

УДК 532.62:536.421.4

Эволюция пленки воды и барьерного льда на поверхности тела при плоском обтекании воздушным потоком^{*}

А.В. Кашеваров¹, А.Л. Стасенко^{1,2}

¹*Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский, Московская обл.*

²*Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Московская обл.*

E-mail: a.v.kash@yandex.ru

Развита физико-математическая модель охлаждающейся и отвердевающей жидкой пленки, увлекаемой воздухом вдоль подогреваемой поверхности обтекаемого тела с заданным распределением плотности теплового потока на поверхности. Приведен пример численного тестирования модели при наборе определяющих параметров, характерных для экспериментов на аэрохолодильном стенде.

Ключевые слова: обледенение, барьерный лед, жидкая пленка.

Введение

Обледенение летательного аппарата часто сопровождается образованием водяной пленки. Например, в случае обычного обледенения за счет переохлажденных водяных капель (при относительно небольшой степени переохлаждения — до $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$) часть воды, прибывающей на поверхность обтекаемого тела в виде капель, не замерзает в месте удара. Возникает пленка, которая движется вдоль поверхности под действием аэродинамических сил и отвердевает на некотором расстоянии вниз по потоку, формируя так называемый барьерный лед. Течение водяной пленки и образование барьерного льда при таком виде обледенения изучалось в ряде работ, например, [1–3]. В частности, в работе [1] отвердевание тонкой пленки рассматривалось в трехмерном случае на теле произвольной формы.

Относительно недавно была осознана опасность другого вида обледенения: при полете летательного аппарата в высотных облаках, содержащих кристаллы льда. Сталкиваясь с теплыми элементами конструкции двигателя, они плавятся и создают движущуюся пленку, которая может замерзнуть вниз по потоку с образованием барьерного льда при попадании в нее других кристаллов, охлаждающих пленку. В настоящее время

^{*} Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 16-19-10472).

этот вид обледенения активно изучается научным мировым сообществом. Результаты российских исследований изложены, в частности, в публикациях [4, 5]. Эксперименты по изучению взаимодействия частиц льда с водяной пленкой в этих работах проводились в аэрохолодильной трубе на модели крыла с простейшим профилем в виде двух полуокружностей, соединенных отрезками прямых. На ранних этапах исследований пленка создавалась путем введения воды через горизонтальную щель, расположенную вдоль передней критической линии модели.

В работе [6] было сформулировано математическое описание гидротермодинамики такой пленки с внедрившимися в нее кристаллами и проведены соответствующие расчеты на примере ее движения по поверхности теплоизолированного кругового цилиндра. Физико-математическая модель затем была модифицирована для случая создания пленки другим способом, который использовался в последующих экспериментах, а именно, за счет распыливания воды форсункой, установленной вблизи обтекаемого тела. При этом пленка оказывается тонкой — с толщиной меньшей, чем характерный размер ледяной частицы. Результаты расчетов эволюции толщины, скорости и температуры пленки на лобовой части цилиндра в отсутствие кристаллов в набегающем воздушном потоке приводились в работах [4, 5]. Температура пленки в этих расчетах не достигала температуры замерзания, и лед не образовывался.

В настоящей работе продолжено совершенствование физико-математической модели охлаждающейся и отвердевающей пленки, что позволило рассчитать как ее параметры, так и эволюцию нарастающего слоя льда на поверхности уже не цилиндра, а экспериментальной модели.

Физико-математическая модель

Математическое описание динамики и термодинамики охлаждающейся и отвердевающей пленки в основном сформулировано в работе [6]. Модель использует стационарные уравнения пограничного слоя, осредненные по толщине пленки. Схема исследуемого явления с иллюстрацией основных обозначений представлена на рис. 1.

