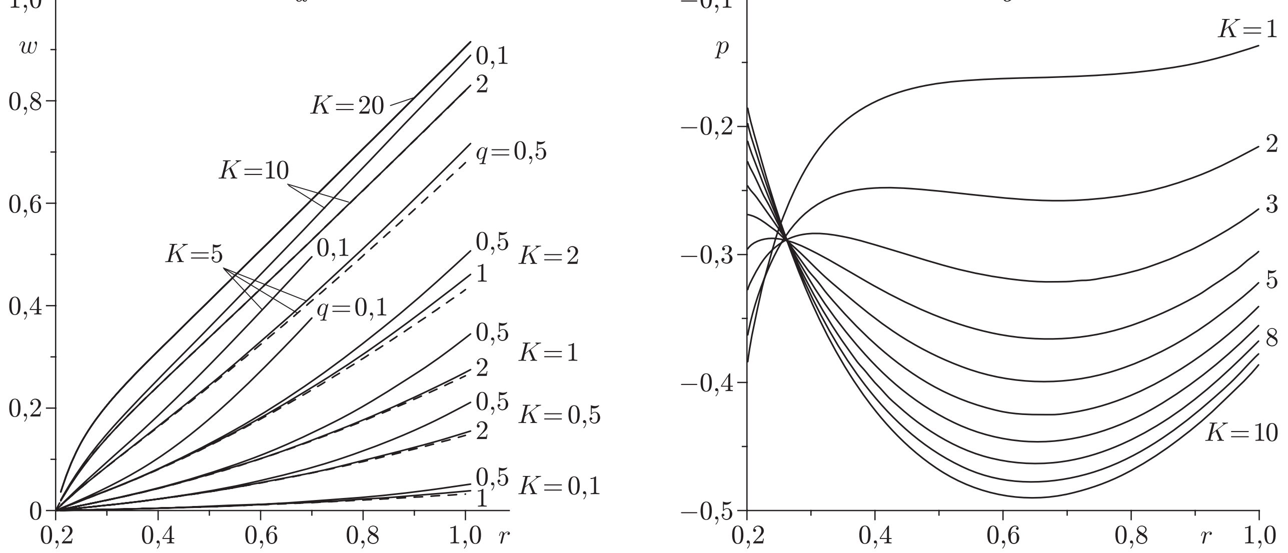

Рис. 1. Азимутальная скорость (*а*) и давление (*б*) плоского закрученного течения внутри диска с закрытыми торцами ($r_0 = 0{,}2$)

во всей рассматриваемой области вплоть до внешней границы. С увеличением параметра сопротивления K диапазон допустимых значений q расширяется. В частности, при $K = 20$ асимптотическое решение и полученные численно кривые для $q = 0{,}1$ и $q = 10$ практически совпадают. Подобным образом ведут себя функции $w(r)$ и в зависимостях от L для линейного закона сопротивления.

При отсутствии препятствий (например, кожуха), ограничивающих движение газа вокруг вращающегося пористого тела, для определения расхода можно привлечь интеграл Бернулли для внешнего потока:

$$\Delta p = p_1 - p_0 = (u_0^2 + w_0^2 - u_1^2 - w_1^2)/2. \tag{6}$$

Из (6) и второго уравнения системы (2) следует

$$-w_1^2 = 2\int\limits_{r_0}^{1} \Big(\frac{w^2}{r} - f_r\Big)dr. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) совместно с решением уравнений (2) как для линейного, так и для квадратичного закона сопротивления возможно численно методом итераций. Расчетные зависимости расхода от K при различных r_0 показаны на рис. 2,*а* сплошными линиями.

Для получения приближенного значения расхода без решения полной задачи можно воспользоваться следующими асимптотическими оценками. При малых $\alpha = L/(2q)$ из (3) и (7) следует $q = \sqrt[3]{3L^2/(32\ln(1/r_0))}$. Данное приближение допустимо для $\alpha < 0{,}1$ и налагает жесткое ограничение на значения L (например, для $r_0 = 0{,}05$ до 0,003, а для $r_0 = 0{,}2$ до 0,0006). В противоположном случае $\alpha \gg 1$, с учетом того, что при $\alpha = 1/(2r_0^2)$ и достаточно малых r_0 решение $w(r)$ очень близќо к линейной функции, справедлива оценка $q \approx 1/(L\ln(1/r_0))$, которая обеспечивает хорошее приближение при $r_0 < 0{,}2$ и $L > 8$. Для квадратичного закона сопротивления асимптотическое решение (5) при $(w - r)/q \ll 1/r$ позволяет получить приближенную оценку

$$q = \Big\{\frac{r_0}{2K(1-r_0)}\Big[w_1^2 + 2\int\limits_{r_0}^{1}\frac{w^2}{r}\,dr\Big]\Big\}^{1/2}. \tag{8}$$

