ления полей смещений и напряжений в окрестности фронтов волн можно пользоваться асимптотическими формулами типа (3.2).

Автор благодарит Е. И. Шемякина за внимание к работе.

Поступила 25 VIII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шемякин Е. И.** Динамические задачи теории упругости и пластичности. Курс лекций. Новосибирск: изд. НГУ, 1968.
2. **Чичинин И. С.** Исследование механизма формирования продольных и поперечных волн сейсмическим источником, заданным в виде осциллирующего шара, в безграничном пространстве.— В кн.: Измерительная аппаратура для разведочной геофизики. Новосибирск: изд. Ин-та геологии и геофизики СО АН СССР, 1973.
3. **Никифоровский В. С.** Исследование динамического поля напряжений в упругом полупространстве в окрестности точки приложения поверхностной нагрузки.— ПМТФ, 1962, № 2.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1974.

УДК 539.376

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК НА ТОНКИЙ НЕОДНОРОДНЫЙ ВЯЗКОУПРУГИЙ СЛОЙ

А. В. МАНЖИРОВ

(*Москва*)

Исследуются задачи о действии нагрузок на тонкие* неоднородные вязкоупругие слои, причем учитываются два вида неоднородности. Первая неоднородность характеризуется тем, что элементы слоев обладают различными упругими и реологическими свойствами, вторая — обусловлена неоднородным старением материала. Найдены приближенные решения задач. Обсуждаются различные частные случаи.

1. Рассмотрим задачи о действии нагрузок на тонкие слои в рамках модели, описываемой следующими уравнениями состояния [1—3]:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = (1+\nu)(I-L)\frac{\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)}{E} - \delta_{ij}\nu(I-L)\frac{\sigma_{kk}(\mathbf{x}, t)}{E}, \tag{1.1}$$

$$(I-L)\frac{\omega(\mathbf{x}, t)}{E} = \frac{\omega(\mathbf{x}, t)}{E(t+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})} - \int_{\tau_0}^{t}\frac{\omega(\mathbf{x}, \tau)}{E(\tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})}K(t+\varkappa(\mathbf{x}), \tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})\,d\tau,$$

$$K(t, \tau, \mathbf{x}) = E(t, \mathbf{x})\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau, \mathbf{x})} + C(t, \tau, \mathbf{x})\right],$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{E(t, \mathbf{x})}{1+\nu}\left[(I+N)\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) + \delta_{ij}\frac{\nu}{1-2\nu}(I+N)\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}, t)\right],$$

$$(I+N)\omega(\mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{x}, t) + \int_{\tau_0}^{t}\omega(\mathbf{x}, \tau)R(t+\varkappa(\mathbf{x}), \tau+\varkappa(\mathbf{x}), \mathbf{x})\,D\tau,$$

где $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ — компоненты тензоров деформации и напряжения; ε_{kk} — объемная деформация; $\sigma_{kk}/3$ — среднее гидростатическое давление; $E(t, \mathbf{x})$ — модуль упругомгновенной деформации; $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — наблюдаемая точка тела; t — текущий момент времени; τ_0 — возраст тела в точке с координатами $\mathbf{x}(0, 0, 0)$ в момент приложения напряжений; $\nu = \mathrm{const}$ — коэффициент Пуассона; $K(t, \tau, \mathbf{x})$ — ядро ползучести; $R(t, \tau, \mathbf{x})$ — его резольвента; $C(t, \tau, \mathbf{x})$ — мера ползучести при растяжении или сжатии; $\varkappa(\mathbf{x})$ — функция неоднородного старения; δ_{ij} — символ Кронекера.

Далее исследуем случай плоской деформации.

Задача 1. О действии нормальной нагрузки $q(x_1, t)$ на неоднородный вязкоупругий тонкий слой, лежащий без трения на жестком основании.

---

* Слой будем считать тонким, если характерный размер области его активного загружения гораздо больше толщины слоя.

