

содержит мнимую часть, определяющую скорость роста линейных колебаний. Это означает, что в задаче наряду со временем $t_0 \sim \varepsilon^{-2}t$ и $t_1 \sim \varepsilon^{-2/3}t$ присутствует время $t_2 \sim t$. Учет времени t_2 может изменить уравнения для приближений, предшествующих четвертому (напомним, что все разложения ведутся в работе по параметру $\varepsilon^{2/3}$). Поэтому возникает подозрение, что не включенная в асимптотические ряды зависимость от времени t_2 может не только приводить к неверной скорости роста возмущений при линеаризации задачи, но и исказить эволюцию амплитуд как функций времени t_1 в нелинейном режиме.

Таким образом, отмеченную рецензентами в отзыве на первоначальный вариант работы неясность предписываемого вида решения следует понимать не просто как пожелание к улучшению стиля изложения, а как нечеткость формулировки существа рассматриваемой проблемы. Из переработанного варианта статьи видно, что замечания рецензентов не до конца поняты автором.

Тем не менее статья А. П. Хохлова «К теории резонансного взаимодействия волн Толлмина — Шлихтинга» заслуживает опубликования в журнале ПМТФ, причем в том виде, в котором она представлена после переработки. Однако, как следует из вышеизложенного, вопрос о том, являются ли содержащиеся в ней результаты асимптотически точными, остается открытым.

УДК 534.2 : 532.529

Д. А. Губайдуллин, А. И. Ивандаев

ВЛИЯНИЕ ПОЛИДИСПЕРСНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В СМЕСЯХ ГАЗА С ПАРОМ И КАПЛЯМИ ЖИДКОСТИ

Распространение нестационарных возмущений малой амплитуды в гетерогенных смесях газа с паром и каплями жидкости является одной из актуальных проблем волновой динамики двухфазных систем. Такие гетерогенные среды — основные рабочие тела в энергетических установках, аппаратах химической технологии и других установках и аппаратах современной техники. При этом для контроля протекания различных технологических процессов в технике широко используются расчеты и измерения скорости распространения и поглощения акустических волн. Поэтому важное значение приобретают исследования по изучению влияния различных физико-химических превращений на характер распространения возмущений в двухфазных газокapпельных системах.

Несмотря на ряд опубликованных работ, распространение звуковых волн в парогaзoкapпельных системах при наличии межфазного массообмена изучено еще далеко не достаточно. Большинство работ по акустике парогaзoкapпельных сред посвящено исследованию распространения слабых волн в монодисперсных системах [1—12]. Ряд аспектов влияния полидисперсности на распространение акустических возмущений в газозвзвесах при отсутствии массообмена рассмотрен ранее в [4, 13]. Практически не изучен вопрос о распространении звука в полидисперсных парогaзoкapпельных смесях. В настоящей работе впервые исследовано влияние полидисперсности на распространение слабых волн в парогaзoкapпельных системах при учете эффектов неравновесного фазового превращения.

1. Рассмотрим одномерное движение полидисперсной парогaзoкapпельной смеси в акустическом поле, когда возмущения параметров сме-

си малы. Основными характеристиками такой взвеси являются параметры:

$$n = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N(a) da, \quad \alpha_2 = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \frac{4}{3} \pi a^3 N(a) da, \quad \alpha_2 + \alpha_1 = 1,$$

$$\rho_1 = \alpha_1 \rho_1^0, \quad \rho_2 = \alpha_2 \rho_2^0 = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} m_2(a) N(a) da, \quad m_2 = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_2^0,$$

$$m = \rho_{20}/\rho_{10}, \quad k_j = \rho_{j0}/\rho_{10}, \quad j = V, G, \quad k_V + k_G = 1.$$

Здесь $N(a)$ — функция распределения капель по размерам во взвеси с минимальным a_{\min} и максимальным a_{\max} радиусами капель; n , α_i , ρ_i^0 , ρ_i — число всех частиц в единице объема, объемное содержание, истинная и средняя плотности газовой фазы ($i=1$) и частиц ($i=2$); m_2 , m — масса одной капли и начальное массовое содержание капель; k_j — начальная концентрация парового ($j=V$) и газового ($j=G$) компонентов газообразной фазы; индексом 0 отмечаются параметры начального невозмущенного однородного состояния смеси.

Систему линейных дифференциальных уравнений движения полидисперсной парогазокапельной смеси получим, интегрируя линеаризованные уравнения движения для монодисперсной взвеси [7] по радиусу капля a от a_{\min} до a_{\max} *. В системе координат, относительно которой невозмущенная смесь покоится, уравнения сохранения масс, импульсов несущей фазы и дисперсных капель имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho_i'}{\partial t} + \rho_{i0} \frac{\partial v_1'}{\partial x} = - \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{j}_{V\Sigma} da,$$

$$i = 1, V, \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_2'}{\partial t} + \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{m}_{20} \frac{\partial \tilde{v}_2'}{\partial x} da = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{j}_{G\Sigma} da,$$

$$\rho_{10} \frac{\partial v_1'}{\partial x} + \frac{\partial p_1'}{\partial x} + \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{f} da = 0, \quad \tilde{m}_{20} \frac{\partial \tilde{v}_2'}{\partial t} = \tilde{f},$$

$$\tilde{\rho}_2' = \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} [\tilde{m}_2 \tilde{N}_0 + \tilde{m}_{20} \tilde{N}'] da, \quad \rho_1 = \rho_V + \rho_G, \quad p_1 = p_V + p_G,$$

где v , p — скорость и давление; $j_{V\Sigma}$ — диффузионный поток пара к поверхности капли Σ ; $j_{G\Sigma}$ — интенсивность конденсации на поверхности индивидуальной капли; f — сила, действующая со стороны несущей фазы на отдельную каплю; знаком \sim отмечены величины, зависящие от параметра a ; штрихом — возмущения параметров.