Система уравнений включает уравнения неразрывности, импульса и энергии пленки:

$$\rho_l dh_l \langle u_l \rangle / ds = -\rho_l \partial h_l(s, t) / \partial t - \dot{m}_v + \dot{m}_{\text{imp}}, \quad (1)$$

$$0 = -h_l dp/ds + \tau_a - \tau_s + \dot{m}_{\text{imp}} u_p + \rho_l h_l g_s, \quad (2)$$

$$\rho_l c_l dh_l \langle u_l T_l \rangle / ds = q_l^+ - q_a - \dot{m}_v L_v + \dot{m}_{\text{imp}} (V_p^2 / 2 + c_l T_p) - c_l T_f \rho_l \partial h_l(s, t) / \partial t, \quad (3)$$

здесь ρ_l и ρ_i — плотности жидкости (воды) и льда, h_l и h_i — толщины пленки и наледи, $\langle u_l \rangle$ — средняя скорость пленки, s — криволинейная координата вдоль поверхности тела, отсчитываемая от передней линии растекания воздуха, t — время, $\dot{m}_v$ и $\dot{m}_{\text{imp}}$ — плотности потоков испаряющейся массы пленки и прибывающих в пленку капель, p — давление в пленке, τ_a и τ_s — сдвиговые напряжения на верхней (при контакте с воздушным потоком) и нижней (при контакте с поверхностью) границах пленки, u_p — касательная

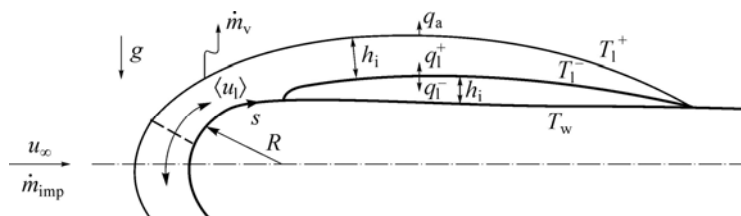


Рис. 1. Схема жидкой пленки и намерзающего льда на теле в потоке воздуха.

к поверхности составляющая скорости налетающих на тело частиц водяного распыла, g_s — тангенциальная компонента ускорения свободного падения вдоль обвода профиля, c_1 — теплоемкость воды, $\langle u_1 T_1 \rangle$ — осредненное по толщине пленки произведение ее скорости на температуру, q_1^+ и q_a — плотности тепловых потоков с поверхности тела (или наледи) в пленку и в воздух с верхней границы пленки, L_v — теплота фазового перехода вода–пар, V_p и T_p — модуль скорости частиц распыла при ударе о поверхность и их температура, T_f — температура замерзания воды.

По сравнению с исходной моделью [6] уравнение неразрывности (1) осталось без изменений. В уравнении импульса (2), в котором пренебрегается адвективными членами ввиду медленного течения пленки (ноль в левой части), в отличие от [6], учтена сила тяготения (последнее слагаемое в правой части), поскольку, как справедливо было отмечено в [2], из-за наличия гравитации точка начала растекания пленки в противоположных направлениях вдоль поверхности тела не совпадает с критической точкой. Этот факт отмечен штриховой линией на рис. 1. В уравнении энергии (3) добавлен еще один член (последний), учитывающий, что при отвердевании часть тепловой энергии изымается из пленки.

Обледенение начинается, когда температура T_1^- нижней границы пленки достигает температуры замерзания T_f . Темп обледенения $\partial h_1 / \partial t$, входящий в уравнения (1) и (3), может быть найден из условия баланса тепла: выделяющееся при фазовом переходе тепло должно отводиться как в пленку, так и в наледь, следовательно

$$\frac{\partial h_1(s, t)}{\partial t} = \begin{cases} 0, & T_1^- > T_f, \\ (|q_1^+| + |q_1^-|) / \rho_1 L_i, & T_1^- = T_f, \end{cases} \quad (4)$$

где q_1^- — плотность теплового потока с нижней границы пленки в наледь, L_i — теплота фазового перехода вода–лед.

Методика расчета гидротермодинамики пленки и определение параметров, необходимых для расчета

Как и в работе [6], при решении системы (1)–(3) принят параболический закон распределения скорости в тонкой пленке по координате y , направленной перпендикулярно поверхности тела:

$$u_1(y) = y(1 - 0,5y/h_1)\tau_s / \mu_1 + 0,5y^2\tau_a / (h_1\mu_1). \quad (5)$$

Осреднение данного выражения по толщине пленки позволяет связать среднюю скорость течения пленки с ее толщиной. Эта алгебраическая связь содержит две функции, зависящие от s : напряжение трения τ_a на границе пленки с воздухом и производную dp/ds , поскольку напряжение τ_s на поверхности тела может быть исключено с помощью уравнения (2).