К выражениям (1.1) необходимо добавить уравнения равновесия, соотношения, связывающие деформации с перемещениями, и граничные условия:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0; \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}, \ \varepsilon_{22} = u_{2,2}, \ \varepsilon_{12} = (1/2)(u_{1,2} + u_{2,1}); \tag{1.3}$$

$$\sigma_{22} = q(x_1, t), \ \sigma_{12} = 0, \ x_2 = h, \tag{1.4}$$

$$u_2 = 0, \ \sigma_{12} = 0, \ x_2 = 0.$$

Здесь u_1, u_2 — перемещения точек слоя; h — его толщина.

Для отыскания приближенного решения разложим касательное напряжение σ_{12} в ряд Тейлора по x_2 в окрестности точки $x_2 = 0$ и ограничимся только линейными членами [4], т. е. $\sigma_{12} = \varphi(x_1, t) + \psi(x_1, t)x_2$. Тогда из условий (1.4) $\sigma_{12} \equiv 0$, а из второго уравнения (1.2) с учетом (1.4)

$$\sigma_{22} = q(x_1, t). \tag{1.5}$$

Используя выражения для σ_{22} из (1.1), (1.5), найдем

$$\varepsilon_{22} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}(I - L)\frac{q(x_1, t)}{E} - \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{11}. \tag{1.6}$$

Подставляя теперь (1.6) в (1.1), получим

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{1-\nu} q(x_1, t) + \frac{E}{1-\nu^2}(I + N)\varepsilon_{11}. \tag{1.7}$$

Но из первого уравнения равновесия в соответствии с (1.7) $\sigma_{11} = \varphi_1(x_2, t)$ и

$$\varepsilon_{11} = -\nu(1+\nu)(I - L)q(x_1, t)/E. \tag{1.8}$$

Здесь $\varphi_1(x_2, t) \equiv 0$, так как естественно полагать, что при $q(x_1, t) \equiv 0$ все деформации, напряжения и перемещения равны нулю. В дальнейшем в аналогичных ситуациях будем сразу опускать такие функции без дополнительных упоминаний.

Формулы (1.6), (1.8) и условия (1.4) с учетом (1.3) дадут

$$\varepsilon_{22} = (1 - \nu^2)(I - L)\frac{q(x_1, t)}{E},$$

$$u_2(\mathrm{x}, t) = (1 - \nu^2)\int_0^{x_2}(I - L)\frac{q(x_1, t)}{E}dx_2,$$

после чего напряженно-деформированное состояние слоя полностью определено.

Задача 2. О действии нормальной нагрузки $q(x_1, t)$ на неоднородный вязкоупругий тонкий слой, сцепленный с недеформируемым основанием.

Граничные условия задачи запишем в виде

$$\sigma_{22} = q(x_1, t), \ \sigma_{12} = 0, \ x_2 = h, \tag{1.9}$$

$$u_1 = 0, \ u_2 = 0, \ x_2 = 0.$$

Пользуясь примененным ранее разложением касательного напряжения, можно показать, что в силу второго условия (1.9) $\sigma_{12} = \psi'(x_1, t)/(x_2 - h)$, а тогда из второго уравнения равновесия (1.2) следует (штрихом обозначим производную по x_1)

$$\sigma_{22} = -\frac{(h - x_2)^2}{2}\psi''(x_1, t) + q(x_1, t).$$

Отсюда и из соотношений (1.1) определим

$$\varepsilon_{22} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}(I - L)\left[\frac{q(x_1, t)}{E} - \frac{(h - x_2)^2}{2E}\psi''(x_1, t)\right] - \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{11};$$

$$\sigma_{11} = \frac{\nu}{1-\nu}\left[q(x_1, t) - \frac{(h - x_2)^2}{2}\psi''(x_1, t)\right] + \frac{E}{1-\nu^2}(I + N)\varepsilon_{11}.$$

Первое уравнение равновесия (1.2) приводит к формуле

$$\frac{E}{1-\nu^2}(I + N)\varepsilon_{11} + \psi(x_1, t) + \frac{\nu}{1-\nu}\left[q(x_1, t) - \frac{(h - x_2)^2}{2}\psi''(x_1, t)\right] = 0.$$