Уравнения притока тепла к газовой фазе, каплям и поверхности индивидуальной капли запишем как

$$(1.2) \quad \rho_{10} c_{p1} \frac{\partial T_1'}{\partial t} - \alpha_{10} \frac{\partial p_1'}{\partial t} = - \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{q}_{1\Sigma} da, \quad \tilde{m}_{20} c_2 \frac{\partial \tilde{T}_2'}{\partial t} = \tilde{q}_{2\Sigma},$$

$$\tilde{q}_{1\Sigma} + \tilde{q}_{2\Sigma} = -\tilde{j}_{20} l_0, \quad \tilde{j}_{V\Sigma} = \tilde{j}_{G\Sigma}, \quad c_{pi} = k_V c_{pV} + k_G c_{pG}.$$

Здесь T — температура; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; c_2 — теплоемкость несжимаемой дисперсной фазы; $q_{j\Sigma}$ — интенсивность

* Процедура интегрирования для частного случая однокомпонентной смеси пара с каплями рассмотрена ранее в [13].

теплообмена j -й фазы ($j = 1, 2$) с поверхностью капли; l — удельная теплота парообразования.

Линеаризованные уравнения состояния пара и газовой смеси в целом представим в виде

$$(1.3) \quad p'_V = \frac{C_V^2}{\gamma_V \alpha_{10}} (\rho'_V + r k_V \rho'_2) + p_{V0} \frac{T'_1}{T_0},$$

$$p'_1 = \frac{C_{10}^2}{\gamma_{10} \tilde{\tau}_{10}} [g_2 (\rho'_1 + r \rho'_2) + g_1 (\rho'_V + r k_V \rho'_2)] + p_{10} \frac{T'_1}{T_0},$$

$$r = \rho_{10}^0 / \rho_{20}^0, \quad b = R_V / R_{10}, \quad g_1 = (R_V - R_G) / R_{10}, \quad g_2 = 1 - k_V g_1$$

(C — скорость звука, γ — показатель адиабаты).

При задании силового, теплового и массового взаимодействия фаз учитывается зависимость силы f , тепловых потоков $q_{j\Sigma}$ ($j = 1, 2$) и интенсивности массообмена $j_{V\Sigma}$ от частоты колебаний ω [8, 13—15]:

$$(1.4) \quad \tilde{f} = \tilde{m}_{20} \frac{\tilde{v}'_1 - \tilde{v}'_2}{\tilde{\tau}_v^*}, \quad \tilde{j}_{V\Sigma} = \tilde{m}_{20} \frac{r}{p_{10}} \frac{p'_V - \tilde{p}'_{V\Sigma}}{\tilde{\tau}_p^*}, \quad \tilde{j}_\Sigma = m_{20} \frac{r}{p_{10}} \frac{\tilde{p}'_{V\Sigma} - \tilde{p}'_{VS}}{\tilde{\tau}_\beta},$$

$$\tilde{q}_{1\Sigma} = \tilde{m}_{20} \frac{c_{p1}}{m} \frac{T'_1 - \tilde{T}'_\Sigma}{\tilde{\tau}_{T1}^*}, \quad \tilde{q}_{2\Sigma} = \tilde{m}_{20} c_2 \frac{\tilde{T}'_2 - \tilde{T}'_\Sigma}{\tilde{\tau}_{T2}^*}, \quad \tilde{\nu}'_{VS} = \frac{l_0 \rho_{V0}^0}{(1 - r k_V) T_0} \tilde{T}'_\Sigma.$$

Здесь \tilde{p}_{VS} — парциальное давление насыщения пара, связанное с температурой поверхности капли T_Σ уравнением Клапейрона — Клаузиуса; $\tilde{\tau}^*$ — комплексные времена, характеризующие динамику и тепломассообмен одиночной капли с окружающим газом в высокочастотном акустическом поле [8, 15]:

$$(1.5) \quad \tilde{\tau}_v^* = \tilde{\tau}_v \left[1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tilde{\tau}_{u1})^{1/2} \right]^{-1}, \quad \tilde{\tau}_p^* = \frac{1}{3} \frac{R_V}{R_{10}} (1 - k_V) \tilde{\tau}_d \tilde{\varphi}(\tilde{y}),$$

$$\tilde{\tau}_\beta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma_V}} \frac{\gamma_1 C_V^a}{\beta C_1^2}, \quad \tilde{\tau}_{T1}^* = \frac{1}{3} \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}} \tilde{\tau}_{\lambda 1} \eta_1(\tilde{z}_1), \quad \tilde{\tau}_{T2}^* = \frac{1}{15} \tilde{\tau}_{\lambda 2} \eta_2(\tilde{z}_2),$$

