

О ВОЗМУЩЕНИЯХ РАВНОВЕСИЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ  
В ШАРОВОЙ ПОЛОСТИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Ю. К. Братухин, М. И. Шлюмис

(Пермь)

§ 1. Постановка задачи и общее решение для слабых полей. Жидкость с проводимостью  $\sigma$  и вязкостью  $\nu$  в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}$  заполняет произвольной формы полость, стенки которой неподвижны. В равновесии скорость жидкости равна нулю, а внутреннее поле равно внешнему. Малые возмущения скорости  $\mathbf{u}$  и поля  $\mathbf{h}$ , пропорциональные  $e^{-\lambda t}$ , описываются системой уравнений [1]

$$\begin{aligned} -\lambda \mathbf{u} &= \nabla^2 \mathbf{u} + M (\boldsymbol{\gamma} \nabla) \mathbf{h} - \nabla p, & \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \\ -\lambda N \mathbf{h} &= \nabla^2 \mathbf{h} + M (\boldsymbol{\gamma} \nabla) \mathbf{u}, & \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left( N = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}, \quad M = \frac{HR}{c} \left( \frac{\sigma}{\rho\nu} \right)^{1/2} \right)$$

Здесь  $M$  — число Гартмана,  $\boldsymbol{\gamma}$  — единичный вектор вдоль  $\mathbf{H}$ . В качестве единиц выбраны: длина  $R$  (характерный размер полости), время  $R^2/\nu$ , скорость  $\nu/R$ , поле  $4\pi\sqrt{\rho\sigma\nu^3}/cR$ , давление  $\rho\nu^2/R^2$ . Поле вне полости  $\mathbf{h}^\circ$  удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^\circ = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}^\circ = 0 \quad (1.2)$$

На границе полости

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}^\circ \quad (1.3)$$

а на бесконечности  $\mathbf{h}^\circ = 0$ .

Возмущение затухает монотонно, если декремент его  $\lambda$  ( $M$ ) веществен, и осциллирует при  $\lambda$  комплексном.

В этом параграфе строятся решения краевой задачи (1.1) — (1.3) в виде рядов по степеням числа Гартмана  $M$ . Вследствие изотропности пространства быстрота затухания возмущений зависит только от величины, но не от направления внешнего магнитного поля. Поэтому ряды для  $\lambda$  содержат  $M$  лишь в четных степенях. Но тогда, как видно из (1.1), ряды для  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{h}$  должны иметь разную четность по  $M$ . Таким образом, существуют разложения двух типов [1,2].

1°. Если  $\mathbf{h}_{1\alpha}(M)$  четно,  $\mathbf{u}_{1\alpha}(M)$  нечетно

$$\begin{aligned} \lambda_{1\alpha} &= \mu_\alpha + M^2 \mu_\alpha^{(2)} + \dots + M^{2k} \mu_\alpha^{(2k)} + \dots \\ \mathbf{h}_{1\alpha} &= \mathbf{h}_\alpha + M^2 \mathbf{h}^{(2)} + \dots + M^{2k} \mathbf{h}^{(2k)} + \dots \\ \mathbf{u}_{1\alpha} &= M \mathbf{u}^{(1)} + M^3 \mathbf{u}^{(3)} + \dots + M^{2k+1} \mathbf{u}^{(2k+1)} + \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

2°. Если  $\mathbf{h}_{2\alpha}(M)$ , нечетно,  $\mathbf{u}_{2\alpha}(M)$  четно

$$\begin{aligned} \lambda_{2\alpha} &= \nu_\alpha + M^2 \nu_\alpha^{(2)} + \dots + M^{2k} \nu_\alpha^{(2k)} + \dots \\ \mathbf{h}_{2\alpha} &= M \mathbf{h}^{(1)} + M^3 \mathbf{h}^{(3)} + \dots + M^{2k+1} \mathbf{h}^{(2k+1)} + \dots \\ \mathbf{u}_{2\alpha} &= \mathbf{u}_\alpha + M^2 \mathbf{u}^{(2)} + \dots + M^{2k} \mathbf{u}^{(2k)} + \dots \end{aligned} \quad (1.5)$$

