

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТ
ПРИ УЧЕТЕ МАССОВЫХ СИЛ

Ю. В. ПЕМИРОВСКИЙ, В. М. НЕБОГАТОВ

(Красноярск)

Достаточный критерий для проекта абсолютно минимального веса применительно к пластинкам (дискам) переменной толщины H , работающим в условиях плоского напряженного состояния, установлен в [1, 2]. Записав основные уравнения в системе координат, координатными линиями которой являются траектории главных напряжений — изостаты, авторы [3] показали, что для проектов, удовлетворяющих условию постоянства удельной скорости диссипации, при условии текучести Треска существует четыре типа решений. В [4] доказано, что для сторон шестигульника Треска это условие является также необходимым условием для проекта абсолютно минимального веса. Характеристики уравнений, описывающих оптимальные для произвольного гладкого условия текучести, изучались в [5]. С помощью готовых полей напряжений в [6] вычислены оптимальные толщины плоских элементов в виде Т-образной пластинки и растягиваемой полигональной пластинки с отверстием круглой и квадратной формы. Конечно-элементный подход к рассматриваемой задаче разработан в [7]. Массовые силы в [3–7] предполагались равными нулю.

Следует заметить, что в настоящее время в литературе отсутствуют работы, касающиеся учета массовых сил в задаче оптимального проектирования дисков, за исключением [2], где рассмотрена частная задача проектирования на минимум веса вращающегося круглого диска для одного из типов граничных условий.

Данная работа имеет своей целью в какой-то мере восполнить этот пробел.

1. В качестве срединной плоскости выберем координатную плоскость $x_3^* = 0$. Не зависящие от H силы F_1^* , F_2^* действуют в срединной плоскости диска по части границы Γ_F . На другой части границы Γ_U скорости равны нулю. Массовые силы g_1^* , g_2^* , отнесенные к единице объема, также действуют в срединной плоскости. Предположение о плоском напряженном состоянии влечет $\sigma_{33}^* = \sigma_{23}^* = \sigma_{13}^* = 0$. Обозначим u_k^* , σ_{kl}^* , ε_{kl}^* , σ_k^* , ε_k^* — соответственно компоненты скорости, тензора напряжений, тензора скоростей деформации, главные напряжения и главные скорости деформации. Индексы k, l всюду в дальнейшем принимают значения 1, 2. Перейдем к безразмерным величинам $x_k = x_k^* x_0^{-1}$, $u_k = u_k^* t_0 x_0^{-1}$, $h = H H_0^{-1}$, $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}^* \sigma_0^{-1}$, $\sigma_k = \sigma_k^* \sigma_0^{-1}$, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^* t_0$, $\varepsilon_k = \varepsilon_k^* t_0$, $F_k = F_k^* \sigma_0^{-1} H_0^{-1}$, $g_k = g_k^* x_0 \sigma_0^{-1}$, где σ_0 , t_0 , x_0 , H_0 — характерные напряжение, время, длина и толщина пластинки. Компоненты являются функциями только x_1, x_2 и удовлетворяют уравнениям равновесия

$$(1.1) \quad (\sigma_{kl}^h)_{,l} + g_k^h = 0$$

и граничным условиям на Γ_F

$$(1.2) \quad (\sigma_{kl}^h) n_l = F_k,$$

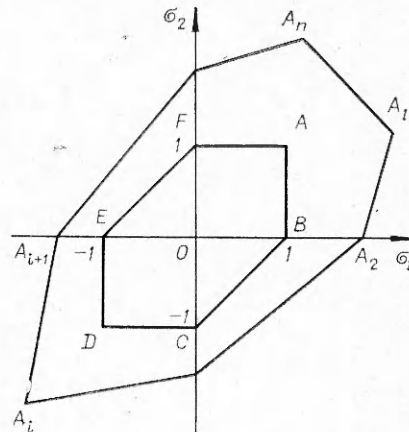
где n_l — компоненты единичной нормали к линии Γ_F . Материал пластинки предполагается изотропным, идеально пластическим, с кусочно-линейным потенциалом (фиг. 1). В связи с этим возникает два важных типа оптимальных проектов: диски, отвечающие стороне $A_i A_{i+1}$, и диски, отвечающие вершине A_i .

Уравнение стороны $A_i A_{i+1}$ имеет вид

$$(1.3) \quad f = a_i \sigma_1 + b_i \sigma_2 = 1,$$

где

$$(1.4) \quad a_i = -Q_i d_i^{-1}; \quad b_i = P_i d_i^{-1}; \quad P_i = p_{i+1} - p_i;$$



Фиг. 1

$Q_i = q_{i+1} - q_i$, $d_i = p_{i+1} q_i - p_i q_{i+1}$, (p_i, q_i) — координаты вершины A_i . Запишем известные соотношения [8] как

$$(1.5) \quad 2\{\sigma_{11}, \sigma_{22}\} = \sigma_1 + \sigma_2 \pm (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta, \quad 2\sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta;$$

$$(1.6) \quad 2\{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}\} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \pm (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cos 2\theta, \quad 2\varepsilon_{12} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin 2\theta,$$

где θ — угол между первым главным направлением и осью x_1 . Выпишем также формулы Коши

$$(1.7) \quad 2\varepsilon_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k}.$$

2. Рассмотрим оптимальные проекты, отвечающие стороне $A_i A_{i+1}$. Закон течения для стороны $A_i A_{i+1}$ имеет вид

$$(2.1) \quad \varepsilon_1 = \lambda a_i, \quad \varepsilon_2 = \lambda b_i, \quad \lambda \geq 0.$$

Условие постоянства модифицированной диссипативной функции $\Delta = \sigma_k \varepsilon_k - g_k u_k = \text{const}$, откуда

$$(2.2) \quad \lambda = g_k u_k + \Delta, \quad \Delta = \text{const}.$$

Уравнения (1.1), (1.3), (1.5)–(1.7), (2.1), (2.2) образуют замкнутую систему 15 уравнений с 15 неизвестными функциями. Покажем, что в случае постоянных массовых сил эту систему удастся свести к системе четырех квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