При решении задачи для пленки на круговом цилиндре в ламинарном потоке в работе [6] (в пренебрежении малой толщиной пленки и медленной скоростью ее движения) для $\tau_a(s)$ использовалось известное выражение в виде ряда Блазиуса, соответствующее зависимости давления $p(s)$ при потенциальном обтекании сухого цилиндра. В настоящей работе рассмотрено движение пленки вдоль поверхности экспериментальной модели, чертеж которой был представлен в [4]. Хорда профиля модели составляет 205 мм, радиус передней полуокружности $R = 15$ мм, задней — 10 мм, ширина крыла составляет 15 см, профиль модели показан в нижней части рис. 2. Распределения $\tau_a(s)$ и $p(s)$ для профиля заранее не известны и требуют определения.

Оценки показывают, что обтекание профиля воздушным потоком (при скорости набегающего потока $u_\infty = 80$ м/с) является ламинарным, что позволяет найти зависимость $\tau_a(s)$ в рамках классической теории пограничного слоя [7] для распределения $p(s)$, соответствующего потенциальному обтеканию профиля. Последнее, как известно, можно рассчитать, конформно отобразив внешность профиля на внешность круга. Для этого использовался приближенный метод тригонометрической интерполяции [8]. В этом методе фактически строится связанная с телом система криволинейных координат ξ, η конформного образа декартовой сетки. Потенциал φ бесциркуляционного обтекания профиля в таких координатах может быть представлен в виде

$$\varphi = C \operatorname{ch} \xi \cos(\eta - \gamma),$$

где в случае обтекания под нулевым углом атаки

$$C = 2u_\infty \sqrt{A_{-1}^2 + B_{-1}^2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = -B_{-1}/A_{-1},$$

здесь A_{-1}, B_{-1} — главные коэффициенты тригонометрического ряда [8]. Для симметричного профиля, как в рассматриваемом случае, $B_{-1} = 0$.

Продольная вдоль контура профиля компонента U скорости потенциального обтекания, т.е. скорость на внешней границе пограничного слоя, имеет вид

$$U(s) = \frac{1}{H(\eta)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \bigg|_{\xi=0}, \quad s = \int_0^\eta H d\eta,$$

где H — коэффициент Ламе.

Производная давления, необходимая как для расчета движения пленки, так и для решения уравнения пограничного слоя с целью нахождения τ_a , записывается следующим образом:

$$dp/ds = -\rho U dU/ds,$$

где ρ — плотность воздуха.

Результаты вычислений скорости U (отнесенной к u_∞) и параметра UdU/ds приведены на рис. 2. Как видно, в отличие от обтекания цилиндра скорость невязкого течения достигает своего максимума не у вершины полуцилиндрической части профиля, а несколько ранее. На плоской поверхности U приближается к своему значению в невозмущенном потоке. На рис. 3 показано изменение

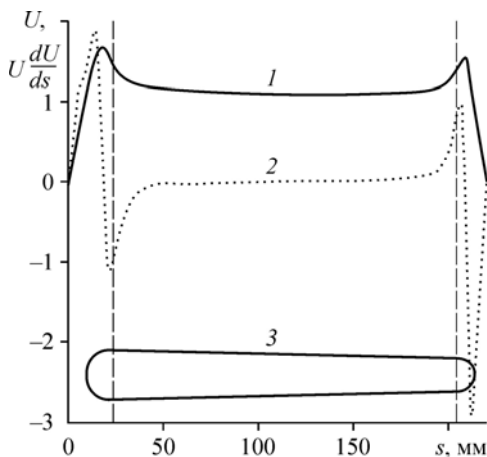


Рис. 2. Распределения (в безразмерном виде) скорости U внешнего невязкого течения (1) и параметра $UdU/ds = -\rho^{-1} dp/ds$ (2) по обводу профиля (3). Штриховые линии — границы плоских частей профиля.