$$\tilde{\tau}_v = \frac{2}{9} \frac{\rho_2^0 a^2}{\mu_1}, \quad \tilde{\tau}_{u1} = \frac{\rho_1^0 a^2}{\mu_1}, \quad \tilde{\tau}_d = \frac{a^2}{D_1}, \quad \tilde{\tau}_{\lambda j} = \frac{a^2}{\kappa_j},$$

$$\tilde{y} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tilde{\tau}_d)^{1/2}, \quad \tilde{z}_j = \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega \tilde{\tau}_{\lambda j})^{1/2}, \quad j = 1, 2,$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{y}) = \frac{1}{1 + \tilde{y}}, \quad \eta_1(\tilde{z}_1) = \frac{1}{1 + \tilde{z}_1}, \quad \eta_2(\tilde{z}_2) =$$

$$= \frac{5 [3\tilde{z}_2 - (3 + \tilde{z}_2^2) \operatorname{th} \tilde{z}_2]}{\tilde{z}_2^2 (\operatorname{th} \tilde{z}_2 - \tilde{z}_2)}, \quad \kappa_j = \frac{\lambda_j}{\rho_j^0 c_j}$$

(μ_1 — динамическая вязкость газа, λ — коэффициент теплопроводности, D_1 — коэффициент бинарной диффузии, β — коэффициент аккомодации).

Система уравнений (1.1) — (1.5) замкнута и может быть использована для исследования распространения акустических возмущений в полидисперсных смесях газа с паром и каплями жидкости.

2. Исследуем решения системы линейных уравнений (1.1) — (1.5), имеющие вид прогрессивных волн для возмущений:

$$(2.1) \quad \psi' = A_\psi \exp i(K_* x - \omega t) = A_\psi \exp(-\tilde{K}_{**} x) \exp[i(Kx - \omega t)],$$

$$K_* = K + iK_{**}, \quad C_p = \omega/K, \quad C_g = d\omega/dK, \quad \sigma = 2\pi K_{**}/K.$$

Здесь A_ψ — комплексная амплитуда возмущения параметра ψ ; i — мнимая единица; K_* — комплексное волновое число; K_{**} — линейный коэффициент затухания; C_p , C_g и σ — фазовая и групповая скорости и декремент затухания на длине волны. Подставив решения вида (2.1)

в уравнения (1.1)–(1.5), получим

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & -i\omega A_{\rho i} + i\rho_{i0} K_* A_{v1} + \frac{r\rho_{20}}{P_{10}} \left\langle \frac{A_{pV} - \tilde{A}_{pV\Sigma}}{\tilde{\tau}_p^*} \right\rangle = 0, \quad i = 1, V, \\
 & -i\omega \tilde{A}_{\rho 2} + iK_* \rho_{20} \langle \tilde{A}_{v2} \rangle - \frac{r\rho_{20}}{P_{10}} \left\langle \frac{\tilde{A}_{pV\Sigma} - \tilde{A}_{pVS}}{\tilde{\tau}_\beta} \right\rangle = 0, \\
 & -i\omega \rho_{10} A_{v1} + iK_* A_{p1} + \rho_{20} \left\langle \frac{A_{v1} - \tilde{A}_{v2}}{\tilde{\tau}_v^*} \right\rangle = 0, \\
 & -i\omega \rho_{10} c_{p1} A_{T1} + i\omega \alpha_{10} A_{p1} + r\rho_{20} c_{p1} \left\langle \frac{A_{T1} - \tilde{A}_{T\Sigma}}{\tilde{\tau}_{\Sigma 1}^*} \right\rangle = 0, \\
 & -i\omega \tilde{A}_{v2} - \frac{A_{v1} - \tilde{A}_{v2}}{\tilde{\tau}_v^*} = 0, \quad -i\omega \tilde{A}_{T2} + \frac{\tilde{A}_{T2} - \tilde{A}_{T\Sigma}}{\tilde{\tau}_{T2}^*} = 0, \\
 & rc_{p1} \frac{A_{T1} - \tilde{A}_{T\Sigma}}{\tilde{\tau}_{\Sigma 1}^*} + c_2 \frac{\tilde{A}_{T2} - \tilde{A}_{T\Sigma}}{\tilde{\tau}_{T2}^*} + \frac{rl_0}{P_{10}} \frac{\tilde{A}_{pV\Sigma} - \tilde{A}_{pVS}}{\tilde{\tau}_\beta} = 0, \\
 & \frac{A_{pV} - \tilde{A}_{pV\Sigma}}{\tilde{\tau}_p^*} = \frac{\tilde{A}_{pV\Sigma} - \tilde{A}_{pVS}}{\tilde{\tau}_\beta}, \quad \tilde{A}_{pVS} = \frac{l_0 \rho_{V0}^0}{(1 - rk_V) T_0} \tilde{A}_{T\Sigma}, \\
 & A_{pV} - \frac{C_V^2}{\gamma_V \alpha_{10}} (A_{\rho V} + rk_V \tilde{A}_{\rho 2}) - \frac{P_{V0}}{T_0} A_{T1} = 0, \\
 & A_{p1} - \frac{C_{10}^2}{\gamma_{10} \alpha_{10}} [g_2 (A_{\rho 1} + r\tilde{A}_{\rho 2}) + g_1 (A_{\rho V} + rk_V \tilde{A}_{\rho 2})] - \frac{P_{10}}{T_0} A_{T1} = 0 \\
 & \left(\tilde{\tau}_{\Sigma 1}^* = \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{10}} \tilde{\tau}_{T1}^* \right).
 \end{aligned}$$