Решение (8) (штриховые линии на рис. 2,*а*) пригодно для определения расхода при больших значениях K и достаточно малых r_0: $r_0 < 0{,}5$, $K > 5$. Для обоих законов сопротивления зависимость расхода от параметра сопротивления $K(L)$ немонотонна и характеризуется точкой максимума (оптимальная структура), положение и значение которой зависят от r_0. Вторая особенность состоит в том, что увеличение внутреннего радиуса до 0,8–0,9 приводит к увеличению расхода и перемещению точки максимума в сторону больших значений L и K и больших значений внутреннего радиуса (около 0,9). Данные свойства расхода отмечены также в [9].

Момент силы, необходимый для поддержания вращения пористого диска с заданной постоянной угловой скоростью, компенсируется интегральным моментом азимутальной силы сопротивления и силы внешнего сопротивления, которая существенно меньше. Пренебрегая последним, имеем

$$M = \int\limits_{r_0}^{1} 2\pi r^2 f_\theta\,dr.$$

Зависимости момента от параметра K приведены на рис. 2,*б*. Здесь также имеется точка максимума, но она не совпадает с точкой максимума для расхода. Максимальное значение расхода находится на восходящей части кривых в зависимостях $M(K)$(как и $M(L)$),

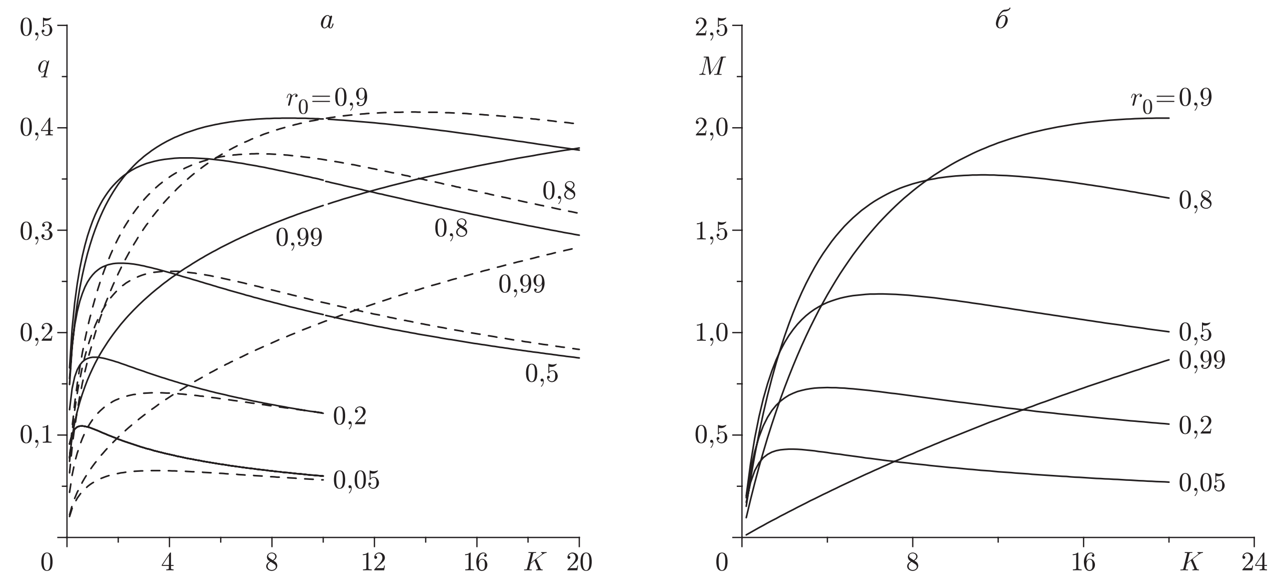

Рис. 2. Зависимости расхода (*а*) и момента (*б*) от параметра сопротивления и внутреннего радиуса

поэтому величина q/M также имеет точку максимума по L или K для каждого фиксированного значения r_0. Точка максимума характеризует структуру как оптимальную по отношению расхода к моменту.

