

## ОБ ОБТЕКАНИИ УГЛА НЕСТАЦИОНАРНЫМ ОКОЛОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

*Б. И. Заславский (Новосибирск)*

В околосвуковом приближении исследуются плоские нестационарные течения сжимаемого газа, которые возникают при внезапном разрушении плоской перегородки, отделяющей полупространство, заполненное движущимся газом, от вакуума.

Течение строится при помощи точных частных решений уравнений нестационарных околосвуковых течений [1,2].

§ 1. Пусть плоскость  $y = 0$  — непроницаемая перегородка. В области  $y > 0$  вдоль оси  $x$  движется газ с некоторой скоростью  $u \leq a_*$ . В момент времени  $t = 0$  полуплоскость  $y = 0, x > 0$  внезапно убирается. В этот момент область равномерного потока непосредственно граничит с вакуумом, свободная поверхность совпадает с полуплоскостью. В дальнейшем от каждой точки свободной поверхности побегут волны разрежения, в области их взаимодействия скорость потока возрастет, в окрестности точки  $O$  возникнет центрированная волна разрежения. Течение в этой области определяют уравнения нестационарных околосвуковых течений [2-4]

$$\begin{aligned} \partial U / \partial \tau - U \partial U / \partial X + \partial V / \partial Y &= 0, & \partial V / \partial X + \partial U / \partial Y &= 0 \\ \tau &= t / 2t_*, & x &= \varepsilon X / a_* t_*, & y &= \varepsilon^{1/2} Y / a_* t_* \\ u - u_* &= \varepsilon U / (\kappa + 1), & v &= \varepsilon^{1/2} V / (\kappa + 1) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v$  — составляющие вектора скорости,  $a_*$  — критическая скорость звука,  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $t_*$  — некоторое характерное время,  $\varepsilon$  — малая величина.

Последние два равенства накладывают ограничения на потоки, которые могут быть рассмотрены в рамках околосвукового приближения. При  $t > 0$  на полусоси  $x > 0$  эти равенства нарушаются, поскольку вокруг точки  $x = 0, y = 0$  поток поворачивается на конечный угол, при этом проекции вектора скорости  $u$  и  $v$  как бы меняются ролями:  $v$  становится сравнимой с  $a_*$ , а  $u$  малой. В околосвуковом приближении в таких областях течение полагают  $U = \infty, V = \infty$ . Проследить за динамикой свободной поверхности в околосвуковом приближении при принятой постановке задачи невозможно. Вследствие сверхзвукового характера течения на поток эти нарушения не влияют. Область потока, возмущенного влиянием свободной поверхности, отделяется от области, куда не дошли возмущения огибающей волн разрежения нулевой амплитуды — характеристической поверхностью уравнений (1.1). Уравнение характеристических поверхностей системы (1.1) имеет вид:

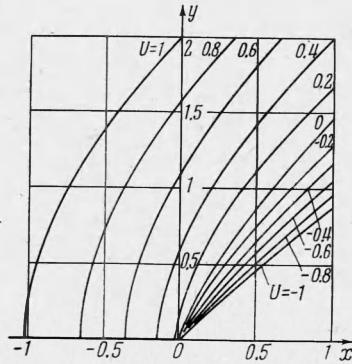
$$\partial X / \partial \tau + U + (\partial X / \partial Y)^2 = 0 \quad (1.2)$$

Искомая поверхность распространяется по равномерному, но меняющемуся со временем, течению  $u = u_0(\tau)$  или

$$U = U_0(\tau), \quad V = U_0'(\tau) Y \quad (1.3)$$

В момент времени  $t = 0$  она должна совпадать с лучом  $Y = 0, X > 0$ . Интегрируя (1.2) при этих условиях, получаем уравнение этой характеристической поверхности

$$X = \frac{1}{4\tau} Y^2 - \int_0^\tau U(t) dt \quad (1.4)$$



Фиг. 1

В окрестности точки  $O$  имеет место при  $t > 0$  течение Прандтля — Майера, т. е. из (1.1) при  $X \rightarrow 0, Y \rightarrow 0$

$$U = -X^2 / Y^2, \quad V = -2/3 X^3 / Y^3 \quad (1.5)$$

Таким образом, искомое решение уравнений (1.1) должно на характеристике (1.4) переходить в течение (1.3), а в окрестности точки  $O$  — в (1.5).