Здесь линейный оператор осреднения [13]

$$\langle \tilde{h} \rangle = \left(\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{h} a^3 da \right) / \left(\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 a^3 da \right) = \frac{1}{\rho_{20}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \tilde{N}_0 \tilde{m}_{20} \tilde{h} da.$$

В соответствии с определением для параметров газовой фазы $A_{\psi 1}$ в силу их независимости от параметра a имеем $\langle A_{\psi 1} \rangle = A_{\psi 1}$.

Для того чтобы в уравнениях (2.2) вынести неизвестные амплитуды $A_{pV\Sigma}$, A_{pVS} , $A_{T\Sigma}$, A_{v2} из-под знака оператора осреднения $\langle \rangle$, выразим их через амплитуды параметров газовой фазы $A_{\psi 1}$, которые от a не зависят, и известные характерные времена $\tilde{\tau}^*$:

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & \tilde{A}_{v2} = (1 - i\omega \tilde{\tau}_v^*)^{-1} A_{v1}, \quad \tilde{A}_{pV\Sigma} = (\tilde{\tau}_p^* + \tilde{\tau}_\beta)^{-1} (\tilde{\tau}_\beta A_{pV} - \tilde{\tau}_p^* \tilde{A}_{pVS}), \\
 & \tilde{A}_{pVS} = \frac{l_0 \rho_{V0}^0}{(1 - rk_V) T_0} \tilde{A}_{T\Sigma}, \quad \tilde{A}_{T\Sigma} = \tilde{Z} \left[A_{T1} + i\omega \tilde{\tau}_{\Sigma 1}^* \tilde{e}_2 \left(\frac{l_0}{P_0 c_{p1}} \right) A_{pV} \right], \\
 & \tilde{Z} = \left[1 - i\omega \tilde{\tau}_{\Sigma 1}^* \left(\tilde{e}_1 - \frac{\rho_{V0}^0}{P_{10}} l_0 (\gamma_1 - 1) \tilde{e}_2 \right) \right]^{-1}, \\
 & \tilde{e}_1 = \frac{c_2}{rc_{p1}} (1 - i\omega \tilde{\tau}_{T2}^*)^{-1}, \quad \tilde{e}_2 = [i\omega (\tilde{\tau}_p^* + \tilde{\tau}_\beta)]^{-1}.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (2.3) в систему (2.2), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд A_{ψ} .

Для существования ненулевого решения этой системы определитель из коэффициентов при неизвестных A_{ψ} должен быть равен нулю. Уменьшая порядок определителя, после проведения алгебраических преобразований имеем дисперсионное соотношение для волнового числа

$$(2.4) \quad (C_1 K_* / \omega)^2 = V(\omega) D(\omega),$$

где $V(\omega)$, $D(\omega)$ — комплексные функции, описывающие эффекты дисперсии и диссипации звука во взвеси из-за процессов межфазного трения и межфазного тепломассообмена соответственно. Если частицы отсутствуют ($m = 0$), тогда $V(\omega) = D(\omega) = 1$, т. е. дисперсии и диссипации в газе без частиц нет. Функции $V(\omega)$, $D(\omega)$ зависят от частоты, теплофизических параметров фаз и спектрального состава смеси через выписанные ниже функции:

$$(2.5) \quad V(\omega) = 1 + mV^0(\omega), \quad V^0(\omega) = \langle \tilde{h}_v \rangle,$$

$$\tilde{h}_v = (i - i\omega\tilde{\tau}_v^*)^{-1}, \quad \tilde{\tau}_v^* = \tilde{\tau}_v \left[1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} (\omega\tilde{\tau}_{\mu 1})^{1/2} \right]^{-1},$$

$$D(\omega) = 1 + mr(\gamma_1 - 1) \frac{H_2 - bk_v\gamma_1(\bar{c}_1 H_3 - 2\bar{l}H_1) - M_1\Lambda}{1 + mr(H_2 - BH_3 - M_2\Lambda)},$$

$$H_j = \langle \tilde{h}_j \rangle \quad (j = 1-3), \quad \Lambda = LH_1^2 + H_2H_3,$$

$$\tilde{h}_1 = \tilde{Z}\tilde{e}_2, \quad \tilde{h}_2 = \tilde{Z}(\tilde{e}_1 - L\tilde{e}_2), \quad \tilde{h}_3 = \tilde{Z}[\tilde{e}_2(1 - i\omega\tilde{\tau}_{\Sigma 1}^*\tilde{e}_1)],$$

$$\tilde{Z} = [1 - i\omega\tilde{\tau}_{\Sigma 1}^*(\tilde{e}_1 - L\tilde{e}_2)]^{-1}, \quad \tilde{e}_1 = \frac{\bar{c}_2}{rc_1}(1 - i\omega\tilde{\tau}_{T 2}^*)^{-1}, \quad \tilde{e}_2 =$$