Учитывая, что для тонкого слоя $(h^2/2)\psi''(x_1, t) \ll \psi(x_1, t)$ и что слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием, т. е. $\varepsilon_{11} = 0$ при $x_2 = 0$, получим $\psi(x_1, t) = -\nu(1 - \nu)^{-1}q(x_1, t)$. После чего, пренебрегая членами порядка h^2, придем к выражениям

$$\sigma_{11}=\frac{\nu}{1-\nu}q(x_1,t),\quad \sigma_{12}=\frac{\nu}{1-\nu}q'(x_1,t)(h-x_2),$$

$$\sigma_{22}=q(x_1,t),\quad \varepsilon_{11}=0,\quad \varepsilon_{22}=\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}(I-L)\frac{q(x_1,t)}{E},$$

$$u_2(\mathbf{x},t)=\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\int\limits_0^{x_2}(I-L)\frac{q(x_1,t)}{E}dx_2.$$

Значения u_1 и ε_{12} легко определить из (1.3), (1.1).

Задача 3. О действии касательной нагрузки $\tau(x_1, t)$ на неоднородный вязкоупругий тонкий слой, сцепленный с недеформируемым основанием.

Для этой задачи будем иметь следующие граничные условия:

(1.10) $$\sigma_{22}=0,\ \sigma_{12}=\tau(x_1,t),\ x_2=h,\ u_1=0,\ u_2=0,\ x_2=0,$$

используя которые совместно с известным разложением касательного напряжения, получим $\sigma_{12}=\tau(x_1,\ t)+f'(x_1,\ t)(x_2-h)$.

Из уравнений равновесия (1.2)

(1.11) $$\sigma_{11}=-f(x_1,t),$$
$$\sigma_{22}=(h-x_2)\tau'(x_1,t)-f''(x_1,t)\frac{(h-x_2)^2}{2}.$$

Как и прежде, из (1.1)

(1.12) $$\varepsilon_{22}=\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}(I-L)\left[(h-x_2)\frac{\tau'(x_1,t)}{E}-\frac{(h-x_2)^2}{2E}f''(x_1,t)\right]-\frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{11};$$

(1.13) $$\frac{E}{1-\nu^2}(I+N)\varepsilon_{11}-\frac{\nu}{1-\nu}\left[(x_2-h)\tau'(x_1,t)+\frac{(h-x_2)^2}{2}f''(x_1,t)\right]+$$
$$+f(x_1,t)=0.$$

Поступая аналогично задаче 2, найдем из (1.13)

(1.14) $$f(x_1,t)=-h\frac{\nu}{1-\nu}\tau'(x_1,t),\quad \varepsilon_{11}=\nu(1+\nu)x_2(I-L)\frac{\tau'(x_1,t)}{E}.$$

После чего запишем выражения для оставшихся напряжений и деформаций с точностью до величин, содержащих h^2, согласно (1.11), (1.12), (1.14), (1.3), (1.10):

$$\sigma_{11}=[\nu/(1-\nu)]h\tau'(x_1,t),\ \sigma_{12}=\tau(x_1,t),\ \sigma_{22}=(h-x_2)\tau'(x_1,t),$$
$$\varepsilon_{22}=[(1+\nu)/(1-\nu)](I-L)[(1-2\nu)h-(1-\nu)^2x_2][\tau'(x_1,t)/E],$$
$$u_1(\mathbf{x},t)=\nu(1+\nu)x_2\int(I-L)[\tau'(x_1,t)/E]\,dx_1.$$

Если физико-механические характеристики среды не зависят от x_1, то
$$u_1(\mathbf{x},t)=\nu(1+\nu)x_2(I-L)[\tau(x_1,t)/E].$$

2. Перейдем к решению осесимметричных задач для слоя. Воспользуемся цилиндрической системой координат и стандартными для нее обозначениями. При ссылках на формулы (1.1) будем иметь в виду, что соответствующие переобозначения проделаны и, кроме того, $\mathbf{x}=\mathbf{x}(r, z)$, а все физико-механические характеристики и функция старения зависят только от z, т. е. в них $\mathbf{x}=z$. Уравнения равновесия и соотношения, связывающие деформации и перемещения, примут вид

(2.1) $$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0;$$

(2.2) $$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r},\ \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right].$$

Задача 4. На тонкий неоднородный вязкоупругий слой, лежащий без трения на жестком основании, действует нормальная нагрузка $q(r, t)$.