Решения первого типа естественно назвать «магнитными», так как при  $M = 0$  в них исчезает скорость и остается только поле  $\mathbf{h}_{1\alpha}(0) = \mathbf{h}_\alpha$ , удовлетворяющее следующим уравнениям и условиям ортогональности:

$$-\mu_\alpha N \nabla \mathbf{h}_\alpha = \nabla^2 \mathbf{h}_\alpha, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}_\alpha = 0, \quad \int \mathbf{h}_\alpha \mathbf{h}_\beta dV = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.6)$$

В решениях второго типа, «гидродинамических», при  $M = 0$  остается лишь скорость  $\mathbf{u}_{2\alpha}(0) = \mathbf{u}_\alpha$ , для которой имеем

$$-\nu_\alpha \mathbf{u}_\alpha = \nabla^2 \mathbf{u}_\alpha - \nabla p_\alpha, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad \int \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\beta dV = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.7)$$

Последовательности  $\{\mathbf{h}_\alpha\}$  и  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  образуют полные системы функций, по которым могут быть разложены любые  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{u}$ . Положим поэтому в (1.4) и (1.5)

$$\mathbf{h}^{(2k)} = \sum_{\sigma \neq \alpha} a_\sigma^{(2k)} \mathbf{h}_\sigma, \quad \mathbf{u}^{(2k+1)} = \sum_{\sigma} b_\sigma^{(2k+1)} \mathbf{u}_\sigma \quad (1.8)$$

$$\mathbf{h}^{(2k+1)} = \sum_{\sigma} a_\sigma^{(2k+1)} \mathbf{h}_\sigma, \quad \mathbf{u}^{(2k)} = \sum_{\sigma \neq \alpha} b_\sigma^{(2k)} \mathbf{u}_\sigma \quad (1.9)$$

Заметим, что в суммах для  $\mathbf{h}^{(2k)}$  и  $\mathbf{u}^{(2k)}$  опущены слагаемые с  $\sigma = \alpha$ , это равносильно изменению нормировки.

Подстановка (1.9) в (1.1) и отбор членов с одинаковыми степенями  $M$  дает

$$\sum_{\sigma} a_\sigma^{(1)} (N\nu_\alpha + \nabla^2) \mathbf{h}_\sigma = -(\gamma \nabla) \mathbf{u}_\alpha \quad (k=0) \quad (1.10)$$

$$\sum_{\sigma} a_\sigma^{(2k+1)} (N\nu_\alpha + \nabla^2) \mathbf{h}_\sigma = \quad (k \neq 0) \quad (1.11)$$

$$= -(\gamma \nabla) \sum_{\sigma \neq \alpha} b_\sigma^{(2k)} \mathbf{u}_\sigma - N \sum_{l=1}^k \nu_\alpha^{(2k-2l+2)} \sum_{\sigma} a_\sigma^{(2l-1)} \mathbf{h}_\sigma$$

$$\nu_\alpha^{(2k)} \mathbf{u}_\alpha + \sum_{\sigma \neq \alpha} b_\sigma^{(2k)} (\nu_\alpha + \nabla^2) \mathbf{u}_\sigma - \nabla p_\alpha^{(2k)} = \quad (1.12)$$

$$= -(\gamma \nabla) \sum_{\sigma} a_\sigma^{(2k-1)} \mathbf{h}_\sigma - \sum_{l=1}^{k-1} \nu_\alpha^{(2k-2l)} \sum_{\sigma \neq \alpha} b_\sigma^{(2l)} \mathbf{u}_\sigma$$

Умножая (1.10) и (1.11) скалярно на  $\mathbf{h}_\beta$  и интегрируя, получим, в силу (1.6),

$$a_\beta^{(1)} = \frac{A_{\beta\alpha}}{N(\nu_\alpha - \mu_\beta)} \quad \left( A_{\alpha\beta} \equiv \int \mathbf{u}_\alpha (\gamma \nabla) \mathbf{h}_\beta dV \right) \quad (1.13)$$

$$a_\beta^{(2k+1)} = \frac{1}{N(\nu_\alpha - \mu_\beta)} \left( N \sum_{l=1}^k \nu_\alpha^{(2k-2l+2)} a_\beta^{(2l-1)} - \sum_{\sigma \neq \alpha} b_\sigma^{(2k)} \bar{A}_{\sigma\beta} \right) \quad (1.14)$$