$$= [i\omega(\tilde{\tau}_p^* + \tilde{\tau}_\beta)]^{-1},$$

$$M_1 = mrb\bar{c}_1(\gamma_1 - 1 + bk_v), \quad M_2 = mrB, \quad L = \gamma_1(\gamma_1 - 1)k_v l^2,$$

$$\bar{l} = \frac{l}{c_{10}^2}, \quad b = \frac{R_v}{R_{10}}, \quad B = (1 - k_v b)b, \quad r = \frac{\rho_{10}^0}{\rho_{20}^0},$$

$$\bar{c}_1 = \frac{c_{p1}}{\gamma_1 R_1} = \frac{1}{\gamma_1 - 1}, \quad \bar{c}_2 = \frac{c_2}{\gamma_1 R_1}.$$

Отметим, что дисперсионная зависимость (2.4), (2.5) получена для случая малых объемных содержаний ($\alpha_2 \ll 1$) и умеренных давлений ($r \ll 1$). Однако при этом массовое содержание капель может быть достаточно большим ($m \sim 1$). Учет членов с α_2 и r приводит к появлению в дисперсионном соотношении множителей вида $(1 - \alpha_2)$ и $(1 - r)$.

В частных случаях однокомпонентных смесей пара с каплями ($k_v = 1$) и газа с частицами при отсутствии фазовых превращений ($k_v = 0$, $\tilde{\tau}_\beta = \infty$) дисперсионная зависимость (2.4), (2.5) согласуется с зависимостями [13]. Дисперсионное соотношение для монодисперсной парогазокапельной смеси [8] получается из (2.4), (2.5) при подстановке $N_0(a) = n_0\delta(a - a_0)$, где через δ обозначена δ -функция Дирака, тогда $\langle \tilde{h}_j \rangle = h_j(a_0, \omega)$ ($j = 1-3$).

3. Рассмотрим частный случай малых массовых содержаний капель ($m \ll 1$), когда влияние эффектов межфазного массообмена на распространение акустических волн наиболее существенно [8-11]. Пренебрегая в (2.4), (2.5) членами более высокого, чем m , порядка малости, получим более простое соотношение, описывающее дисперсионные и диссипативные свойства парогазокапельных сред типа аэрозольный туман:

$$(3.1) \quad C_1 K_*/\omega = 1 + \frac{m}{2} [V^0(\omega) + rD^0(\omega)],$$

$$D^0(\omega) = (\gamma_1 - 1) \frac{H_2 - bk_v\gamma_1(\bar{c}_1 H_3 - 2\bar{l}H_1)}{1 + mr(H_2 - BH_3)}.$$

Здесь функции V^0 , H_j ($j = 1-3$) имеют тот же вид, что и в (2.5).

Следует подчеркнуть, что в соответствии с (3.1) вклады трения фаз и межфазного тепломассообмена в дисперсию и диссипацию возмущений в аэрозолях аддитивны. Однако в отличие от газа с твердыми частицами [13] вклад межфазного тепломассообмена, определяемый функцией $D^0(\omega)$, не пропорционален массам фракций частиц различного размера. Следовательно, соотношение (3.1) не может быть получено простым ин-

тегрированием соответствующей зависимости для монодисперсной взвеси по массам фракций, как в случае газовзвеси без фазовых превращений. В связи с этим также отметим, что аналогичная дисперсионная зависимость для парокapельного аэрозоля [13], полученная при формальном переходе к случаю малых m из общей зависимости, не описывает ряд эффектов влияния межфазного массообмена, в частности: немонотонный характер затухания звука в аэрозолях [14], предельные переходы при $\omega \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \infty$ и т. д. Соответствующая зависимость для смеси пара с каплями может быть получена из соотношения (3.1) при $k_v = 1$.

Исследуем низкочастотную асимптотику комплексного волнового числа $K_* = K + iK_{**}$, следующую из дисперсионного соотношения (3.1) при $\omega \rightarrow 0$. Для упрощения анализа будем пренебрегать неравновесностью межфазной поверхности при массообмене и предположим, что $R_v \sim R_e$ и $\kappa_1 \sim D_1$.

Далее будем пользоваться безразмерными параметрами, характеризующими теплофизические и акустические свойства аэрозоля:

$$\text{Pr}_1 = \mu_1 c_{p1} / \lambda_1, \quad \bar{K}_* = K_* C_1 \tau_{v*}, \quad \Omega = \omega \tau_{v*}, \\ \bar{C}_p = C_p / C_1, \quad \bar{a} = a / a_* \quad (\tau_{v*} = (2/9) \rho_2^0 a_*^2 / \mu_1)$$

(a_* — представительный радиус).