Пусть g_k — некоторые постоянные. Введем обозначения:

$$(2.3) \quad \omega = 0,5\lambda^{-1}(u_{1,2} - u_{2,1}), \quad s_i = 0,5(b_i - a_i), \quad t_i = 0,5(b_i + a_i).$$

В силу (1.6), (1.7), (1.9), (2.1)–(2.3) имеем

$$(2.4) \quad \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}\} = \lambda(t_i^2 + s_i \cos 2\theta), \quad \varepsilon_{12} = -\lambda s_i \sin 2\theta;$$

$$(2.5) \quad \lambda_{,1} = g_1 \varepsilon_{11} + g_2 (\varepsilon_{12} - \omega \lambda), \quad \lambda_{,2} = g_1 (\varepsilon_{12} + \omega \lambda) + g_2 \varepsilon_{22}.$$

Дифференцируя ω по x_1, x_2 , заменяя частные производные от u_k с помощью (1.7) и используя (2.4), (2.5), приходим к системе

$$(2.6) \quad 2s_i (\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) - \omega_{,1} = -g_2 (\omega^2 + t_i^2 - s_i^2),$$

$$2s_i (\theta_{,2} \cos 2\theta - \theta_{,1} \sin 2\theta) + \omega_{,2} = -g_1 (\omega^2 + t_i^2 - s_i^2).$$

Если найдено ω, θ — решение системы (2.6), то из (1.7), (2.3), (2.4) получаем систему для нахождения скоростей

$$(2.7) \quad u_{k,l} = U_{kl} \lambda, \quad \text{где}$$

$$U_{kk} = t_i + (-1)^k s_i \cos 2\theta; \quad U_{kl} = (-1)^l \omega - s_i \sin 2\theta; \quad k \neq l.$$

Из (2.2), (2.7) имеем

$$(2.8) \quad \lambda_{,h} = V_h \lambda, \quad \text{где } V_h = g_l U_{lh}.$$

Нетрудно убедиться, что система (2.8) и система (2.7) совместны, если только ω, θ — решение (2.6). Запишем систему (2.8) в виде $(\ln \lambda)_{,h} = V_h$, после чего находим $\ln \lambda$, а затем из (2.7) u_k по их полным дифференциалам. Таким образом, система (2.6) с учетом (2.4), (2.5) представляет собой условие совместности деформаций. В случае $s_i \neq 0$ она содержит две неизвестные функции, а в случае $s_i = 0$ (отрезок $A_i A_{i+1}$ параллелен прямой $\sigma_1 + \sigma_2 = 0$) — только одну неизвестную функцию — ω . Поэтому эти два случая рассмотрим отдельно.

В случае $s_i \neq 0$ положим $\chi = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2)$, тогда

$$(2.9) \quad \{\sigma_{11}, \sigma_{22}\} = \chi \pm (C_i \chi + D_i) \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = (C_i \chi + D_i) \sin 2\theta,$$

где $C_i = t_i s_i^{-1}$, $D_i = -0,5 s_i^{-1}$. Подставляя (2.9) в (1.1) и учитывая (2.6), приходим к системе

$$(2.10) \quad h_{,1} [\chi + (C_i \chi + D_i) \cos 2\theta] + h_{,2} (C_i \chi + D_i) \sin 2\theta + \chi_{,1} (1 + C_i \cos 2\theta) + \chi_{,2} C_i \sin 2\theta - s_i^{-1} (C_i \chi + D_i) [\omega_{,2} + g_1 (\omega^2 + t_i^2 - s_i^2)] h + g_1 h = 0,$$

$$h_{,1} (C_i \chi + D_i) \sin 2\theta + h_{,2} [\chi - (C_i \chi + D_i) \cos 2\theta] + \chi_{,2} (1 - C_i \cos 2\theta) + \chi_{,1} C_i \sin 2\theta + s_i^{-1} (C_i \chi + D_i) [\omega_{,1} - g_2 (\omega^2 + t_i^2 - s_i^2)] h + g_2 h = 0.$$

Таким образом, задача сведена к решению двух систем квазилинейных уравнений (2.6), (2.10). К полученным системам уравнений следует добавить также систему не-

равенств

$$(2.11) \quad h \geq 0, P_i p_i + Q_i q_i \leq P_i \sigma_1 + Q_i \sigma_2 \leq P_i p_{i+1} + Q_i q_{i+1}, \Delta > 0.$$

Дифференциальный оператор, стоящий в левой части (2.6), с точностью до обозначений совпадает с соответствующим оператором системы уравнений плоской деформации идеально пластического тела [8]. Следовательно, система (2.6) гиперболическая, ее характеристические направления: $\gamma_1 = \operatorname{tg} \theta$, $\gamma_2 = -\operatorname{ctg} \theta$. Уравнение для нахождения характеристик системы (2.10) ($\gamma = dx_2/dx_1$) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\gamma [\chi + (C_i \chi + D_i) \cos 2\theta] + & -\gamma (1 + C_i \cos 2\theta) + \\ + (C_i \chi + D_i) \sin 2\theta, & + C_i \sin 2\theta, \\ -\gamma (C_i \chi + D_i) \sin 2\theta + \chi - & -\gamma C_i \sin 2\theta - 1 - \\ -(C_i \chi + D_i) \cos 2\theta, & -C_i \cos 2\theta, \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем $\gamma_3 = \operatorname{tg} \theta$, $\gamma_4 = -\operatorname{ctg} \theta$. Таким образом, система (2.6), (2.10) гиперболическая с четырьмя действительными семействами характеристик, совпадающими с изостатами.