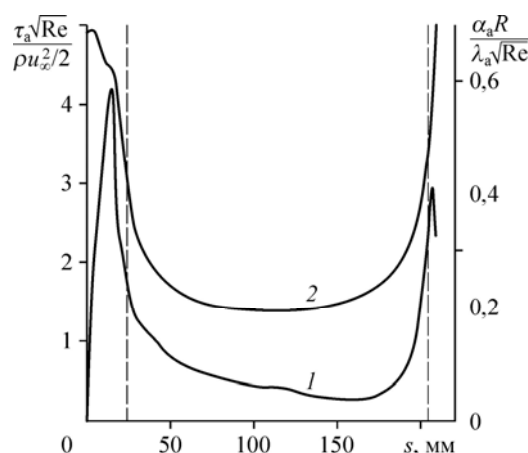


Рис. 3. Распределения по обводу профиля напряжения трения на верхней границе пленки τ_a (1) и коэффициента теплоотдачи α_a в воздух (2).

напряжения трения τ_a (в безразмерном виде) вдоль контура профиля, полученное численным интегрированием уравнения динамического пограничного слоя при найденных U и UdU/ds . Максимальные значения τ_a достигаются при тех же координатах s , что и параметр UdU/ds .

Для профиля температуры жидкости в пленке принято выражение, аналогичное (5):

$$T_1(y) = T_1^- + y(1 - 0,5y/h_1)q_1^+ / \lambda_1 + 0,5y^2 q_a / (h_1 \lambda_1), \quad (6)$$

где λ_1 — коэффициент теплопроводности воды. Отметим, что квадратичные зависимости (5), (6) содержат минимальное число коэффициентов, позволяющее удовлетворить граничным условиям на верхней и нижней поверхностях пленки. Перемножая равенства (5) и (6) и осредняя произведение по толщине пленки, получим выражение для $\langle u_1 T_1 \rangle$, содержащее, в частности, плотности тепловых потоков q_a и q_1^+ .

Плотность теплового потока из пленки в воздух может быть задана в виде

$$q_a = \alpha_a (T_\infty - T_1^+), \quad (7)$$

где α_a — коэффициент теплоотдачи пленки в воздух, T_∞ и T_1^+ — температуры набегающего воздушного потока и верхней границы пленки.

Распределение коэффициента теплоотдачи $\alpha_a(s)$ по обводу экспериментальной модели получено численным интегрированием уравнения температурного пограничного слоя на ней в отсутствие пленки и в предположении постоянной температуры стенки. Рассчитанное распределение $\alpha_a(s)$ в безразмерном виде приведено на рис. 3.

Что касается плотности теплового потока q_1^+ в пленку, то представление наподобие (7), т.е. в виде $q_1^+ = \alpha_1 (T_1^- - T_1^+)$, мало пригодно, поскольку содержит коэффициент теплоотдачи α_1 от поверхности тела в пленку, нахождение которого для тонкой пленки затруднительно. В связи с этим в [6] считалось, что поверхность цилиндра теплоизолирована и $\alpha_1 = 0$.

На самом деле экспериментальная модель снабжена электрическими нагревателями: основным, располагающимся внутри модели во фронтальной части, и дополнительным, установленным под плоской частью. Расположение нагревательных элементов было показано в работе [4]. Зная мощность нагревателей, можно задать закон распределения плотности теплового потока $q_1^+(s)$ по обводу профиля. Тогда численное решение уравнения энергии (3) дает на каждом шаге интегрирования значение $\langle u_1 T_1 \rangle$, позволяющее с учетом (7) найти зависимость температуры нижней границы пленки $T_1^-(s)$.