Соответствующая низкочастотная асимптотика \bar{K}_* может быть записана в виде

$$(3.2) \quad \left(\frac{\bar{K}_*}{\Omega} \right)_{\Omega \rightarrow 0} \sim (\bar{C}_e)^{-1} + \frac{i}{2} \left\{ m \Lambda_1 \bar{a}_{5,3}^2 + \frac{k_v}{m} \Lambda_2 \bar{a}_{3,1}^2 \right\} \Omega, \\ \Lambda_1 = 1 + \frac{3}{2} \text{Pr}_1 (\gamma_1 - 1) \left[(1 - k_v) \frac{c_2}{c_1} \right]^2, \\ \Lambda_2 = \frac{3}{2} \text{Pr}_1 (\gamma_1 - 1) (\bar{l} - \bar{c}_1)^2 \gamma_1 / \Lambda_3, \quad \Lambda_3 = \gamma_1 \bar{l}^2 k_v + (1 - k_v) \bar{c}_1,$$

где $a_{i,j}$ — средние радиусы, определяемые формулой

$$(3.3) \quad a_{i,j} = \left\{ \left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N_0(a) a^i da \right] \left[\int_{a_{\min}}^{a_{\max}} N_0(a) a^j da \right] \right\}^{1/(i-j)}, \quad i \neq j, \\ a_{\min} \leq a_{i,j} \leq a_{\max};$$

C_e — безразмерная равновесная скорость звука в смеси газа с паром и каплями жидкости [8]. При малых массовых содержаниях капель ($m \ll 1$) для $(C_e)^{-1}$ запишем

$$(\bar{C}_e)^{-1} = 1 + \frac{1}{2} \left\{ m \left[1 + (1 - k_v) (\gamma_1 - 1) \frac{c_2}{c_1} \right] + \gamma_1 k_v (\gamma_1 - 1) (\bar{l} - \bar{c}_1)^2 / \Lambda_3 \right\}.$$

Отметим, что в асимптотике (3.2) соотношение с коэффициентом Λ_2 связано с эффектами межфазного массообмена. При этом вследствие малости m ($\ll 1$) при концентрациях пара $k_v > m$ слагаемое с Λ_2 является доминирующим из-за множителя $1/m$. Таким образом, затухание низкочастотных возмущений в полидисперсных парогазокапельных системах в широком диапазоне изменения концентрации пара ($m < k_v \leq 1$) в основном определяется эффектами фазового превращения. Однако следует подчеркнуть, что при малых частотах возмущений с уменьшением массового содержания капель m линейные решения могут стать неадекватными [14]. Для обычных аэрозолей при наличии фазовых превращений линейный анализ эффективен при $m \gtrsim 10^{-3}$ [14].

В соответствии с (3.2) учет влияния спектрального состава на распространение низкочастотных возмущений в полидисперсных парогазокапельных смесях с любым видом функции распределения $N_0(a)$ сводится только к учету интегральных характеристик $a_{3,1}$ и $a_{5,3}$. При этом средний радиус $a_{5,3}$ связан с эффектами межфазного трения и при $k_v \neq 1$ — с эффектами межфазного теплообмена, а радиус $a_{3,1}$ — в основном

с эффектами фазовых превращений. Это обстоятельство следует учитывать при анализе характерных времен [10] процессов межфазного взаимодействия полидисперсных взвесей с массообменом. Поскольку в общем случае $a_{3,1} \neq a_{5,3}$, распространение низкочастотного звука в системах типа полидисперсный туман, в отличие от взвесей без массообмена, не может быть описано в рамках монодисперсных моделей.

4. Некоторые результаты по диссипации и дисперсии монохроматических волн в смесях воздуха с паром и каплями воды при давлении газовой фазы $p_1 = 0,1$ МПа и концентрации пара $k_v = 0,1$ ($T_0 = 327$ К), полученные с помощью дисперсионного соотношения (2.4), (2.5), проиллюстрированы на рис. 1—4.

Дисперсионные кривые показаны в виде зависимостей коэффициентов затухания σ , K_{**} и фазовой скорости C_p от безразмерной частоты $\Omega_{3,1}$ ($\Omega_{3,1} = \omega \tau_{**}$, $a_* = a_{3,1}$). В качестве параметра обезразмеривания используется радиус $a_{3,1}$, который в соответствии с асимптотикой K_* (3.2) есть характерный средний радиус полидисперсной парогазокапельной смеси при низкочастотных акустических воздействиях. Этот радиус, как и обычно близкий к нему по значению $a_{3,2}$, также является характерным при распространении высокочастотных возмущений в полидисперсных взвесах без массообмена [13]. При этом, согласно неравенству Гельдера, значение $a_{3,1}$ минимально среди других характерных средних размеров полидисперсной взвеси ($a_{3,1} \leq a_{3,2} \leq a_{5,3}$). Поэтому использование в качестве параметра обезразмеривания a_* другого радиуса, например $a_{5,3}$, приведет к сдвигу дисперсионных кривых вдоль оси абсцисс $\eta = \lg \Omega$ в сторону роста η , поскольку $\lg \Omega_{5,3} = \lg \Omega_{3,1} + 2 \lg (a_{5,3}/a_{3,1})$ ($a_{5,3}/a_{3,1} \geq 1$).

Далее для иллюстрации распространения звука в воздушном тумане выбрано равномерное распределение капель по массам, когда $N(a) = \text{const} a^{-3}$, $a_{\min} = 3$ мкм, $a_{\max} = 30$ мкм, $a_{3,1} = 10$ мкм. Значение константы в функции $N(a)$ может быть определено по значениям объемного содержания капель в смеси α_2 или массовой концентрации m . Однако, согласно (2.5), (3.3), значение константы не влияет на вид дисперсионных кривых и величину средних радиусов $a_{i,j}$.