Пусть f_1, f_2 — соответствующие правые части в (2.8). Соотношения на характеристиках (2.8) имеют вид [9]

$$dx_2 = \operatorname{tg} \theta dx_1, d(\omega - 2s_i \theta) + f_1 dx_1 - f_2 dx_2 = 0,$$

$$dx_2 = -\operatorname{ctg} \theta dx_1, d(\omega + 2s_i \theta) + f_1 dx_1 - f_2 dx_2 = 0.$$

Система (2.6), (2.10) в общем случае может быть решена с помощью численных методов [8, 10]. Однако в некоторых случаях удается получить аналитическое решение. Заметим, что при $g_1 = g_2 = 0$ соотношения на характеристиках (2.6) представляются в виде полных дифференциалов. По аналогии с этим для ненулевых g_k рассмотрим ситуацию, когда выражение $f_1 dx_1 - f_2 dx_2$ является полным дифференциалом. Из этого условия получаем уравнение

$$\omega(g_1 \omega_{,1} + g_2 \omega_{,2}) = 0,$$

общее решение которого

$$\omega = \omega^0(g_2 x_1 - g_1 x_2),$$

где $\omega^0(t)$ — некоторая функция. При этом $f_1 dx_1 - f_2 dx_2 = dG$, $G = G^0(g_2 x_1 - g_1 x_2)$, а $G^0(t)$ — решение уравнения

$$G^{0'}(t) = -\omega^{02}(t) - s_i^2 - t_i^2.$$

Полагая $p^0(t) = \omega^0(t) + G^0(t)$ и $p = p^0(g_2 x_1 - g_1 x_2)$, систему (2.6) приведем к виду

$$(2.12) \quad 2s_i(\theta_{,2} \sin 2\theta + \theta_{,1} \cos 2\theta) - p_{,1} = 0, 2s_i(\theta_{,2} \cos 2\theta - \theta_{,1} \sin 2\theta) + p_{,2} = 0.$$

Если известно p, θ — решение (2.12), то $\omega^0(t)$ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega^{0'}(t) - \omega^{02}(t) = p^{0'}(t) + t_i^2 - s_i^2,$$

общее решение которого [11] опускается ввиду его громоздкости.

Уравнения характеристик системы (2.12):

$$dx_2 = \operatorname{tg} \theta dx_1, \xi = p - 2s_i \theta, dx_2 = -\operatorname{ctg} \theta dx_1, \eta = p + s_i \theta.$$

Выбрав в качестве новых неизвестных функций ξ, η , преобразуем (2.12) в эквивалентную систему

$$(2.13) \quad \xi_{,1} + \xi_{,2} \operatorname{tg} \theta = 0, \eta_{,1} \operatorname{tg} \theta - \eta_{,2} = 0.$$

В случае, когда якобиан

$$J = 2\xi_{,1}\eta_{,1}(\sin 2\theta)^{-1} = -2\xi_{,2}\eta_{,2}(\sin 2\theta)^{-1}$$

отличен от нуля, заменой неизвестных функций на независимые переменные систему (2.13) можно свести к линейной системе [8]. Последнюю можно решать численными методами либо с помощью тригонометрических рядов, либо приближенными методами интегрирования. Некоторые простые решения получаются, когда $J = 0$: 1) $\xi, \eta = \operatorname{const}$; 2) $\xi = \operatorname{const}$; 3) $\eta = \operatorname{const}$. Рассмотрим только первый случай: $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0$. Тогда, очевидно, $\theta = \theta_0, p = p_0$ и $\omega = \omega^0(g_2 x_1 - g_1 x_2)$, где функция $\omega^0(t)$ — решение уравнения

$$\omega^{0'}(t) - \omega^{02}(t) = t_i^2 - s_i^2,$$

общее решение которого

$$(2.14) \quad \omega^0(t) = \begin{cases} \sqrt{a_i b_i} \operatorname{tg}(\sqrt{a_i b_i} t + c), & \text{если } a_i b_i > 0, \\ \sqrt{-a_i b_i} \frac{c \exp(-2\sqrt{-a_i b_i} t) + 1}{c \exp(-2\sqrt{-a_i b_i} t) - 1}, & \text{если } a_i b_i < 0, \\ 0 \text{ либо } (c-t)^{-1}, & \text{если } a_i b_i = 0 \end{cases}$$

(c — постоянная интегрирования).

Введем новые независимые переменные $y_h = n_{kl} x_l$, где $n_{11} = n_{22} = \cos \theta_0$, $n_{12} = -n_{21} = \sin \theta_0$. Систему (2.10) нетрудно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \{[(1 + C_i)\chi + D_i]h\} + g_1^0 h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y_2} \{[(1 - C_i)\chi - D_i]h\} + g_2^0 h = 0,$$

где $g_i^0 = n_{kl} g_l$. Последняя система есть не что иное, как система уравнений равновесия в системе координат $y_1 y_2$:

$$(2.15) \quad \frac{\partial}{\partial y_h} (\sigma_h h) + g_h^0 h = 0.$$

Далее для простоты $g_1^0 = 0$. Из первого уравнения (2.15) $T_1 = \sigma_1 h = Y_2(y_2)$, где $Y_2(y_2)$ — некоторая функция.

Если $b_i \neq 0$, то из (1.3) $T_2 = \sigma_2 h = b_i^{-1} h - a_i b_i^{-1} Y_2(y_2)$. Подставляем это выражение во второе уравнение (2.15). После интегрирования получим

$$h = \left(Y_1(y_1) + a_i \int_{y_2^0}^{y_2} Y_2'(y_2) \exp(b_i g_2^0 y_2) dy_2 \right) \exp(-b_i g_2^0 y_2),$$

где $Y_1(y_1)$ — некоторая функция.

Если $b_i = 0$, то $\sigma_1 \equiv 1/a_i$. Из (2.15) получаем

$$(2.16) \quad T_1 = Y_2(y_2), \quad T_2 = a_i g_2^0 \left[Y_1(y_1) - \int_{y_2^0}^{y_2} Y_2(y_2) dy_2 \right], \quad h = a_i Y_2(y_2),$$

где $T_h = \sigma_h h$ и $Y_h(y_h)$ — некоторые функции.