Давление p определяется из уравнения (1) и при $p_\infty = 0$ может быть представлено в виде

$$p = -\frac{q^2}{2r^2} + \int\limits_{r_0}^{r} \Big(\frac{w^2}{r} - f_r\Big)\,dr.$$

На рис. 1,*б* распределения p представлены для случая, когда вращающийся диск находится в свободном неограниченном пространстве, а расход определяется с учетом (7). Профили давления качественно зависят как от параметров сопротивления (что видно на рис. 1,*б*), так и от внутреннего радиуса. При $r_0 = 0{,}2$ для малых значений K (или L) давление монотонно возрастает и достигает максимума на выходе. С увеличением параметра сопротивления появляются точки локального максимума и локального минимума внутри области. Точка локального максимума с ростом L и K или с увеличением r_0 смещается влево и выходит на границу $r = r_0$. Точка локального минимума смещается вправо при увеличении r_0 и выходит на границу, так что при $r_0 = 0{,}8$ давление падает с увеличением r при всех $K > 1$. Сложное поведение давления, как следует из анализа второго уравнения системы (2), обусловлено одновременным влиянием конвективного члена $du^2r/dr = -(q/r)^2$, центробежной силы, зависящей от w^2, и силы сопротивления f_r. При этом расход q также является сложной функцией от параметра сопротивления и r_0. Можно определить условия, при которых давление внутри диска будет близким к постоянному. Например, для $r_0 = 0{,}2$ наименьший перепад между максимальным и минимальным значениями имеет место при $K \approx 3{,}5$, для $r_0 = 0{,}5$ — при $K \approx 1$, а для $r_0 = 0{,}8$ — при $K \approx 0{,}4$. Полное давление $P = p + (u^2 + v^2 + w^2)/2$ при заданных граничных условиях равно нулю при $r = r_0$ и при $r = 1$, поэтому всегда имеет точку локального минимума внутри области. Значение P в этой точке тем ниже, чем выше значение параметра сопротивления.

Пространственные закрученные течения с осевой симметрией. Рассмотрим далее вращение пористого цилиндра конечной длины H, поверхность которого полностью проницаема. Под действием сил центробежной конвекции втекание происходит через торцевые плоскости $z = 0$ и $z = 2z_0$ ($z_0 = H/2R$), вытекание — через поверхность $r = 1$. Для получения полной информации о протекании газа через пористые тела, вообще говоря, необходимо решение сопряженной задачи, т. е. совместное рассмотрение внутреннего и внешнего течений. При определенных условиях для внутреннего течения можно получить частные решения. Эти решения могут быть использованы в дальнейшем как для тестирования численного метода расчета внутреннего двумерного течения в общем случае, так и для сравнения с решением сопряженной задачи о внутреннем и внешнем течениях.

Для линейного закона сопротивления уравнения установившегося движения допускают частное решение вида $u(r,z) = rU(z)$, $v(r,z) = V(z)$, $w(r,z) = rW(z)$, $p(r,z) = P(z) + P_0 r^2$, а функции $U(z)$, $V(z)$, $W(z)$, $P(z)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dz} = -2U, \qquad \frac{dU}{dz} = \frac{W^2 - U^2 - LU - 2P_0}{V},$$
$$\frac{dP}{dz} = 2UV - LV, \qquad \frac{dW}{dz} = -\frac{2UW + L(W-1)}{V}. \tag{9}$$

Течение на входе ($z = 0$) имеет три компоненты скорости. Радиальная компонента определяется заданной константой U_0; $u(r,0) = U_0 r$, $P_0 = -0{,}5U_0^2$. Значение осевой компоненты скорости на входе неизвестно, но она должна быть равна нулю на оси симметрии ($z = z_0$). Принимается, что азимутальная скорость на входе равна нулю (отсутствие закрутки внешнего потока), а давление определяется из интеграла Бернулли. Соответствующие краевые условия для (9) таковы:

$$z = 0\colon \quad U = U_0, \quad W = 0, \quad P = p_\infty - 0{,}5V^2, \qquad z = z_0\colon \quad V = 0. \tag{10}$$

Решение краевой задачи (9), (10) находится численным методом пристрелки: выбирается значение $V(0)$, при котором решение задачи Коши удовлетворяет условию $V(z_0) = 0$.