На рис. 1—3 показаны зависимости декремента затухания на длине волны σ , линейного коэффициента затухания K_{**} и фазовой скорости C_p от частоты $\Omega_{3,1}$ при разных массовых содержаниях капель m . Сплошные и пунктирные кривые отвечают случаям неравновесного ($\beta = 0,04$) и замороженного ($\beta = 0$) массообмена между каплями и газом в полидисперсном тумане. Штриховые линии используются для иллюстрации дисперсионных кривых, соответствующих монодисперсной парогазокапельной смеси с радиусом капель $a_0 = a_{3,1} = 10$ мкм при наличии неравновесного фазового превращения. Цифрами у кривых показаны значения массового содержания взвешенной фазы m .

Анализ показывает, что при очень малых m ($\leq 0,01$) вид зависимости $\sigma(\Omega_{3,1})$ для полидисперсного тумана в основном определяется эффектами массообмена и практически совпадает с соответствующей зависимостью для монодисперсной смеси [8]. С увеличением m вклад межфазного трения в диссипацию возмущений возрастает, и при $m = 0,1$ сплошные и штриховые кривые различаются (рис. 1). Это различие наиболее существенно при средних частотах ($\Omega_{3,1} \sim 1$), когда влияние полидисперсного состава взвеси на распространение звука максимально и не может быть описано в рамках монодисперсных моделей с использованием эффективных размеров (рис. 1—3). Поэтому в данной области частот ни один из средних радиусов (3.3) или [16] не может быть использован в качестве характерного размера. Отметим, что при достаточно высоких массовых содержаниях капель ($m \sim 1$) декремент затухания σ для монодисперсного аэрозоля может как значительно превышать, так и быть значительно меньше σ для полидисперсной взвеси при разных частотах $\Omega_{3,1}$. Влияние эффектов межфазного массообмена на распространение волн в полидисперсных туманах, как и для монодисперсных

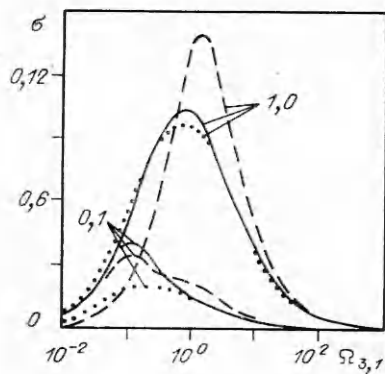


Рис. 1

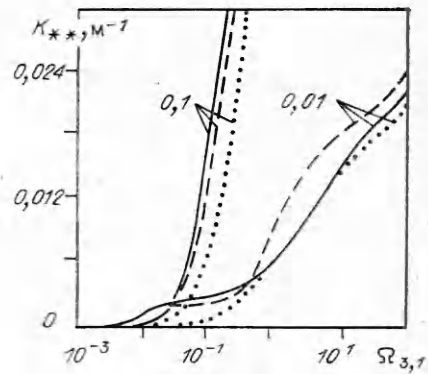


Рис. 2

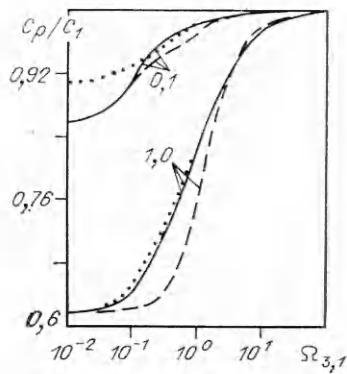


Рис. 3

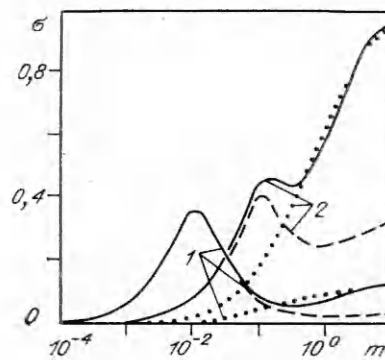


Рис. 4

взвесей [8], наиболее ярко выражено в аэрозолях с малым m (сплошные и пунктирные кривые, рис. 1—3). С увеличением m роль многоскоростных эффектов возрастает и различие между указанными кривыми уменьшается.

Существенное влияние фазовых превращений на распространение низкочастотных возмущений в полидисперсных аэрозолях с малым m приводит, как и в акустике монодисперсных взвесей [14], к аномальному эффекту немонотонной зависимости диссипации звука от массового содержания капель m . Этот эффект неожидан, так как в соответствии с общепринятой точкой зрения интенсивность затухания возмущений в таких системах пропорциональна массовому содержанию дисперсной фазы, которая является источником и основной причиной диссипации.