§ 2. Течение в возмущенной области будем строить при помощи точных частных решений, найденных в работах [1,2].

$$U = \varphi_2(q, \tau) Y^2 + \varphi_0(q, \tau), \quad V = \varphi_3(q, \tau) Y^3 + \varphi_1(q, \tau) Y, \quad X = q Y^2 + \chi_0(q, \tau) \quad (2.1)$$

Здесь  $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{2\tau q} - \varphi_{2q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_{2q}(\varphi_{2q} - 2q) - 2\varphi_2 &= 0 \\ \varphi_1 &= \varphi_{0q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_{0\tau}, & \varphi_3 &= 1/3 [\varphi_{2q}(\varphi_2 + 4q^2) - 4q\varphi_2 - \varphi_{2\tau}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

а  $\varphi_0, \chi_0$  из уравнений

$$\varphi_{0q} = -2qv, \quad \chi_{0q} = v, \quad v_q(\varphi_2 + 4q^2) + 8qv - v_\tau = 0 \quad (2.3)$$

На характеристической поверхности (1.4), на которой  $q = q_0(\tau)$ , течение (2.1) должно переходить в (1.3). Это требование приводит к следующим условиям

$$q = q_0(\tau) = 1/4\tau, \quad \varphi_2(q_0, \tau) = 0, \quad \psi_3(q_0, \tau) = 0$$

$$\varphi_0(\tau, q_0) = U_0(\tau), \quad \chi_0(\tau, q_0) = -\int_0^\tau U(\tau) d\tau, \quad \psi_1(\tau, q_0) = -U_0'(\tau) \quad (2.4)$$

В точке  $O$  условие (1.4) будет выполнено, если

$$\varphi_2/q^2 \rightarrow -1, \quad \psi_3/q^3 \rightarrow -2/3, \quad \varphi_0 \rightarrow 0, \quad \chi_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } q \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

Уравнение (2.2) имеет частное решение

$$\varphi_2 = -q^2 + c(\tau) \quad (2.6)$$

удовлетворяющее (2.5);  $c(\tau)$  — произвольная функция. Из последних двух выражений (2.4) находим

$$c(\tau) = 1/16 \tau^2$$

При этом

$$\varphi_2 = -q^2 + \frac{1}{16\tau^2}, \quad \psi_3 = -\frac{2}{3}q^3 - q\frac{1}{8\tau^2} + \frac{1}{24\tau^3} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.3) при учете (2.5) и (2.7) примут вид

$$\varphi_0(q, \tau) = -2 \int_\infty^q qv dq, \quad \chi_0 = \int_\infty^q v dq \quad (2.8)$$

$$v_q(3q^2 + 1/16\tau^2) - v_\tau + 8qv = 0$$

Из (2.4) следует

$$\int_\infty^{1/4\tau} qv dq = -\frac{1}{2}U_0(\tau), \quad \int_\infty^{1/4\tau} v dq = -\int_0^\tau U_0(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

Легко показать, что при выполнении одного из этих условий другое выполняется тождественно. Действительно, дифференцируя второе выражение (2.9), получаем

$$\int_\infty^{1/4\tau} v_q \left(3q^2 + \frac{1}{16\tau^2}\right) dq + \int_\infty^{1/4\tau} 8qv dq - \frac{v(q_0, \tau)}{4\tau^2} = 2 \int_\infty^{1/4\tau} qv dq = -U_0(\tau)$$

Заметим, что условия, наложенные на  $\psi_1$ , в этом случае также выполняются тождественно. Решение уравнения (2.8) имеет вид

$$v = F(\eta) (\sqrt{\tau} - 3\eta)^{2/3} \tau^{2/3}, \quad \eta = \sqrt{\tau} \frac{1 - 4q\tau}{1 - 12q\tau} \quad (2.10)$$

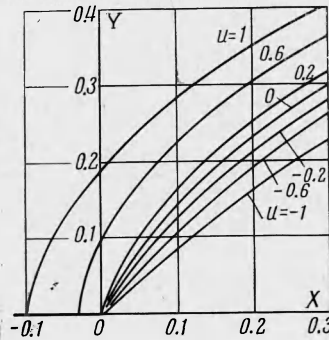
Здесь  $F(\eta)$  — произвольная функция, которая должна быть найдена из (2.9). Переходя от  $q$  к  $\eta$ , получаем

$$\int_0^{1/3\sqrt{\tau}} F(\eta) (1/3\sqrt{\tau} - \eta)^{-1/3} d\eta = \frac{15}{2} U_0(\tau) \tau^{1/3} \quad (2.11)$$

Отсюда

$$F(\eta) = \frac{15\sqrt{3}}{4\pi} \frac{d}{d\eta} \int_0^\eta \frac{U_0(\tau) \tau^{1/3}}{(\eta - \tau)^{2/3}} d\tau \quad (2.12)$$

Таким образом, получено точное решение, удовлетворяющее граничным условиям (2.4) и (2.5).