Функции $Y_h(y_h)$ определяются из граничных условий и должны подчиняться системе (2.11). Например, при $b_i = 0$ имеем

$$(2.17) \quad a_i Y_2(y_2) \geq 0, \quad q_i Q_i \leq g_2^0 Q_i \left[Y_1(y_1) - \int_{y_2^0}^{y_2} Y_2(y_2) dy_2 \right] Y_2^{-1}(y_2) \leq q_{i+1} Q_i, \quad \Delta > 0.$$

При $s_i = 0$ положим $\chi = 0,5(\sigma_1 - \sigma_2)$, тогда

$$(2.18) \quad \{\sigma_{11}, \sigma_{22}\} = m_i \pm \chi \cos 2\theta, \quad \sigma_{12} = \chi \sin 2\theta, \quad m_i = 0,5b_i^{-1}.$$

Из (1.4), (2.18), (2.6) получаем две системы уравнений:

$$(2.19) \quad \omega_{,1} = g_2(\omega^2 + t_i^2), \quad \omega_{,2} = -g_1(\omega^2 + t_i^2);$$

$$(2.20) \quad h_{,1}(m_i + \chi \cos 2\theta) + h_{,2}\chi \sin 2\theta + \chi_{,1}h \cos 2\theta + \chi_{,2}h \sin 2\theta + 2\chi h(\theta_{,2} \cos 2\theta - \theta_{,1} \sin 2\theta) + g_1 h = 0, \\ h_{,1}\chi \sin 2\theta + h_{,2}(m_i - \chi \cos 2\theta) + \chi_{,1}h \sin 2\theta - \chi_{,2}h \cos 2\theta + 2\chi h(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) + g_2 h = 0.$$

Нетрудно найти общее решение системы (2.19)

$$\omega = t_i \operatorname{tg}[(g_2 x_1 - g_1 x_2)t_i + c],$$

где c — постоянная интегрирования. Далее, система (2.20) содержит два уравнения и три неизвестные функции. Поэтому можно задать произвольно одну из функций, например θ , и решать линейную систему дифференциальных уравнений относительно двух других функций. Если θ задана, то граничные условия на Γ_x для системы (2.20) будут определяться из системы (1.2), (2.18). Заметим, что на функцию θ нет никаких

ограничений. Таким образом, в случае $s_i = 0$, как отмечалось в [12], должна наблюдаться неединственность решения поставленной выше задачи.

Уравнение характеристик системы (2.20) (θ — известная функция) имеет вид $m_i h \sin 2\theta (\gamma^2 + 2\gamma \operatorname{ctg} 2\theta - 1) = 0$, откуда $\gamma_1 = \operatorname{tg} \theta$, $\gamma_2 = -\operatorname{ctg} \theta$. Таким образом, эта система гиперболическая, ее характеристики совпадают с изостатами. В заключение заметим, что к системам уравнений (2.19), (2.20), как и при $s_i \neq 0$, следует присоединить систему неравенств (2.11).

3. Рассмотрим оптимальные проекты, отвечающие вершине A_i . В этом случае $\sigma_1 = p_i$, $\sigma_2 = q_i$. Из (1.1), (1.5) получаем

$$(3.1) \quad h_{,1} [(p_i + q_i) + (p_i - q_i) \cos 2\theta] + h_{,2} (p_i - q_i) \sin 2\theta + 2h(p_i - q_i)(\theta_{,2} \cos 2\theta - \theta_{,1} \sin 2\theta) + 2g_1 h = 0,$$

$$h_{,1} (p_i - q_i) \sin 2\theta + h_{,2} [(p_i + q_i) - (p_i - q_i) \cos 2\theta] + 2h(p_i - q_i)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) + 2g_2 h = 0.$$

Таким образом, система (3.1) замкнута относительно h, θ . Для вершины B шестигонника Треска (см. фиг. 1) при отсутствии массовых сил она рассмотрена в [4]. Правда, там неверно выписаны коэффициенты (при $h_{,1}$ в первом уравнении и при $h_{,2}$ во втором уравнении были потеряны постоянные слагаемые $p_i + q_i$), что повлияло на тип и последующее решение системы.

Закон течения для вершины A_i имеет вид

$$\varepsilon_1 = \lambda [\mu a_{i-1} + (1 - \mu) a_i], \quad \varepsilon_2 = \lambda [\mu b_{i-1} + (1 - \mu) b_i], \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad \lambda > 0.$$

Из условия оптимальности $\lambda = g_h u_i + \Delta$, $\Delta = \text{const}$. Массовые силы, вообще говоря, не предполагаются постоянными. Исследование системы существенно различно в следующих двух случаях.

1. Если $p_i \neq q_i$, уравнение характеристик (3.1)

$$2h(p_i - q_i)[(p_i + q_i) \cos 2\theta + (p_i - q_i)] \gamma^2 - 2(p_i + q_i) \gamma \sin 2\theta + (p_i - q_i) - (p_i + q_i) \cos 2\theta = 0,$$

откуда

$$\gamma_{1,2} = [(p_i + q_i) \sin 2\theta \pm 2\sqrt{p_i q_i}] / [(p_i + q_i) \cos 2\theta + (p_i - q_i)].$$

Таким образом, система (3.1) имеет гиперболический тип при $p_i q_i > 0$, параболический — при $p_i q_i = 0$, эллиптический — при $p_i q_i < 0$.

2. Если $p_i = q_i$, имеем систему

$$(3.2) \quad p_i h_{,1} + g_1 h = 0, \quad p_i h_{,2} + g_2 h = 0$$

для одной неизвестной функции. Запишем (3.2) в виде

$$(\ln h)_{,1} + g_1 p_i^{-1} = 0, \quad (\ln h)_{,2} + g_2 p_i^{-1} = 0.$$

Для совместности системы (3.2), таким образом, необходимо, чтобы $g_{1,2} = g_{2,1}$. При выполнении последнего условия находим $\ln h$ по его полному дифференциалу. Когда $g_1 = g_2 = 0$, решением будет, как и в [3, 4], диск постоянной толщины.

