УДК 539.374

Г.В. Иванов, В.Д. Кургузов

БЕЗМОМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ПРОСЛОЕК

Исследованию плоской пластической деформации прослоек между жесткими блоками посвящено большое число работ [1, 2]. Однако изучалось лишь предельное состояние прямолинейных прослоек постоянной толщины при частных видах нагрузок. Ниже сформулирована модель плоской деформации прослоек, имеющая целью моделирование всего процесса упругопластического деформирования прослоек от момента возникновения пластических деформаций до достижения предельного состояния при комбинированном действии нагрузок растяжения (сжатия), сдвига и изгиба прослоек в общем случае, когда прослойка может быть криволинейной, а толщина ее — переменной.

1. Аппроксимация зависимости напряжений от скоростей деформаций. В качестве уравнений упругопластического деформирования, определяющих зависимость напряжений от средних в промежутке времени $[t, t + \tau]$ скоростей деформаций, принимаются уравнения [3]

(1.1)
$$\sigma'_{ij}(t + \tau) = \sigma'_{ij}(t) + \tau[2\mu e'_{ij} - \lambda\sigma'_{ij}(t + \tau)],$$
$$\sigma(t + \tau) = \sigma(t) + K\tau e,\ K = E/[3(1 - 2\nu)],$$
$$e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e,\ \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma,\ e = \delta^{ij}e_{ij},\ \sigma = \frac{1}{3}\delta^{ij}\sigma_{ij},$$

где σ_{ij}, e_{ij} — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций в декартовой системе координат; λ — неотрицательная величина: $\lambda = 0$ при $J_2(t + \tau) < J_2^*$, в остальных случаях λ определяется условием $J_2(t + \tau) = J_2^*$ при идеальной пластичности и условием

$$\lambda = \frac{(1 - \varkappa)[J_2(t + \tau) - J_2^*]}{2\varkappa\tau J_2(t + \tau)}$$

при изотропном упрочнении. Здесь $J_2(t + \tau) = \dfrac{1}{2}\sigma'_{ij}(t + \tau)\sigma'_{ij}(t + \tau)$; $J_2^* = \max(J_2^s, \max J_2)$; J_2^s — значение J_2, при котором элемент среды впервые начинает деформироваться пластически; $\max J_2$ — максимальное за предыдущую историю деформирования элемента среды значение J_2; $\varkappa = \mu'/\mu$ — коэффициент упрочнения; μ' — касательный модуль диаграммы чистого сдвига; μ — модуль сдвига; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Тем же методом, каким в [4] доказывается единственность скоростей напряжений в задачах упругопластического деформирования, можно доказать, что задача определения напряжений $\sigma_{ij}(t + \tau)$, удовлетворяющих (1.1), уравнениям равновесия

(1.2)
$$\frac{\partial\sigma_{ij}(t + \tau)}{\partial x_j} + f_i = 0$$

и граничным условиям

$$\sigma_{ij}(t + \tau)n_j|_{S_\sigma} = p_i^0,\ u_i|_{S_u} = u_i^0,$$

может иметь лишь единственное решение. При изотропном упрочнении единственным будет и решение задачи нахождения скоростей деформаций e_{ij}. В случае идеальной пластичности величина λ может определяться уравнениями (1.1) неоднозначно. Поэтому при идеальной пластичности наряду с теми e'_{ij}, которые определяются излагаемым ниже алгоритмом, могут соответствовать найденным по этому алгоритму $\sigma_{ij}(t + \tau)$ и другие значения e'_{ij}.

Ввиду нелинейности уравнений (1.1) удовлетворить им можно лишь последовательными приближениями. Ниже используется процесс последовательных приближений, состоящий из двух чередующихся этапов: 1) решение задачи о деформировании прослойки в промежутке $[t, t + \tau]$ при заданной в (1.1) зависимости λ от координат; 2) вычисление λ по найденным на предыдущем этапе скоростям деформаций при помощи равенств [3]:
при идеальной пластичности

$$\tau\lambda = 0 \text{ при } J_2^e \leqslant J_2^*,\ \tau\lambda = \sqrt{J_2^e/J_2^*} - 1 \text{ при } J_2^e > J_2^*,$$

при изотропном упрочнении

$$\frac{1}{1 + \tau\lambda} = \frac{\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 + (1 - \varkappa^2)(J_2^*/J_2^e)}}{1 + \varkappa}.$$

Здесь

$$J_2^e = \frac{1}{2}\sigma_{ij}{}'^e\sigma_{ij}{}'^e;\ \sigma_{ij}{}'^e = 2\mu\tau e'_{ij} + \sigma_{ij}{}'(t).$$

При вычислении первого приближения принимается, что $\lambda = 0$ всюду в прослойке.