Результаты расчетов приведены на рис. 3. На рис. 3,*а* показаны изолинии основных параметров при $L = 1$ и $U_0 = 0$, $z_0 = 0{,}5$, на рис. 3,*б* — зависимость искомых функций от параметра L при $U_0 = 0$, $z_0 = 1$. Как видно, азимутальная скорость является наиболее чувствительной характеристикой относительно коэффициента сопротивления. Следует также отметить немонотонный характер поведения компонент скорости u и w (соответственно, скоростного напора и полного напора P) на выходной (боковой) поверхности цилиндра, что наблюдалось и в экспериментах.

Отметим, что условие параллельности входного потока оси симметрии $U_0 = 0$ представляется в определенной степени ограниченным, так как, вообще говоря, не обеспечивает сопряжения с внешним течением. Поэтому исследовано влияние отклонения потока (величины U_0) на решение, результаты которого представлены на рис. 3,*в* ($L = 0{,}5$, $z_0 = 0{,}2$). Видно, что осевая скорость меняется незначительно, а радиальная с увеличением U_0 становится немонотонной.

Влияние соотношения геометрических параметров (относительной длины цилиндра) можно проследить, сравнивая кривые, соответствующие $U_0 = 0$ и $L = 0{,}5$, на рис. 3,*б* и 3,*в*. Как видно, уменьшение относительной длины цилиндра z_0 от 1 до 0,2 оказывает влияние на величину осевой компоненты скорости V и почти не сказывается на распределении и максимальных значениях U и W.

Полученные решения и приведенные их свойства могут быть использованы при решении полной задачи о внутреннем и внешнем течениях, а также в качестве тестовых решений при разработке численного алгоритма расчета задачи с общим законом сопротивления.