При некотором значении $s = s_{f0}$ температура T_1^- достигает температуры замерзания T_f и начинается отвердевание пленки, которое продолжается до некоторой координаты s_{f1} . Температура T_1^- на участке (s_{f0}, s_{f1}) не изменяется, т.е. сохраняется соотношение $T_1^- = T_f$, а плотность теплового потока $q_1^+(s)$ связана уже не с работой нагревателя, а с выделением фазового тепла. Поэтому при численном интегрировании уравнения (3) подбирается значение q_1^+ , такое, чтобы $T_1^- = T_f$. Найденная величина q_1^+ входит в выражение (4), используемое для определения темпа обледенения. Это же выражение содержит плотность теплового потока q_1^- , связанную с отводом фазового тепла в образующуюся наледь. Нахождение q_1^- требует дополнительного обсуждения.

Вообще говоря, обледенение модели представляет собой нестационарный процесс. Его можно свести к квазистационарному, если принять, что вода поступает в пленку порциями. Первая порция движется вдоль поверхности модели в отсутствии наледи. Численно решая уравнения (1)–(3), можно найти координаты s_{f0} и s_{f1} и определить из (4)

температуры обледенения, полагая $q_1^- = 0$. При движении пленки от s_{f0} до s_{f1} проходит некоторое время, поэтому толщина образовавшейся наледи

$$h_i(s) = \frac{\partial h_i(s, t)}{\partial t} \int_{s_{f0}}^s \frac{ds}{\langle u_1 \rangle}. \quad (8)$$

Следующая порция воды на участке (s_{f0}, s_{f1}) движется уже по слою образовавшейся наледи, температура верхней части которой равна T_f . Для температуры нижней части наледи T_w (стенки модели) предполагается ее уменьшение по линейному закону от T_f при $s = s_{f0}$ до T_∞ при $s = s_{f1}$. Тогда

$$q_1^-(s) = \lambda_i [T_f - T_w(s)] / h_i(s),$$

и темп обледенения для второй порции воды определяется согласно (4), а увеличение толщины наледи — с помощью (8) и т.д. Понятно, что с ростом толщины наледи отвод фазового тепла в нее падает. Эта процедура напоминает разделение по физическим процессам, используемое, например, в методе крупных частиц [9]. Из-за слабого изменения формы профиля нарастающей наледью, по крайней мере при небольших временах экспозиции, можно пренебречь изменением параметров τ_a , dp/ds и α_a .

Задача Коши для системы (1)–(3) после ее обезразмеривания решалась численно методом конечных разностей. Использовалась неявная разностная схема первого порядка точности. В результате разностной аппроксимации уравнение (1), служащее для вычисления толщины пленки, и уравнение (3), позволяющее найти температуру ее нижней границы, сводились к нелинейным алгебраическим уравнениям, решение которых проводилось методом простой итерации. В качестве начального приближения для искомых величин брались их значения, найденные на предыдущем шаге интегрирования. Итерационный процесс на каждом шаге считался сошедшимся, когда разность значений, полученных в двух последовательных итерациях, не превышала по модулю 10^{-8} . Устойчивость обеспечивалась применением метода последовательной нижней релаксации для уравнения (1).

Результаты и обсуждение

Расчеты параметров пленки и наледи проводились для одного из экспериментов на аэрохолодильном стенде. Вид барьерного льда для этого эксперимента и набор определяющих параметров приводились в работах [4, 5]. В частности, $u_\infty = 80$ м/с, $T_\infty = -10,9$ °С.

При определении плотности потока массы $\dot{m}_{\text{imp}}$ прибывающих в пленку капель, из которых, собственно, и образуется пленка, в расчете предполагалось, что их скорость V_p совпадает со скоростью набегающего потока u_∞ (см. рис. 1). Следовательно, капли орошают всю фронтальную часть экспериментальной модели, которая была установлена под нулевым углом атаки, и

$$\dot{m}_{\text{imp}} = \rho_p V_p \cos(s/R), \quad s/R \leq \pi/2,$$

где ρ_p — массовая концентрация капель вблизи модели.

Значение ρ_p в эксперименте не измерялось. При проведении расчетов оказалось, что при заданной величине V_p существует максимальное значение ρ_p , при котором благоприятный перепад давления и напряжение трения τ_a способны продвинуть пленку на плоскую часть модели. При этом рассчитанный расход воды G в пленке, показанный на рис. 4, максимален на передней границе плоской части профиля и составляет 0,71 г/с.