Умножая (1.12) поочередно на  $\mathbf{u}_\alpha$  и  $\mathbf{u}_\beta$ , получим

$$\nu_\alpha^{(2k)} = - \sum_{\sigma} a_\sigma^{(2k-1)} A_{\alpha\sigma} \quad (1.15)$$

$$b_\beta^{(2k)} = \frac{1}{\nu_\beta - \nu_\alpha} \left( \sum_{l=1}^{k-1} \nu_\alpha^{(2k-2l)} b_\beta^{(2l)} + \sum_{\sigma} a_\sigma^{(2k-1)} A_{\beta\sigma} \right)$$

Коэффициенты разложений «магнитных» возмущений (1.4), (1.8) определяются аналогично

$$b_{\beta}^{(1)} = -\frac{A_{\beta\alpha}}{\mu_{\alpha} - \nu_{\beta}}, \quad \mu_{\alpha}^{(2k)} = \frac{1}{N} \sum_{\sigma} b_{\sigma}^{(2k-1)} A_{\sigma\alpha} \quad (1.16)$$

$$a_{\beta}^{(2k)} = \frac{1}{N(\mu_{\beta} - \mu_{\alpha})} \left( N \sum_{l=1}^{k-1} \mu_{\alpha}^{(2k-2l)} a_{\beta}^{(2l)} - \sum_{\sigma} b_{\sigma}^{(2k-1)} A_{\sigma\beta} \right) \quad (1.17)$$

$$b_{\beta}^{(2k+1)} = \frac{1}{\nu_{\beta} - \mu_{\alpha}} \left( \sum_{l=1}^k \mu_{\alpha}^{(2k-2l+2)} b_{\beta}^{(2k-1)} + \sum_{\sigma \neq \alpha} a_{\sigma}^{(2k)} A_{\beta\sigma} \right)$$

Заметим, что полученные выражения обнаруживают большое сходство с формулами квантовомеханической теории возмущений.

Базисные функции  $\mathbf{u}_{\alpha}$  и  $\mathbf{h}_{\alpha}$  и их декременты  $\nu_{\alpha}$  и  $\mu_{\alpha}$  удовлетворяют самосопряженным уравнениям (1.6) и (1.7) и потому вещественны [3]. При  $M \neq 0$  задача (1.1) становится не самосопряженной, но решение ее продолжает оставаться вещественным, что видно непосредственно из структуры построенных здесь разложений.

Эти ряды можно аналитически продолжить до первой особой точки  $M_{*}$ , так что при  $M < M_{*}$  пока ряды (1.4) и (1.5) сходятся, колебательных возмущений нет.

Последние появятся при  $M > M_{*}$ , после того как в точке  $M_{*}$  пересекутся декременты двух монотонных возмущений разного типа, но одинаковой симметрии [1, 2].

Определим квадратичную по  $M$  поправку к «невозмущенному» декременту  $\mu_{\alpha}$  и  $\nu_{\alpha}$ . Из (1.13), (1.15) и (1.16) найдем

$$\mu_{\alpha}^{(2)} = -\frac{1}{N} \sum_{\sigma} \frac{A_{\sigma\alpha}^2}{\mu_{\alpha} - \nu_{\sigma}}, \quad \nu_{\alpha}^{(2)} = -\frac{1}{N} \sum_{\sigma} \frac{A_{\alpha\sigma}^2}{\nu_{\alpha} - \mu_{\sigma}} \quad (1.18)$$

Отметим, что, как видно из формул, квадратичная поправка к нижнему декременту всегда положительна.

В самосопряженных задачах справедливо обратное: в [4] показано, например, что поправка второго приближения к энергии основного состояния всегда отрицательна.

**§ 2. Возмущения в шаре без поля ( $M=0$ ).** Рассмотрим гидромагнитные возмущения в шаровой полости, причем ограничимся случаем, когда линии тока жидкости и силовые линии возмущений поля лежат в меридианальных плоскостях, проходящих через ось симметрии. При таких возмущениях скорости и поля индуцируются азимутальные токи, текущие по окружностям с центрами на оси симметрии.

Желая воспользоваться разложениями предыдущего параграфа, определим системы базисных функций  $\{\mathbf{u}_{\alpha}(0)\}$  и  $\{\mathbf{h}_{\alpha}(0)\}$ . Эти функции удовлетворяют уравнениям (1.6) и (1.7) и имеют смысл возмущений в отсутствие внешнего поля ( $M=0$ ).