Фиг. 2

При  $U_0(\tau) = A\tau^\alpha$ , ( $\alpha \geq 0$ ) уравнение (2.11) легко интегрируется. Особенно простой вид (2.1) принимают в случае  $U_0(\tau) = U_0 = \text{const}$ . В этом случае  $F = 5 \cdot 3^{2/3} U_0$  и решения принимают вид

$$U = -\frac{16q^2\tau^2 - 1}{16\tau^2} Y^2 + \frac{U_0}{\sqrt[3]{2}} \frac{20q\tau - 1}{(12q\tau - 1)^{5/3}}, \quad X = qy^2 - \frac{U_0\tau}{(6q\tau - 1/2)^{5/3}} \quad (2.13)$$

$$V = \left( \frac{1}{24\tau^3} - \frac{2}{3} q^2 - q \frac{1}{8\tau^2} \right) Y^3 + 10 \sqrt[3]{2} U_0 \frac{(4q\tau - 1)q}{(1 - 12q\tau)^{5/3}} Y$$

Полученное решение дает возможность проследить во времени процесс установления течения типа течения Прадтля — Майера, а также проследить влияние волн разрежения на первоначальное течение. На фиг. 1 и 2 показаны поля скоростей для двух моментов времени  $\tau = 0.1$  и  $\tau = 1$ ,  $U_0 = 1$ .

Поступила 16 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. З а с л а в с к и й Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких» волн. ПМТФ, 1962, № 1.
2. З а с л а в с к и й Б. И., К л е п и к о в а Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околосвуковых течений газа. ПМТФ, 1965, № 6.
3. О в с я н н и к о в Л. В. Уравнения околосвукового движения газа. Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, № 6.
4. Р ы ж о в О. С., Ш е ф т е р Г. М. О нестационарных течениях газа в соплах Лаваля. Докл. АН СССР, 1959, т. 128, № 3.

#### О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В СРЕДАХ С ВЯЗКОСТЬЮ

*А. Д. Чернышов (Воронеж)*

Вопрос о толщине ударных волн в вязком газе рассматривался в работах [1,2]. В настоящей работе выводятся общие уравнения для решения задач о течении среды внутри слоя ударной волны и изменении этого слоя в средах с вязкостью.

В качестве примера рассматривается подобная задача для среды Кельвина.

1. В работе [3] показывается, что в вязкой жидкости волны разрыва нулевой толщины распространяться не могут. Можно предположить, что вследствие действия сил вязкости в таких средах ударные волны представляют некоторый слой, внутри которого происходит быстрое, но непрерывное изменение функций. Толщина слоя ударной волны не одинакова в различных местах.

При выводе основных уравнений для решения задачи о течении среды с вязкостью внутри слоя ударной волны, введем следующие предположения.

а) Толщина слоя ударной волны мала, а передний и задний фронты этого слоя в первом приближении параллельны между собой.

б) Если значения некоторой величины  $z$  на обоих фронтах ударной волны одинаковые, то эта величина в первом приближении не зависит от координаты, поперечной к слою ударной волны, т. е.

$$z = C \text{ при } [z] = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $C$  — функция, не зависящая от поперечной координаты.

в) Если величина  $z$  имеет разные значения на фронтах слоя ударной волны, то будем пренебрегать производными от этой величины по направлениям в касательной плоскости к фронтам слоя ударной волны, по сравнению с производной от этой величины в поперечном направлении, т. е.

$$z_{,i} = z_{,k} v^k v_i \text{ при } [z] \neq 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $v_i$ ,  $v^k$  — ковариантные и контравариантные компоненты нормали к фронтам слоя ударной волны. Заметим, что соотношение (1.2) тем точнее, чем меньше толщина слоя ударной волны.

Вследствие малости толщины слоя ударной волны имеют место динамические условия для разрывов плотности  $\rho$ , скорости  $v_i$  и напряжений [4]  $\sigma_{ij}$

$$[\rho(v_n - C)] = 0, \quad [\sigma_{ij} v^j - \rho(v_n - G)v_i] = 0 \quad (1.3)$$

Применяя (1.1) к этим выражениям, получим

$$\rho(v_n - G) = C, \quad \sigma_{ij} v^j - C v_i = C_i \quad (1.4)$$

Здесь  $C$  — произвольная функция,  $C_i$  — произвольный вектор, не зависящие от поперечной координаты. Первое уравнение (1.4) было получено в работе [1].