Граничными условиями задачи будут

(2.3) $$\sigma_z=q(r,t),\ \tau_{rz}=0,\ z=h,$$
$$w=0,\ \tau_{rz}=0,\ z=0.$$

Для нахождения приближенного решения разложим касательное напряжение в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ и ограничимся только линейными членами, т. е.

(2.4) $$\tau_{rz}=\omega(r,t)+zp(r,t).$$

Если теперь учтем граничные условия (2.3), то получим $\tau_{rz} = 0$, $\sigma_z = q(r, t)$ Отсюда с учетом выражения для σ_z из (1.1) найдем связь ε_z, ε_θ и ε_r:

(2.5) $$\varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}(I-L)\frac{q(r, t)}{E} - \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r).$$

С помощью (2.5), (1.1) получим

(2.6) $$\sigma_r = \frac{\nu}{1-\nu}q(r, t) + \frac{E}{1-\nu^2}(I+N)(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta),$$

$$\sigma_\theta = \frac{\nu}{1-\nu}q(r, t) + \frac{E}{1-\nu^2}(I+N)(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r).$$

Тогда, используя (2.6) и первое уравнение равновесия (2.1), определим (далее штрихом будем обозначать производные по r)

(2.7) $$\frac{\varepsilon_r' + \nu\varepsilon_\theta'}{1-\nu} + \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} = -\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}(I-L)\frac{q'(r, t)}{E}.$$

Соотношение (2.7) с учетом того, что $(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)r^{-1} = \varepsilon_\theta'$, дает

(2.8) $$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = -\nu(1+\nu)(I-L)[q(r, t)/E].$$

Подставляя в (2.8) выражения (2.2), получим уравнение для отыскания u:

(2.9) $$\partial u/\partial r + u/r = -\nu(1+\nu)(I-L)[q(r, t)/E].$$

Решая (2.9), получим

$$u = \frac{\Phi(z, t)}{r} - \nu(1+\nu)(I-L)r^{-1}\int\frac{q(r, t)}{E}rdr.$$

Из соображений ограниченности перемещения u при $r = 0$ функция $\Phi(z, t) \equiv \equiv 0$. Отсюда и из (2.2), (2.6)

$$u = -\nu(1+\nu)(I-L)r^{-1}\int\frac{q(r, t)}{E}rdr,$$

$$\varepsilon_r = \nu(1+\nu)(I-L)\left[r^{-2}\int\frac{q(r, t)}{E}rdr - \frac{q(r, t)}{E}\right],$$

$$\varepsilon_\theta = -\nu(1+\nu)(I-L)r^{-2}\int\frac{q(r, t)}{E}rdr,$$

$$\sigma_r = \nu r^{-2}\int q(r, t)rdr, \quad \sigma_\theta = \nu\left[q - r^{-2}\int q(r, t)rdr\right].$$

Формулы (2.5), (2.8) и условия (2.3) позволяют определить

$$\varepsilon_z = (1-\nu^2)(I-L)\frac{q(r, t)}{E},$$

$$w(r, z, t) = (1-\nu^2)\int_0^z\frac{q(r, t)}{E(t+\varkappa(z), z)} - \int_{\tau_0}^t\frac{q(r, \tau)}{E(\tau+\varkappa(z), z)}K(t+\varkappa(z),$$
$$\tau+\varkappa(z), z)\,d\tau\,dz.$$

Задача 5. Пусть теперь слой жестко сцеплен с недеформируемым основанием, тогда

(2.10) $$\sigma_z = q(r, t),\ \tau_{rz} = 0,\ z = h,$$
$$u = 0,\ w = 0,\ z = 0.$$

Используя, как и ранее, представление (2.4) и второе условие (2.10), при $z = h$ получим, что $\tau_{rz} = (z-h)\varphi'(r, t)$, а из второго уравнения равновесия

(2.11) $$\sigma_z = -\frac{(h-z)^2}{2}\left[\varphi''(r, t) + \frac{\varphi'(r, t)}{r}\right] + q(r, t).$$