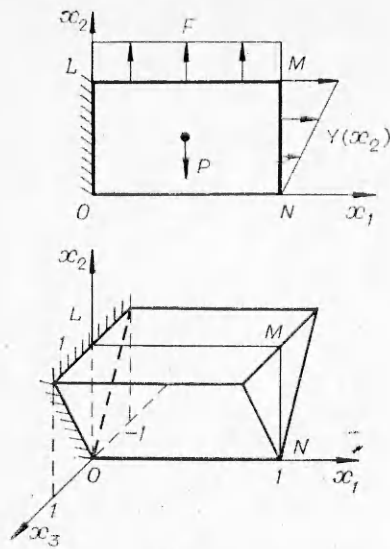
4. Для иллюстрации рассмотрим прямоугольную плиту переменной толщины, одной стороной заделанную в вертикальную стену (фиг. 2). К противоположной стороне приложено нормальное усилие интенсивности $Y(x_2)$, действующее в плоскости плиты. Сторона ON свободна от усилий, а к стороне LM приложено равномерно распределенное нормальное усилие интенсивности F . На плиту действует также массовая сила P : $g_1 = 0$, $g_2 = -\rho$, где ρ — плотность материала плиты.

Предположим, что в оптимальной пластинке реализуется режим AB условия пластичности Треска (см. фиг. 1). Тогда $a_i = 1$, $b_i = 0$. Положим $\theta = 0$ и $\omega = 0$ в силу (2.14). Отсюда $g_1^0 = 0$ и $p = p_0$, поэтому $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$. Следовательно, оптимальный проект определяется формулами (2.16). Из граничных условий получаем усилия T_h и связь между F и $Y(x_2)$:

$$T_1 = h = Y(x_2), \quad T_2 = \rho \int_0^{x_2} Y(x_2) dx_2, \quad F = \rho \int_0^b Y(x_2) dx_2, \quad b = |OL|.$$

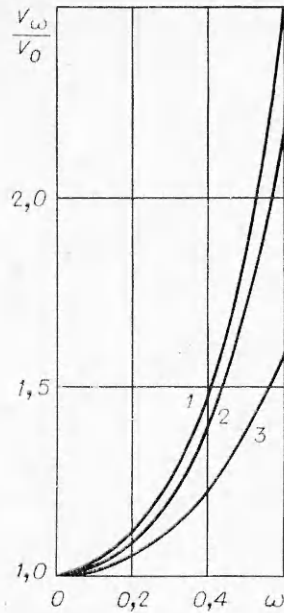
Неравенства (2.17) дают ограничения на $Y(x_2)$:

$$Y(x_2) \geq 0, \quad \rho \int_0^{x_2} Y(x_2) dx_2 \leq Y(x_2), \quad 0 \leq x_2 \leq b.$$



Фиг. 2

Фиг. 3



Далее, $U_{11} = 1$, $U_{22} = U_{12} = U_{21} = V_1 = V_2 = 0$, откуда $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$. Из (2.7), учитывая граничные условия, получим $u_1 = \lambda_0 x_1$, $u_2 = 0$.

Для конкретного примера положим $|OL| = |ON| = 1$, $\rho = 1$, $F = 1$, $\lambda_0 = 1$, $Y(x_2) = 2x_2$. При этом $h = 2x_2$ (см. фиг. 2).

5. Частным случаем рассматриваемой задачи является задача о нахождении минимального объема вращающегося диска.

Круглый кольцевой диск с радиусом внутренней окружности R_1 и радиусом внешней окружности R_2 вращается с постоянной угловой скоростью ω^* около оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Границы диска нагружены равномерно распределенными силами интенсивности T_1^* и T_2^* , либо на одной границе заданы силы, а на другой — скорости равны нулю. Требуется определить толщину диска, отвечающую минимуму объема.

Пусть r^* , u_r , σ_r , σ_θ , ε_r , ε_θ , ρ^* — соответственно радиус, радиальная скорость, главные напряжения, главные скорости деформации и плотность материала диска. Перейдем к безразмерным величинам: $r = r^* r_0^{-1}$, $u = u_r t_0 r_0^{-1}$, $\omega = \omega^* t_0$, $\sigma_1 = \sigma_r \sigma_0^{-1}$, $\sigma_2 = \sigma_\theta \sigma_0^{-1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_r t_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_\theta t_0$, $\rho = \rho^* r_0^2 t_0^{-2} \sigma_0^{-1}$, $h = H H_0^{-1}$, $r_k = R_k r_0^{-1}$, $T_k = T_k^* \sigma_0^{-1} H_0^{-1}$, где σ_0 , t_0 , r_0 , H_0 — характерные напряжение, время, длина и толщина диска. Напряжения σ_k удовлетворяют уравнению равновесия

$$(5.1) \quad (h\sigma_1)_{,r} + h(\sigma_1 - \sigma_2)/r = -\rho\omega^2 h,$$

где запятая обозначает дифференцирование по r . Компоненты скорости деформации выражаются через u :

$$(5.2) \quad \varepsilon_1 = u_{,r}, \quad \varepsilon_2 = u/r;$$

для величины Δ имеем

$$\Delta = \sigma_k \varepsilon_k - \rho\omega^2 r u.$$

Случай $T_1 = 0$, $T_2 > 0$ был рассмотрен в [2] при условии текучести Треска. Условие оптимальности наложило ограничение на множество допустимых положений точки напряжений на шестиугольнике текучести. Выяснилось, что лишь напряжения, представляемые точками A , B , D , E , могут соответствовать полю скоростей, подчиняющемуся условию $\Delta = \text{const}$. Авторы [2] исключили из рассмотрения точки D и E , так как $T_1 = 0$, $T_2 > 0$, и точку B , так как в этом случае на внутренней границе $u = r\varepsilon_2 \leq 0$. С последним замечанием нельзя согласиться, так как условие $u \leq 0$ ничему не противоречит. Ниже будет приведен пример, показывающий, что для других граничных условий существуют оптимальные проекты, работающие в режиме B , для которых тем не менее это условие выполнено. В случае же $T_1 = 0$ точка B действительно должна быть исключена из рассмотрения, но по другой причине: общее решение уравнения (5.1) для режима B

$$(5.3) \quad h = h_0 r^{-1} \exp(-0,5\rho\omega^2 r^2), \quad h_0 = \text{const},$$

поэтому из условия $T_1 = 0$ следует $h \equiv 0$ в пластинке. По этой же причине при $T_1 = 0$ невозможен и режим А. Таким образом, для указанных граничных условий оптимальное решение построить не удастся. Надо сказать, что само по себе условие $T_1 = 0$ для задачи о вращающемся диске несколько надуманно и не отражает ситуацию, которая наблюдается в реальных конструкциях данного типа: на внутренней границе либо перемещение равно нулю, либо задано отличное от нуля усилие. Авторы пытались искусственно выйти из полученного противоречия, введя и присоединяя к диску нереальный фланец бесконечной высоты, но конечной площади меридионального сечения. Кроме того, наложив дополнительное условие $u_{,r} = 0$ при $r = r_1$, никак не вытекающее из постановки задачи, авторы [2] потеряли одну произвольную постоянную при интегрировании уравнения для скоростей. Это привело к ограничению на скорость вращения диска $\rho\omega^2 r_1^2 < 1$.