Рис. 4. Изменение массового расхода воды в пленке по обводу профиля со временем.
 $t = 15$ (1), 30 (2), 45 (3), 60 (4) с.

Оценки, выполненные по данным расхода воды через распыливающую форсунку, дают $G = 1$ г/с. Расхождение между рассчитанным и экспериментальным значениями G , вероятно, можно объяснить частичным сдувом воздушным потоком воды из пленки, что не учитывалось в теоретической модели.

Как видно из рис. 4, после достижения максимального значения расход G медленно уменьшается, что связано с испарением воды с поверхности пленки. Для нахождения плотности потока испаряющейся массы воды $\dot{m}_v$, как и в работе [6], использована тройная аналогия Рейнольдса [10]:

$$\dot{m}_v = \alpha_a [\rho_{vs}(T_1^+) - \rho_{v\infty}] D_v / \lambda_a,$$

где ρ_{vs} — плотность насыщенного пара при температуре верхней границы пленки T_1^+ , $\rho_{v\infty}$ — плотность водяных паров в атмосфере, D_v — коэффициент диффузии пара, λ_a — теплопроводность воздуха. В расчете принято $\rho_{v\infty} = 0$, $D_v = 2,16 \cdot 10^{-5}$ м²/с. Дальнейшее резкое уменьшение G обусловлено замерзанием пленки.

Заметим, что как расход воды в пленке, так и рассчитанные изменения ее толщины (рис. 5) и скорости (рис. 6) по обводу профиля зависят от произведения $\rho_p V_p$. Уменьшение V_p при соответствующем увеличении ρ_p практически не влияет на результаты расчета параметров пленки и наледи. Как видно из рис. 5, толщина пленки растет на полуцилиндрической части модели за счет прибывающей массы капель, образующих пленку. Кривые резко обрываются вниз вследствие отвердевания пленки. Скорость верхней части пленки приблизительно в два раза превышает среднюю скорость (рис. 6), что свидетельствует о почти линейном распределении скорости по толщине пленки. Видны

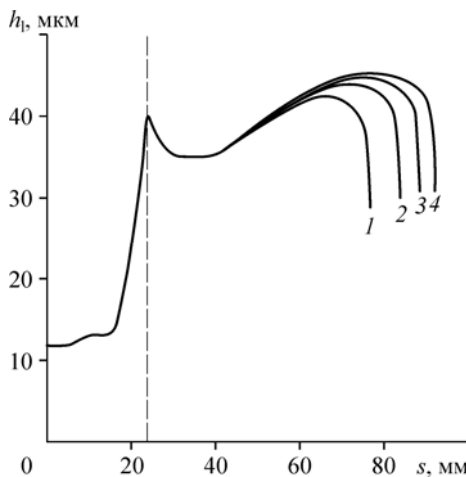
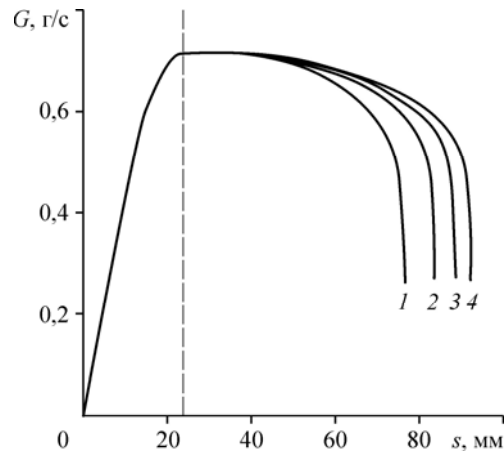


Рис. 5. Изменение толщины пленки по обводу профиля со временем.
 Обозначения см. на рис. 4.