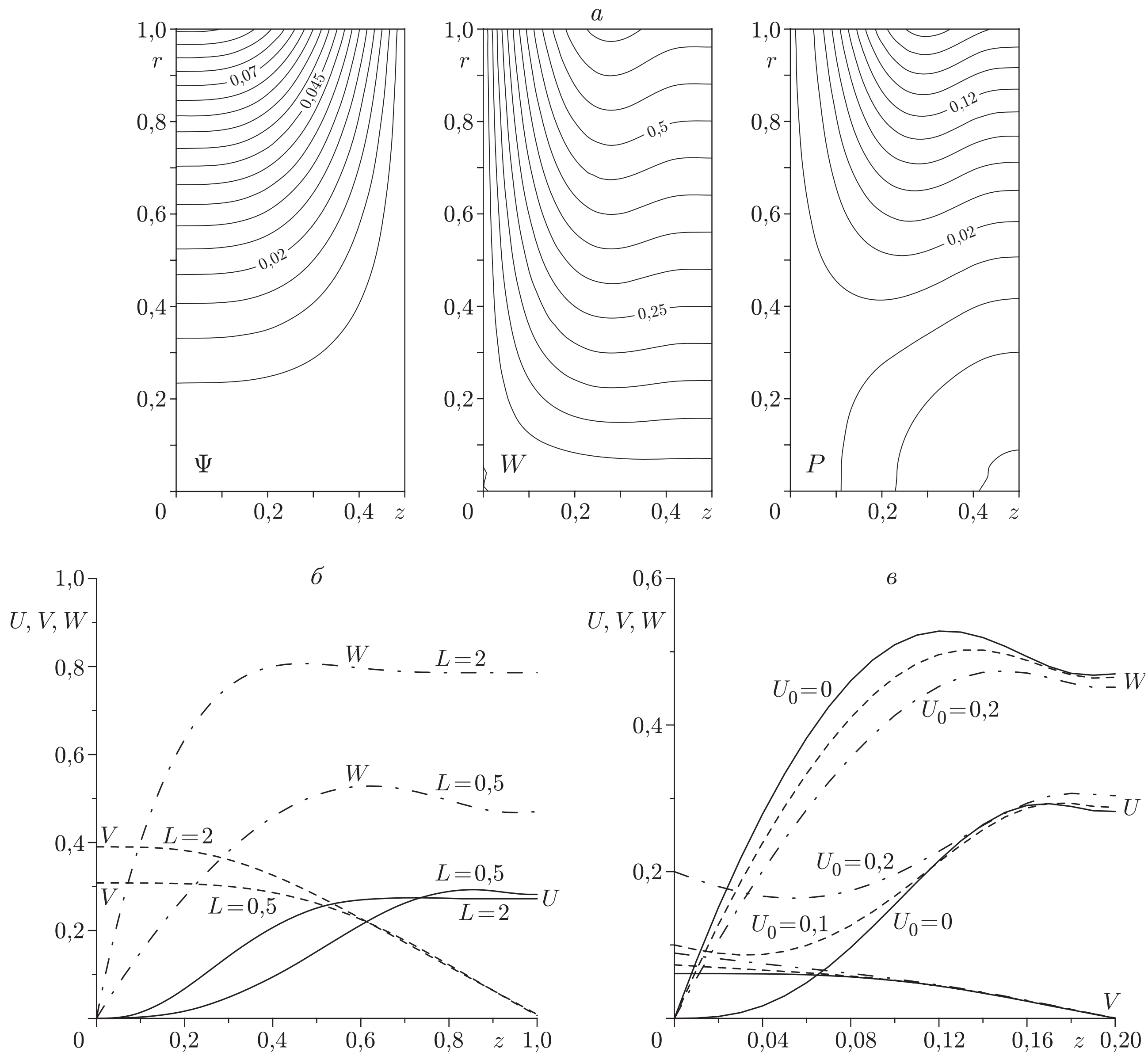

Рис. 3. Течение внутри вращающегося цилиндрического тела из ЯПМ с линейным законом сопротивления:
а — изолинии параметров в плоскости (z, r); *б* — зависимость решений от параметра сопротивления L; *в* — от наклона входного потока U_0

Заключение. Таким образом, в результате выполненного исследования

разработана физико-математическая модель для изучения течений несжимаемого газа внутри быстро вращающихся тел из ячеисто-пористых материалов;

получены асимптотические и численные решения для одномерных закрученных течений внутри ЯПМ с различными законами сопротивления, показано качественно различное поведение давления в зависимости от параметра сопротивления;

получены численные решения для двумерного течения внутри открытого вращающегося цилиндрического тела с линейным законом сопротивления структуры, исследовано влияние геометрических параметров задачи и параметра сопротивления на решение, установлена зависимость решений от направления входного потока, что указывает на необходимость решения сопряженной задачи совместно с внешним течением.

Настоящая модель и полученные решения могут быть использованы при решении полной задачи о внутреннем и внешнем течениях газа при вращении тел из ячеисто-пористых материалов. Модель также может быть расширена с учетом процессов вязкой диссипации, теплообмена и химических реакций.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Baev V. K., Fomin V. M.** Main ideas of interdisciplinary projects of new types o energy-transducing facilities // Proc. of the Intern. conf. on methods of aerodynamic research, Novosibirsk, Russia, 28 June — 3 July, 2004. Novosibirsk: Publishing House “Nonparallel”, 2004, Pt I. P. 26–29.
2. **Баев В. К., Фомин В. М.** Многофункциональные машины с дисковыми роторами // Науч.-практ. конф. “Энергосбережение и обеспечение экономической безопасности на промышленных предприятиях”, С.-Петербург, Россия, 26–28 мая 2004. СПб.: С.-Петербургская электротехническая компания, 2004. С. 7–9.
3. **Mahato J. P., Maiti M. K.** Unsteady free convective flow and mass transfer in a rotating porous medium // Indian. J. Technol. 1988. V. 26, N 6. P. 255–259.
4. **Vadasz P.** Fundamentals of flow and heat transfer in rotating porous media // Heat Transfer. Bristol: Taylor and Francis, 1994. V. 5. P. 405–410.
5. **Vadasz P.** Centrifugally generated free convection in a rotating porous box // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37, N 16. P. 2399–2404.
6. **Vadasz P.** Coriolis effect on free convection in a long rotating porous box subject to uniform heat generation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38, N 11. P. 2011–2018.
7. **Zhao M., Bolliard L., Prud’homme M.** Effect of weak rotation on natural convection in a horizontal porous cilinder // Heat and Mass Transfer. 1996. V. 31, N 6. P. 403–409.
8. **Беклемышев А. М.** Особенности закона сопротивления высокопористых ячеистых материалов // Республиканский инж.-техн. центр порошковой металлургии с НИИ проблем порошковой технологии и покрытий и опытным производством. Пермь, 1996. Деп. в ВИНИТИ 09.07.96, № 2265-В96.
9. **Baev V. K., Minaev S. S.** Characteristics of the flow around and inside of the rotating porous disk // Book of abstracts of advanced fluid information and transdisciplinary fluid integration. Sendai (Japan): Tohoku University, 2004. P. 238–241.

Поступила в редакцию 9/II 2005 г.,
в окончательном варианте — 24/III 2005 г.