Построим примеры оптимальных дисков при более естественных граничных условиях для того же условия текучести.

Рассмотрим следующие граничные условия:

$$(5.4) \quad u(r_1) = 0, \quad (\sigma_1 h)(r_2) = T > 0.$$

Предполагая, что оптимальный проект диска работает в режиме А, из (5.1) и граничного условия при $r = r_2$ имеем

$$(5.5) \quad h = T \exp [0,5 \rho \omega^2 (r_2^2 - r^2)].$$

Тогда из условия оптимальности

$$u_{,r} + u/r - \rho\omega^2 r u = \Delta, \quad \Delta = \text{const} > 0$$

и граничного условия при $r = r_1$ получаем

$$u = \begin{cases} \Delta \rho^{-1} \omega^{-2} r^{-1} \{ \exp [0,5 \rho \omega^2 (r - r_1^2)] - 1 \}, & \omega \neq 0, \\ 0,5 \Delta (r - r_1^2 r^{-1}), & \omega = 0. \end{cases}$$

Неравенства $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_2 \geq 0$ выполняются при $r \geq r_1$. На скорость вращения диска никаких ограничений нет. Объем оптимального диска V_ω является возрастающей функцией ω $V_\omega = 2\pi T \rho^{-1} \omega^{-2} \{ \exp [0,5 \rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)] - 1 \}$, $\omega \neq 0$, $V_0 = \pi T (r_2^2 - r_1^2)$ и $\lim_{\omega \rightarrow 0} V_\omega = V_0$. Заметим, что полученное решение справедливо также и для сплошного диска, когда $r_1 = 0$. Условие $u = 0$ при $r = 0$ здесь остается из требования осевой симметрии. На фиг. 3 приведены графики функции V_ω/V_0 для значений параметров $r_2 = 3$, $T = \rho = \Delta = 1$. Кривые 1-3 соответствуют значениям $r_1 = 0, 1, 2$.

В случае, когда на обеих границах диска заданы усилия T_k , предполагая, что оптимальный проект работает в режиме В, из (5.3) имеем

$$h = T_k r_k r^{-1} \exp [0,5 \rho \omega^2 (r_k^2 - r^2)], \quad k = 1, 2.$$

Следовательно, усилия T_k удовлетворяют соотношениям $T_1 r_1 = T_2 r_2 \exp (r_2^2 - r_1^2)$, $T_k > 0$. Из условия оптимальности $u_{,r} - \rho\omega^2 r u = \Delta$ получаем поле скоростей

$$u = \Delta \left[- \int_r^{r_2} \exp (-0,5 \rho \omega^2 r^2) dr - c \right] \exp (0,5 \rho \omega^2 r^2),$$

е $\Delta > 0$, c — произвольные постоянные. Неравенства $-\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 0$ тогда запишутся в виде

$$-\Delta - \rho\omega^2 r u \leq u/r \leq 0, \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Отсюда следует, что $c \geq 0$ и должно выполняться неравенство

$$(5.6) \quad \int_r^{r_2} \exp (-0,5 \rho \omega^2 r^2) dr + c \leq \frac{r}{\rho\omega^2 r^2 + 1} \exp (-0,5 \rho \omega^2 r^2)$$

для $r_1 \leq r \leq r_2$. Если это неравенство удовлетворяется для некоторого r при $c \geq 0$, то оно тем более удовлетворяется при $c = 0$. Поэтому положим $c = 0$. Заметим, что тогда при $r = r_2$ в (5.6) существует строгое неравенство, которое в силу непрерывности входящих в (5.6) функций имеет место и в некотором кольце $r_1 \leq r \leq r_2$. Решая неравенство (5.6) для конкретных значений ρ , ω , r_2 , можно найти нижнюю границу r^0 такую, что это неравенство будет в любом кольце $r^0 \leq r_1 \leq r \leq r_2$.

Детальное исследование неравенства (5.6) для краткости опускается. Очевидное неравенство

$$\int_r^{r_2} \exp(-0,5\rho\omega^2 r^2) dr \leq (r_2 - r) \exp(-0,5\rho\omega^2 r^2)$$

показывает, что (5.6) является следствием более сильного неравенства

$$(r_2 - r)(\rho\omega^2 r^2 + 1) \leq r.$$

Для конкретного примера положим $\rho = \omega = \Delta = 1$, $r_2 = 2$. Тогда последнее неравенство принимает вид

$$S(r) = -r^3 + 2r^2 - 2r + 2 \leq 0.$$

Так как оно выполняется при $r = 2$ и $r = 1,6$ и на интервале $[1,6; 2]$ функция $S(r)$ монотонна, то для примера можно положить $r_1 = 1,6$, $T_1 = \exp(1,44) \approx 4,221$, $T_2 = 0,8$. При этом все необходимые требования для существования оптимального проекта выполнены.

6. За последние десятилетия в рамках поисков рациональных проектов наряду с попытками построения оптимальных проектов в выше рассмотренном смысле активно развивается направление, связанное с построением равнопрочных (равнонапряженных) проектов [13—17]. Представляет интерес анализ взаимосвязи между ними, который проведем здесь на примере вращающегося диска. Если понятие равнопрочности согласуется с понятием равнонапряженности в смысле [13] $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, то для такого проекта распределение толщины совпадает с формулой (5.5) и разница между соответствующими решениями будет заключаться в том, что в рамках выше рассмотренной постановки условие оптимальности позволяет определить также поле скоростей, тогда как постановка задачи о равнонапряженном диске не дает такой возможности. Другой подход к построению равнопрочных проектов [14—16] основан на решении упругой задачи с дополнительным требованием выполнения условия пластичности одновременно во всей области. Если материал несжимаем и подчиняется условию пластичности Мизеса, то равнопрочный упругий проект является в то же время пластическим проектом минимального веса [14]. Однако построить соответствующее решение в этом случае трудно. Поэтому рассмотрим задачу о равнопрочном проекте при кусочно-линейном условии текучести.