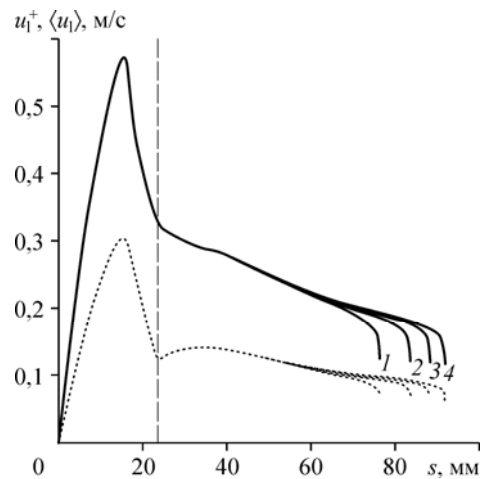


Рис. 6. Изменение скорости пленки по обводу профиля со временем.
 Сплошные линии — скорость верхней границы пленки u_1^+ , пунктирная линия — средняя по толщине скорость; обозначения см. на рис. 4.

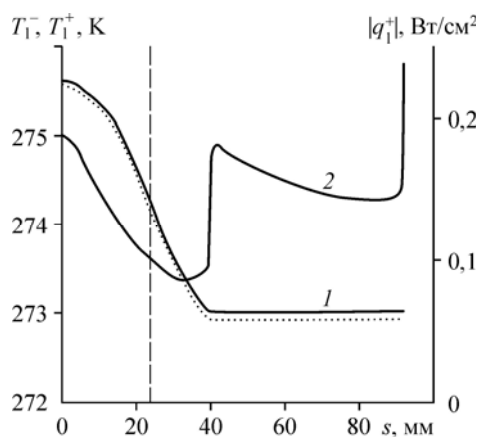


Рис. 7. Распределения по обводу профиля в момент времени $t = 60$ с.

1 — температуры нижней (сплошная линия) и верхней (пунктирная линия) границ пленки,
2 — плотности теплового потока в пленку с границы профиля ($s < 40$ мм) и наледи.

характерные максимумы на лобовой части профиля и монотонное уменьшение скоростей к кормовой части из-за роста пограничного слоя воздуха. Влияние гравитации на параметры пленки в настоящем расчете оказалось пренебрежимо малым: линия растекания пленки лежит всего лишь на расстоянии $s \approx 0,1$ мм ниже по потоку от линии

растекания воздуха.

На рис. 7 представлены термодинамические характеристики исследуемого процесса: продольные распределения температуры и модуль плотности потока тепла в пленку в фиксированный момент времени (в конце рассмотренного процесса образования барьерного льда). Температура T_p прибывающих капель была принята равной 5°C .

При моделировании теплового потока от нагревателей последние представлялись в виде двух нагретых нитей, отношение мощностей вспомогательного и основного нагревателей составляло две трети. Мощность нагревателей при расчете подбиралась так, чтобы обледенение начиналось приблизительно при той же координате s , что и в эксперименте ($s \approx 40$ мм).

Как видно из рис. 7, плотность теплового потока сначала уменьшается, а при $s \approx 30$ мм начинает постепенно увеличиваться, что объясняется влиянием вспомогательного нагревателя. Далее она резко возрастает при $s \approx 40$ мм, что связано с выделением тепла фазового перехода, который происходит при постоянной температуре $T_1^- = 273$ К. Пленка при этом оказывается в переохлажденном состоянии: температура ее верхней границы на десятую долю градуса ниже нуля. Заметим, что, например, в расчетах [3] переохлаждение пленки достигало 6° .

Наконец, на рис. 8 в его верхней части отображена эволюция барьерного льда на профиле со временем (для наглядности масштабы по осям различны), а в нижней части рисунка (масштабы одинаковы) показано изменение формы профиля за счет образующейся наледи при $t = 60$ с. Именно такой была длительность эксперимента. Зона обледенения простирается не до координаты $s \approx 92$ мм, как может показаться из рассмотрения рис. 8, а значительно дальше. Расчет дает координату полного застывания фронта пленки, движущейся изначально по необледенелому телу, при $s_{f1} \approx 209$ мм. Сначала образуется весьма тонкий слой наледи, распространяющийся на значительное расстояние вниз по потоку. Дальнейший процесс обледенения происходит на возникшем микроскопическом субстрате. Таким образом, наледь в указанный момент времени