В сферических координатах  $r, \vartheta, \varphi$  решения рассматриваемой структуры выражаются через полиномы Лежандра  $P_l(\cos \vartheta)$  и имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{ln} \\ \mathbf{h}_{ln} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{ln}(r) \\ F_{ln}(r) \end{Bmatrix} \frac{r}{r} P_l(\cos \vartheta) + \begin{Bmatrix} g_{ln}(r) \\ G_{ln}(r) \end{Bmatrix} r \nabla P_l(\cos \vartheta) \quad (2.1)$$

$$p_{ln} = q_{ln}(r) P_l(\cos \vartheta)$$

Подставляя (2.1) в (1.6) и (1.7) и умножая эти уравнения скалярно на  $\mathbf{r}$ ,

получим следующую систему уравнений: (2.2)

$$\begin{aligned} \nu_{ln} f_{ln} + q_{ln}' + \frac{l(l+1)}{r^2} [f_{ln} - (g_{ln} r)'] &= 0, & (f_{ln} r^2)' &= l(l+1)(g_{ln} r) \\ \mu_{ln} N F_{ln} + \frac{l(l+1)}{r^2} [F_{ln} - (G_{ln} r)'] &= 0, & (F_{ln} r^2)' &= l(l+1)(G_{ln} r) \end{aligned} \quad (2.3)$$

(проекция (1.6) на ось  $\hat{\varphi}_1$  дает уравнение, являющееся следствием (2.4)).  
Граничные условия вытекают из (1.3)

$$f_{ln}(1) = g_{ln}(1) = 0, \quad F_{ln}(1) = F_{ln}^\circ(1), \quad G_{ln}(1) = G_{ln}^\circ(1) \quad (2.4)$$

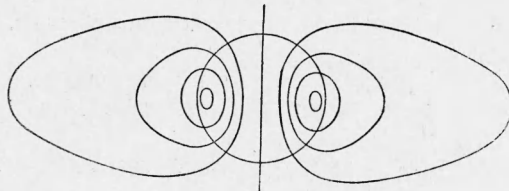
Для определения  $q_{ln}$  возьмем от (1.7) дивергенцию  $\nabla^2 p_\alpha = 0$

$$q_{ln}'' + \frac{2}{r} q_{ln}' - \frac{l(l+1)}{r^2} q_{ln} = 0$$

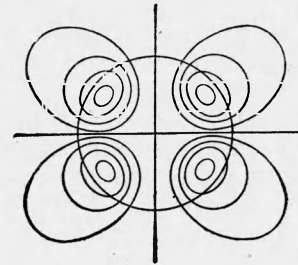
Взяв решение этого уравнения, ограниченное в нуле, найдем

$$q_{ln}'(r) = B_{ln} r^{l-1} \quad (2.5)$$

где  $B_{ln}$  — постоянная интегрирования.



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставляя  $(g_{ln} r)'$  из уравнения непрерывности в первое уравнение (2.2), получим для  $f_{ln}$  неоднородное уравнение Бесселя

$$f_{ln}'' + \frac{4}{r} f_{ln}' + \left[ \nu_{ln} - \frac{l(l+1)-2}{r^2} \right] f_{ln} = B_{ln} r^{l-1} \quad (2.6)$$

Общее решение этого уравнения, ограниченное в нуле, будет

$$f_{ln}(r) = r^{-3/2} C_2 J_{l+1/2}(\sqrt{\nu_{ln}} r) + \frac{B_{ln} r^{l-1}}{\nu_{ln}} \quad (2.7)$$

Из (2.4) и уравнения непрерывности следует

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 0$$

Решение (2.7) удовлетворяет этим граничным условиям, если

$$J_{l+1/2}(\sqrt{\nu_{ln}}) = 0 \quad (2.8)$$

Окончательно имеем (2.9)

$$f_{ln}(r) = C_2 \left( \frac{J_{l+1/2}(\sqrt{\nu_{ln}} r)}{r^{3/2}} - J_{l+1/2}(\sqrt{\nu_{ln}}) r^{l-1} \right), \quad g_{ln}(r) = \frac{(f_{ln} r^2)'}{l(l+1)r}$$