Для упругого диска имеем уравнение равновесия (5.1), соотношения (5.2) и закон Гука

$$(6.1) \quad \sigma_1 = W^{-1}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad \sigma_2 = W^{-1}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad W = (1 - \nu^2)E^{-1}.$$

Здесь u , ε_k — безразмерные радиальное смещение и главные деформации; $E = E^* \sigma_0^{-1} t_0^{-1}$ (E^* — модуль Юнга); ν — коэффициент Пуассона материала. Для упругого равнопрочного диска, кроме того, должно выполняться условие пластичности (1.3). Из (1.3), (5.2), (6.1) имеем

$$B_1 u_{,r} + B_2 u/r = W,$$

где $B_1 = a_i + \nu b_i$; $B_2 = b_i + \nu a_i$. Интеграл этого уравнения

$$(6.2) \quad u = \begin{cases} W (B_1 + B_2)^{-1} (r + c_1 r^{-B_2/B_1}), & \text{если } B_1 + B_2 \neq 0, \\ WB_1^{-1} r \ln(c_1 r), & \text{если } B_1 + B_2 = 0, \end{cases}$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Вычисляя по перемещениям (6.2) напряжения и подставляя последние в уравнение равновесия, определим толщину диска h с точностью до постоянной c_2 . Константы c_1 , c_2 должны быть определены из граничных условий. В заключение построения необходимо проверить выполнение неравенств (2.11).

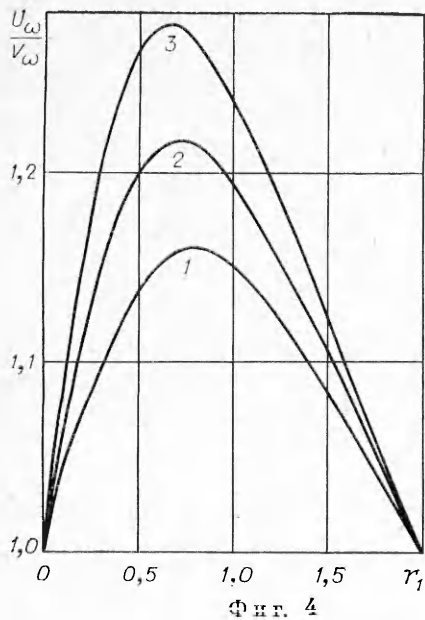
В случае кольцевого диска с граничными условиями (5.4), предполагая, что напряжения в диске отвечают стороне AB условия текучести Треска, получим $a_i = 1$, $b_i = 0$, $B_1 = 1$, $B_2 = \nu$. Из (5.2), (6.1), (6.2), учитывая первое граничное условие из (5.4), получим

$$u = (1 - \nu) E^{-1} (r - r_1^{1+\nu} r^{-\nu}), \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 1 - (1 - \nu) (r_1/r)^{1+\nu}.$$

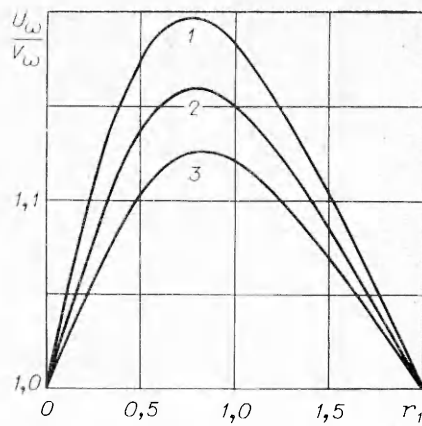
Из уравнения равновесия (5.1) при учете второго граничного условия из (5.4) получаем толщину равнопрочной пластинки

$$(6.3) \quad h = T \exp \left\{ \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \left[\left(\frac{r_1}{r} \right)^{1+\nu} - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{1+\nu} \right] + \frac{\rho\omega^2}{2} (r_2^2 - r^2) \right\}.$$

Неравенства (2.11) выполняются при $r \geq r_1$. При $0 < r_1 \leq r \leq r_2$, $0 < \nu < 1/2$ толщина этого проекта не меньше, чем толщина соответствующего оптимального проекта (5.5), причем толщины обоих проектов равны только при $r = r_2$. При $r_1 = 0$ имеем



Фиг. 4



Фиг. 5

ных $\nu = 0,3$, $r_2 = 2$, $\rho = T = 1$. Кривые 1—3 на фиг. 5 соответствуют $\nu = 0,2$; $0,3$; $0,4$ при постоянных $\omega = 1$, $r_2 = 2$, $\rho = T = 1$. Как видно, равнопрочный диск имеет объем, превышающий объем построенного выше оптимального диска.

Если на обеих границах диска заданы усилия $T_k > 0$, то, предполагая, что напряжения в диске отвечают стороне AF , получим $a_i = 0$, $b_i = 1$, $B_1 = \nu$, $B_2 = 1$. Из (6.2) $u = (1 - \nu)E^{-1}(r + c_1 r^{-\alpha})$, $\alpha = 1/\nu$. Соответствующие напряжения $\sigma_1 = 1 - c_1(\alpha - 1)r^{-1-\alpha}$, $\sigma_2 = 1$. Неравенства $0 \leq \sigma_1 \leq 1$ имеют место при $0 \leq c_1 \leq (\alpha - 1)^{-1} \times r_1^{\alpha+1}$. Из уравнения равновесия и граничного условия при $r = r_1$

$$h = T_1 N, \quad N = \exp \left[- \int_{r_1}^r \frac{\rho \omega^2 r^{3+\alpha} + c_1 \alpha (\alpha - 1)}{r^{2+\alpha} - c_1 (\alpha - 1)} dr \right],$$