Подставляя в (2.11) σ_z из соотношений (1.1), найдем

(2.12) $$\varepsilon_z = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}(I-L)\frac{W(r, z, t)}{E} - \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_\theta + \varepsilon_r),$$

$$W(r, z, t) = q(r, t) - \frac{(h-z)^2}{2}[\varphi''(r, t) + \varphi'(r, t)r^{-1}].$$

Если учтем выражение (2.12) в соотношениях (1.1) для σ_r и σ_θ, то получим формулы, аналогичные (2.6), в которых следует заменить $q(r, t)$ на $W(r, z, t)$. Подставим их в первое уравнение равновесия, тогда найдем

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = -(I - L)[\nu(1 + \nu)W(r, z, t)/E + (1 - \nu^2)\varphi(r, t)/E]. \tag{2.13}$$

В силу того, что мы имеем жесткую заделку, $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0$ при $z = 0$. Кроме того, учитывая, что для тонкого слоя $(h^2/2)[\varphi''(r, t) + \varphi'(r, t)r^{-1}] \ll \varphi(r, t)$, пренебрегая далее величинами порядка h^2, получим из соотношения (2.13)

$$\varphi(r, t) = -\nu(1 - \nu)^{-1}q(r, t), \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta \equiv 0. \tag{2.14}$$

Выражения (2.14) и соображения ограниченности u при $r = 0$ приводят к формулам

$$u = 0, \quad \varepsilon_r = 0, \quad \varepsilon_\theta = 0, \quad \sigma_z = q(r, t),$$

$$\tau_{rz} = (h - z)\frac{\nu}{1 - \nu} q'(r, t), \quad \sigma_r = \sigma_\theta = \frac{\nu}{1 - \nu} q(r, t),$$

$$\varepsilon_z = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{1 - \nu}(I - L)\frac{q(r, t)}{E}.$$

Откуда с учетом того, что $w = 0$ при $z = 0$, получим

$$w(r, z, t) = \frac{1 - \nu - 2\nu^2}{1 - \nu}\int_0^z \left[\frac{q(r, t)}{E(t + \varkappa(z), z)} - \int_{\tau_0}^t \frac{q(r, \tau)}{E(\tau + \varkappa(z), z)} K(t + \varkappa(z), \tau + \varkappa(z), z)\, d\tau\right] dz.$$

Задача 6. На слой действует осесимметричная касательная нагрузка $\tau(r, t)$, причем слой сцеплен с недеформируемым основанием.

Поскольку техническая сторона получения приближенных решений подробно рассмотрена в предыдущих задачах, здесь приведем лишь конечные результаты:

$$\sigma_r = \frac{\nu}{1 - \nu} hY(r, t) - z\nu r^{-2}\int Y(r, t)\, r dr, \tag{2.15}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\nu}{1 - \nu} hY(r, t) - \nu z\left[Y(r, t) - r^{-2}\int Y(r, t)\, r dr\right],$$

$$\sigma_z = (h - z)Y(r, t), \quad \tau_{rz} = \tau(r, t),$$

$$\varepsilon_r = \nu(1 + \nu)(I - L)E^{-1}z\left[Y(r, t) - r^{-2}\int Y(r, t)\, r dr\right],$$

$$\varepsilon_\theta = \nu(1 + \nu)(I - L)E^{-1}zr^{-2}\int Y(r, t)\, r dr,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}(I - L)E^{-1}[(1 - 2\nu)h - (1 - \nu)^2 z]Y(r, t),$$

$$u = \nu(1 + \nu)(I - L)E^{-1}zr^{-1}\int Y(r, t)\, r dr,$$

$$Y(r, t) = \tau'(r, t) + r^{-1}\tau(r, t).$$

Последняя запись в (2.15) правомерна, так как в силу симметрии естественно полагать, что $\tau(r, t) \equiv 0$ при $r = 0$.