Система (2.3) решается аналогично. Вычисления дают

$$F_{ln}(r) = C_1 \frac{J_{l+1/2}(\sqrt{N\mu_{ln}} r)}{r^{3/2}}, \quad G_{ln}(r) = \frac{(F_{ln} r^2)'}{l(l+1)r} \quad (2.10)$$

Решения (2.10) должны быть «сшиты» на границе с решениями  $F_{ln}^\circ$  и  $G_{ln}^\circ$  вне шара. Последние определяются из системы (1.2), решение которой, равное нулю на бесконечности, может быть записано в виде

$$\begin{aligned} h_{ln}^\circ &= \frac{D}{r^{l+2}} \left[ (l+1) P_l \frac{\mathbf{r}}{r} - r \nabla P_l \right] \equiv \\ &\equiv F_{ln}^\circ P_l(\cos \vartheta) \frac{\mathbf{r}}{r} + G_{ln}^\circ r \nabla P_l(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подстановка (2.10) и (2.11) в (2.4) дает два уравнения, исключая из которых  $C_1$  и  $D$ , найдем

$$J_{l-1/2}(\sqrt{N\mu_{ln}}) = 0 \quad (2.12)$$

Корни уравнений (2.8) и (2.12) определяют спектры гидродинамических  $\nu_{ln}$  и магнитных  $\mu_{ln}$  декрементов при  $M = 0$ . Выражения (2.1) могут быть представлены в виде ротора некоторой функции («функции тока»). Например,

$$\mathbf{h}_{ln} = - \text{rot} \left[ \frac{F_{ln} r}{l(l+1)} \mathbf{r} \times \nabla P_l(\cos \vartheta) \right]$$

Отсюда легко получить уравнения магнитных силовых линий в меридианальных плоскостях

$$r^2 F_{ln}(r) \sin \vartheta \frac{dP_l(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = \text{const} \quad (2.13)$$

(вне шара берется  $F_{ln}^\circ$ ). На фиг. 1 и 2 приведены поля  $\mathbf{h}_{11}$  и  $\mathbf{h}_{21}$ . Линии тока жидкости похожи на силовые линии возмущений поля с той только разницей, что первые не выходят за пределы шаровой полости.

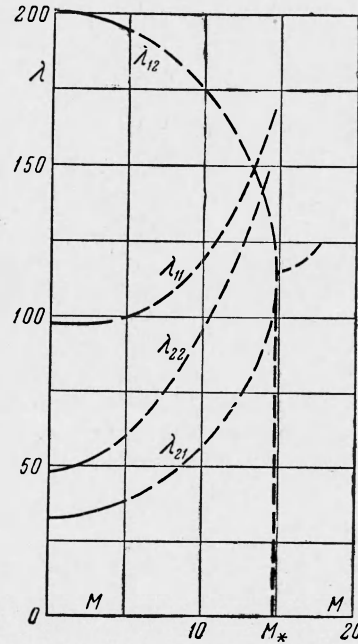
**§ 3. Возмущения в слабом поле.** Пусть  $M \ll M_*$ . Во внешнем магнитном поле ( $M \neq 0$ ) возмущения скорости и поля перестают быть независимыми (см. (1.1)). В нашем примере это проявляется в том, что возмущение скорости с определенными  $l, n$  возбуждает возмущения поля с различными  $l', n'$ , и наоборот.

В силу взаимной ортогональности полиномов Лежандра, при этом имеет место «правило отбора»  $l' = l \pm 1$ .

Таким образом, в каждом решении уравнений (1.1) для шара  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{h}$  имеют разную четность.

Для квадратичных поправок к декрементам формулы (1.18) дают

$$\begin{aligned} \mu_{ln}^{(2)} &= - \frac{1}{N} \sum_m \left[ \frac{(A_{ln}^{l+1,m})^2}{\mu_{ln} - \nu_{l+1,m}} + \frac{(A_{ln}^{l-1,m})^2}{\mu_{ln} - \nu_{l-1,m}} \right] \\ \nu_{ln}^{(2)} &= - \frac{1}{N} \sum_m \left[ \frac{(A_{l+1,m}^{ln})^2}{\nu_{ln} - \mu_{l+1,m}} + \frac{(A_{l-1,m}^{ln})^2}{\nu_{ln} - \mu_{l-1,m}} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$



Фиг. 3