причем константа c_1 определяется из условия $T_2 = T_1 N|_{r=r_2}$. Для примера положим $\rho = \omega = \bar{r}_i = 1$, $\nu = 1/3$, $c_1 = 1/2$, $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. В этом случае интеграл легко вычисляется и

$$T_2 = N|_{r=r_2} = \frac{81}{64 \sqrt{2}} \exp \left(- \frac{5}{2} \right) \approx 0,074.$$

Объем полученного равнопрочного упругого диска будет давать верхнюю оценку для проекта абсолютно минимального веса, так как построенное поле напряжений является статически допустимым [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Drucker D. C., Shield R. T. Design for minimum weight.— In: Proc. 9th Internat. Congress of Appl. Mech. Brussels, 1956, v. 5.
2. Drucker D. C., Shield R. T. Bounds on minimum weight design.— Quart. Appl. Math., 1957, v. 15, N 3. Рус. пер. Друккер, Шилд. Границы для проектирования конструкций минимального веса.— Сб. пер. Механика, 1958, № 3 (49).
3. Hu T. C., Shield R. T. Minimum-volume design of discs.— Z. angew. Math. Phys., 1961, Bd 12, N 5.
4. Эстрин М. И. О пластинках наименьшего веса, находящихся в условиях плоского напряженного состояния.— Тр. ЦНИИСК, 1961, вып. 4.
5. Reithman M. I. Analysis of equations of ideally-plastic shells.— Archiwum mech. stosow., 1967, N 4.
6. Szczepinski W. Optimum design of plane elements with complex shape.— Archiwum mech. stosow., 1966, v. 18, N 2.
7. Maier G., Zavelani-Rossi A., Benedett D. A finite element approach to optimal design of plastic structures in plane stress.— Intern. J. Numer. Meth. Eng., 1972, v. 4, N 4.

8. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высп. шк., 1969.
9. Христианович С. А. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1981.
10. Панов Д. Ю. Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Гостехиздат, 1957.
11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978.
12. Немпровский Ю. В. Об оценках веса пластических оптимальных конструкций. — Инж. журн. МТТ, 1968, № 4.
13. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
14. Save M. A. Some aspects of minimum-weight design. — In: Engineering Plasticity. Cambridge: University Press, 1968. Рус. пер. Сав М. Некоторые аспекты теории проектирования конструкций минимального веса. — Сб. пер. Механика, 1971, № 1 (125).
15. Разани Б. Поведение равнонапряженной конструкции и ее отношение к конструкции минимального веса. — Ракетн. техника и космонавтика, 1965, т. 3, № 12.
16. Черепанов Г. П., Ершов Л. В. Механика разрушения. М.: Машиностроение, 1977.
17. Немпровский Ю. В., Резников Б. С. О равнонапряженных пластинках и оболочках. — В кн.: Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971.

Поступила 22/III 1984 г.

УДК 548.4:539.37

О ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЯХ В ТЕЛЕ С КОГЕРЕНТНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

А. А. АЛЕКСЕЕВ

(Москва)

Знание поля внутренних напряжений $\hat{\sigma}$ в теле, содержащем ансамбль когерентных частиц, необходимо для понимания многих физических процессов, например упругости [1], нарушения когерентности [2] и др. Часто поле $\hat{\sigma}$ вычисляют по формуле

$$\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i,$$
 где N — количество частиц в теле, а \hat{S}_i — напряжение в теле конечных

размеров, создаваемое отдельной i -й частицей, т. е. при условии, что, кроме нее, в теле нет других частиц (способ 1) (см., например, [3]). Однако при этом оказывается нарушенным условие равновесия тела как целого. Это обстоятельство до настоящего времени не объяснено. Поэтому для вычисления $\hat{\sigma}$ используют следующий формальный прием. Поле $\hat{\sigma}$ записывают в виде $\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^N \hat{S}_i^{\infty} + \hat{\sigma}^{\text{Im}}$, где \hat{S}_i^{∞} — напряжение в не-

ограниченной среде, создаваемое отдельной частицей, а однородное слагаемое $\hat{\sigma}^{\text{Im}}$

вычисляют из условия равновесия тела как целого. Обычно $\hat{\sigma}^{\text{Im}}$ трактуют как напряжение, обусловленное силами изображения [4,5] (способ 2). Напряжения вне частиц, рассчитанные этими способами, совпадают, а напряжения внутри частиц отличаются. Применение способа 2 правомерно, когда упругие модули частиц и тела совпадают. Влияние различия упругих модулей обычно учитывается перенормировкой деформации несоответствия между частицами и телом, при этом напряжение $\hat{\sigma}^{\text{Im}}$ также считают однородным [4] (способ 3). Однако эти предположения требуют дополнительного обоснования.

В [6, 7] показано, что в неограниченной среде суммарное упругое искажение от ряда произвольных дефектов * не равно сумме искажений от изолированных дефектов, т. е. не выполняется принцип аддитивности упругих искажений. В данной работе проанализирована роль эффекта неаддитивности упругих искажений в теле конечных размеров, содержащем ансамбль когерентных частиц.

Рассмотрим сферическое тело радиуса R , содержащее статистически однородно распределенные сферические частицы второй фазы. Ограничимся случаем, когда матрица и фаза упругоизотропны с коэффициентами Ламэ μ_m, λ_m и μ_f, λ_f соответственно. Пусть все частицы имеют одинаковый радиус r_0 и создают искажения, определяемые в модели центра дилатации с мощностью ΔV_0 [8] (обычно деформация несоответствия $\epsilon = \Delta V_0 / (4\pi r_0^3) \ll 1$). Объемная доля второй фазы δ и N связаны соотношением $\delta = N(r_0/R)^3$. Поле упругих смещений будем искать в следующем виде [8]:
вне частиц

$$(1a) \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}) = A \sum_{i=1}^N (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + B \sum_{i=1}^N \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3};$$

* Рассмотрение в [6, 7] проводилось в приближении линейной теории упругости для наиболее общих моделей дефектов — дислокаций Сомилиана.