Полученные результаты показывают, что в упругом случае тонкие слои работают на сжатие как основание Фусса — Винклера с коэффициентами податливости в задачах 1, 4, равными $(1 - \nu^2)hE^{-1}$, а в задачах 2,5 — $(1 - \nu - 2\nu^2)(1 - \nu)^{-1}hE^{-1}$. При работе на сдвиг тонкий слой может трактоваться как основание Фусса — Винклера с коэффициентом податливости $\nu(1 + \nu)hE^{-1}$ только в плоском случае (задача 3), для осесимметричного случая это уже неверно (см. (2.15)). Для соответствующих перемещений выбранной модели мы получаем некоторые операторные коэффициенты, действующие на приложенную нагрузку, причем в задачах 3—5 это справедливо только тогда, когда физико-механические свойства слоя меняются лишь по глубине.

Приведенные решения могут с успехом применяться для расчета слоистых оснований со сложной реологией, если характерный размер зоны активного загружения верхнего слоя гораздо больше его толщины.

В заключение отметим, что решения нелинейных задач для тонкого слоя могут быть получены аналогичным образом.

Плоские задачи для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести были рассмотрены в [4]. Однако предложенный здесь алгоритм позволяет получить более точные решения в плоском случае (задача 3) и перейти к осесимметричному.

Автор признателен Н. Х. Арутюняну и В. М. Александрову за внимание к работе.

Поступила 28 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арутюнян Н. Х.** Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
2. **Арутюнян Н. Х.** О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред.— Докл. АН СССР, 1976, т. 229, вып. 3.
3. **Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А.** Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3.
4. **Сумбатян М. А.** Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 1.

УДК 539.3 : 678.067.5

ОПТИМАЛЬНОЕ АРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

С. Б. БУШМАНОВ, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

(*Новосибирск*)

При решении задач оптимизации внутренней структуры упругих композитных тел, находящихся в плоском напряженном состоянии, последние рассматривались либо как однородные анизотропные [1], либо как нитяной континуумы [2, 3]. Основным критерием оптимальности в [4, 5] было условие равнонапряженности волокон арматуры.

В настоящей работе на основе модели армированного слоя, предложенной в [6], рассматривается задача о выборе направлений и интенсивностей армирования, соответствующих минимуму суммарного объема арматуры в упругих пластинах, нагруженных в своей плоскости. Показано, что оптимальными в указанном смысле будут проекты с равнонапряженной арматурой, направления армирования которых являются одновременно и направлениями главных удлинений. Получены уравнения и граничные условия, определяющие параметры армирования оптимального проекта. Установлена связь между оптимальными траекториями армирования и линиями скольжения при плоской деформации жесткопластического тела.

1. Рассматривается пластинка, состоящая из изотропной матрицы и внедренной в нее тонковолокнистой арматуры, которая уложена в двух направлениях, составляющих углы α_k с положительным направлением 1 некоторой ортогональной системы координат x_1, x_2. Предполагается, что пластинка имеет постоянную единичную толщину, нагружена в своей плоскости силами p_i на части контура L_p и жестко закреплена на оставшейся части контура L_u. Объемные силы отсутствуют. Обе фазы композита считаются линейно-упругими, причем жесткость арматуры значительно выше жесткости матрицы. Направления и интенсивности армирования могут варьироваться независимо друг от друга.

В качестве механической модели композита принимаются следующие соотношения, связывающие осредненные напряжения σ^c_{ij} со структурными напряжениями σ_{ij} в матрице, σ_k в арматуре, направлениями α_k и интенсивностями ω_k армирования [6]:

$$\sigma^c_{ij} = (1-\omega)\,\sigma_{ij} + \omega_k\sigma_k l_{ik} l_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2), \tag{1.1}$$

где $\omega = \omega_1 + \omega_2$; $l_{1k} = \cos\alpha_k$; $l_{2k} = \sin\alpha_k$. Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Интенсивности армирования должны удовлетворять естественным ограничениям

$$\omega_k \geqslant 0 \quad (k = 1, 2), \quad \omega \leqslant \omega_*, \tag{1.2}$$

где $\omega_* < 1$ — предельно допустимое значение суммарной интенсивности армирования.

Структурные напряжения связаны с деформациями ε_{ij} композита законом Гука

$$\sigma_{11} = \frac{E_m}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = \frac{E_m}{1+\nu}\,\varepsilon_{12}, \tag{1.3}$$