На рис. 4 проиллюстрирована зависимость σ от m при фиксированных безразмерных частотах: линии 1 — $\Omega_{3,1} = 0,01$ ($\omega = 100 \text{ с}^{-1}$), 2 — $\Omega_{3,1} = 0,1$ ($\omega = 10 \text{ с}^{-1}$). Видно, что зависимость $\sigma(m)$ немонотонная и имеет локальный максимум при $m \sim \Omega_{3,1}$. Однако для монодисперсного тумана максимум σ при частоте $\Omega_{3,1} = 0,1$ является более ярко выраженным (штриховая кривая). Отметим, что при $m \ll 1$ интенсивность затухания во взвеси с фазовыми превращениями существенно превышает затухание в газе с частицами, где эти превращения отсутствуют (пунктирные кривые). С увеличением m влияние эффектов межфазного массообмена на затухание возмущений рассмотренных частот падает (сплошные и пунктирные кривые при $m \gg 1$ практически совпадают). При этом затухание возмущений в полидисперсных газовзвесах с высоким массовым содержанием капель ($m \sim 10$) может значительно (в 3 раза) превышать диссипацию волн в монодисперсных системах (сплошная и штриховая кривые 2).

Авторы выражают благодарность С. А. Якубову за проведение числовых расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Temkin S., Dobbins R. A. Measurement of attenuation and dispersion of sound by an aerosol // J. Acoust. Soc. Amer.— 1966.— V. 40, N 5.
2. Cole J. E., Dobbins R. A. Measurements of attenuation and dispersion of sound by a warm air fog // J. Atmospheric Sci.— 1971.— V. 28, N 2.
3. Marble F. E., Candel S. M. Acoustic attenuation in fans and ducts by vaporization of liquid droplets // AIAA J.— 1975.— V. 13, N 5.
4. Davidson G. A. Sound propagation in fogs // J. Atmospheric Sci.— 1975.— V. 32, N 11.
5. Gumerov N. A., Ivandaev A. I., Nigmatullin R. I. Sound waves in monodisperse gas-particle or vapour-droplet mixture // J. Fluid Mech.— 1988.— V. 193.— P. 53.
6. Губайдуллин Д. А. Акустические возмущения в парогазокапельных смесях с малым массовым содержанием капель // Современные проблемы теплофизики.— Новосибирск: ИТ СО АН СССР, 1987.
7. Губайдуллин Д. А. О влиянии тепломассообмена на распространение звуковых волн в парогазокапельных системах // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика.— 1987.— № 3.
8. Губайдуллин Д. А., Ивандаев А. И. Скорость и затухание звука в парогазокапельных системах. Роль тепломассообменных процессов // ПМТФ.— 1987.— № 3.
9. Губайдуллин Д. А., Ивандаев А. И. Влияние фазовых превращений на распространение звука в туманах. Сопоставление теории с экспериментом // ПМТФ.— 1990.— № 6.
10. Губайдуллин Д. А., Ивандаев А. И. Характерные времена процессов взаимодействия фаз и их влияние на дисперсию и абсорбцию акустических волн в парогазокапельных системах // ТВТ.— 1991.— Т. 29, № 1.
11. Губайдуллин Д. А., Ивандаев А. И. Динамика импульсных волн малой амплитуды в парогазокапельных системах // ПМТФ.— 1991.— № 2.
12. Шаганов В. Ш. О распространении малых возмущений в парогазокапельной среде // ТВТ.— 1987.— Т. 25, № 6.
13. Гумеров И. А., Ивандаев А. И. Распространение звука в полидисперсных газозвзвесах // ПМТФ.— 1988.— № 5.
14. Нигматуллин Р. И., Ивандаев А. И., Губайдуллин Д. А. Эффект немопотошной зависимости диссипации звука от концентрации капель в акустике газозвзвесей // ДАН СССР.— 1991.— Т. 316, № 3.
15. Нигматуллин Р. И. Динамика многофазных сред.— М.: Наука, 1987.— Ч. 1.
16. Фуке Н. А. Механика аэрозолей.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.

г. Казань, г. Тюмень

Поступила 26/II 1992 г.

УДК 532.529.6

П. К. Волков

ВЛИЯНИЕ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ ПУЗЫРЯ НА ВСПЛЫТИЕ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТРУБКАХ

1. Введение. При моделировании всплывающих в жидкости пузырей, как правило, для упрощения задачи предполагается, что внутри пузыря среда покоится и для описания состояния такой среды вполне достаточно одной константы — термодинамического давления газа в пузыре p_g . В случае всплытия газовых или воздушных пузырей в тяжелой жидкости это вполне оправданно, поскольку отношение плотностей и вязкостей газа и жидкости $\ll 1$, а значит, среда в пузыре легкая и трение газа о жидкость на границе пузыря мало и не оказывает существенного влияния на всплытие. Данное предположение подтверждается многочисленными экспериментами. Однако для паровых пузырей, например во фреонах, отношение плотностей уже порядка 0,1 и расчет задачи по модели пузыря может быть недостаточно хорошим.

2. Постановка задачи и алгоритм решения. В настоящей работе в предположении, что среда в пузыре — вязкая несжимаемая жидкость (капля другой жидкости), исследуется всплытие при $\rho_1/\rho_2 = 0,1$ в трубках в стесненных условиях для $\lambda = 0,8$. Здесь ρ_1, ρ_2 — плотность среды внутри и вне капли; $\lambda = a/R_k$; a — радиус эквивалентной по объему сфе-