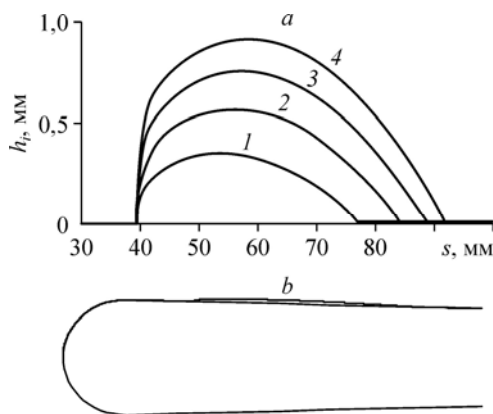


Рис. 8. Изменение толщины наледи по обводу профиля со временем (для фрагмента a обозначения см. на рис. 4) и вид профиля с наледью при $t = 60$ с (b).

имеется даже на закругленной задней части модели. Однако толщина наледи при $s > 92$ мм не превышает 8 мкм.

Результаты расчета согласуются с реальной картиной обледенения, полученной в эксперименте (см. [4, 5]). Видны ядро отложения льда в начале плоской части модели и длинный тонкий след наледи. Ее толщина в эксперименте не измерялась, а проводилось взвешивание намерзшего льда. Масса льда, образовавшегося в рассматриваемом пуске, составляла 5,5 г. Намерзание льда в эксперименте происходило неравномерно в поперечном направлении, это было связано с неравномерностью распыла капель и работы подогревательных элементов. Расчет предсказывает, что масса образовавшегося льда для условий данного эксперимента в предположении движения пленки по всему размаху модели равна 4,8 г, что близко к данным эксперимента.

Заключение

В приближении «тонкого слоя» усовершенствована сформулированная ранее математическая модель и создан численный код для исследования гидротермодинамики поверхностного слоя воды, увлекаемого обтекающим тело воздухом, и пространственно-временной эволюции барьерного льда, образующегося в результате кристаллизации пленки. Результаты численно-теоретического исследования удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными, полученными ранее на аэрохолодильном стенде.

Разработанная физико-математическая модель и соответствующий численный код позволят оценить деградацию аэродинамических характеристик профиля либо решить вариационную проблему оптимального расположения нагревателей внутри элемента конструкции летательного аппарата с целью предотвращения опасности, вызванной образованием барьерного льда.

Список литературы

1. Myers T.G., Charpin J.P.F., Chapman S.J. The flow and solidification of a thin fluid film on an arbitrary three-dimensional surface // *Phys. Fluids*. 2002. Vol. 14, No. 8. P. 2788–2803.
2. Fu P., Farzaneh M., Bouchard G. Modeling a water flow on an icing surface // *Proc. 11th Intern. Workshop on Atmospheric Icing of Structures*. 2005. 6 p.
3. Du Y., Gui Y., Xiao C., Yi X. Investigation on heat transfer characteristics of aircraft icing including runback water // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2010. Vol. 53, No. 19–20. P. 3702–3707.
4. Kashevarov A., Levchenko V., Miller A., Potapov Yu., Stasenko A. Experimental and theoretical investigations of solid-phase ice accretion // *7th European Conf. for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS)*, 3–6 July 2017, Milano, Italy. 15 p.
5. Кашеваров А.В., Левченко В.С., Миллер А.Б., Потапов Ю.Ф., Стасенко А.Л. К гидротермодинамике обледенения профиля в воздушно-кристаллическом потоке // *Журнал технической физики*. 2018. Т. 88, вып. 6. С. 808–814.
6. Кашеваров А.В., Стасенко А.Л. Гидротермодинамика жидкой пленки с кристаллами на поверхности тела в потоке воздуха, содержащем частицы льда // *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58, № 2. С. 103–114.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 390 с.
8. Фильчаков П.П. Приближенные методы конформных отображений. Киев: Наукова думка, 1964. 532 с.
9. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 392 с.
10. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат, 1979. 416 с.

*Статья поступила в редакцию 18 апреля 2018 г.,
после доработки — 26 сентября 2018 г.,
принята к публикации 11 декабря 2018 г.*