2. Уравнения жесткости элементов прослойки. В рассматриваемой безмоментной модели плоской деформации прослойки используется представление прослойки в виде слоя четырехугольных элементов (рис. 1,*а*,*б*). Под уравнениями жесткости элемента понимаются зависимости усилий на гранях элемента от средних скоростей граней. При построении уравнений жесткости в каждом из элементов вводится косоугольная система координат $\xi^1, \xi^2 \in [-1, 1]$ [5]. Уравнения (1.1) записываются в виде

$$\hat\sigma^{\alpha\beta}(t + \tau) = a^{\alpha\beta ij}\tau\hat e_{ij} + \hat\sigma_\times^{\alpha\beta},\ \hat e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\xi^\alpha}\cdot\hat{\text{Э}}_\beta + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\xi^\beta}\cdot\hat{\text{Э}}_\alpha\right), \tag{2.1}$$

$$\hat\sigma_\times^{\alpha\beta} = (1 - \bar\lambda)\hat g^{\alpha\beta}\sigma(t) + \bar\lambda\hat\sigma^{\alpha\beta}(t),\ \sigma(t) = \frac{1}{3}[\hat g_{\alpha\beta}\hat\sigma^{\alpha\beta}(t) + \sigma^{33}(t)],$$

$$\sigma^{33}(t + \tau) = \left(K - \frac{2}{3}\mu\bar\lambda\right)\hat g^{\alpha\beta}\tau\hat e_{\alpha\beta} + (1 - \bar\lambda)\sigma(t) + \bar\lambda\sigma^{33}(t),$$

$$a^{\alpha\beta ij} = \left(K - \frac{2}{3}\mu\bar\lambda\right)\hat g^{\alpha\beta}\hat g^{ij} + \mu\bar\lambda(\hat g^{\alpha i}\hat g^{\beta j} + \hat g^{\alpha j}\hat g^{\beta i}),$$

$$\hat g^{\alpha\beta} = \hat{\text{Э}}^\alpha\cdot\hat{\text{Э}}^\beta,\ \hat{\text{Э}}^\alpha = \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}\mathrm{e}^i,\ \hat{\text{Э}}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial\xi^\alpha}\mathrm{e}_i,\ \alpha,\beta = 1,2,\ \bar\lambda = \frac{1}{(1 + \tau\lambda)},$$

а уравнения (1.2) — в виде

$$\frac{\partial \mathrm{p}^\alpha(t + \tau)}{\partial\xi^\alpha} + \sqrt{g}\mathrm{f} = 0,\ \mathrm{p}^\alpha(t + \tau) = A^{\alpha\beta}\tau\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial\xi^\beta} + \mathrm{p}_\times^\alpha, \tag{2.2}$$

$$A^{\alpha\beta} = \sqrt{g}a^{\alpha ij\beta}\hat{\text{Э}}_i\hat{\text{Э}}_j,\ \mathrm{p}_\times^\alpha = \hat\sigma_\times^{\alpha\beta}\sqrt{g}\hat{\text{Э}}_\beta,\ \sqrt{g} = |\hat{\text{Э}}_1\times\hat{\text{Э}}_2|,$$

где $\hat\sigma^{\alpha\beta}(t + \tau), \hat e_{\alpha\beta}$ — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций в системе координат ξ^α; e_i — базисные векторы декартовой системы координат x^i.

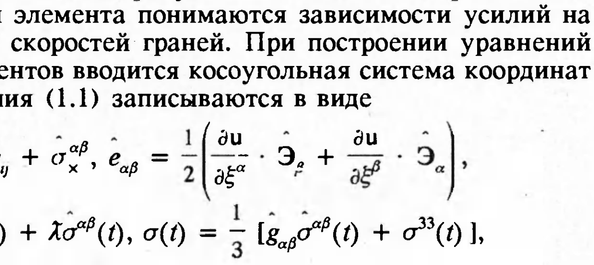

Рис. 1

Ниже с целью упрощения записи формул величины $\hat{\sigma}^{\alpha\beta}(t+\tau)$, $\mathbf{p}^\alpha(t+\tau)$ обозначены через $\hat{\sigma}^{\alpha\beta}$, $\mathbf{p}^\alpha$.

При построении уравнений жесткости используются: аппроксимация векторов $\mathbf{p}^\alpha$

(2.3) $$\mathbf{p}^\alpha = \overset{(0)}{\mathbf{p}^\alpha} + \overset{(1)}{\mathbf{p}^\alpha}\xi^\alpha \quad (\alpha = 1,2)$$

и три аппроксимации вектора скорости:

(2.4) $$\overset{(0)}{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^\alpha = \overset{(0)}{\mathbf{u}^\alpha} + \overset{(1)}{\mathbf{u}^\alpha}\xi^\alpha \quad (\alpha = 1,2).$$

Здесь $\overset{(0)}{\mathbf{u}}$ — средняя в элементе скорость; $\mathbf{u}^\alpha$ — средние скорости на линиях $\xi^\alpha = \mathrm{const}$. Принимается, что $\mathbf{p}^\alpha$, $\overset{(0)}{\mathbf{u}}$, $\mathbf{u}^\alpha$ связаны уравнениями

(2.5) $$\int\limits_\omega \left(\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g}\mathbf{f}\right) d\omega = 0, \quad \int\limits_\omega \left(\mathbf{p}^\alpha - A^{\alpha\beta}\tau \frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} - \mathbf{p}^\alpha_\times - \mathbf{q}^\alpha\right) d\omega = 0,$$

$$\mathbf{q}^1 = \gamma_1\sqrt{g}a^{1212}\tau\left(\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \xi^1}\cdot\hat{\mathbf{Э}}_2\right)\hat{\mathbf{Э}}_2, \quad \mathbf{q}^2 = \gamma_2\sqrt{g}a^{1212}\tau\left(\frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \xi^2}\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1\right)\hat{\mathbf{Э}}_1,$$

$$\overset{(0)}{\mathbf{u}^\alpha} - \overset{(0)}{\mathbf{u}} - \Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = 0, \quad \omega = \{\xi^1, \xi^2 \in [-1,1]\},$$

где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, определяющие силы вязкого сопротивления $\mathbf{q}^\alpha$. Эти силы вводятся в уравнения (2.5) для подавления паразитных поворотов указанного на рис. 1,*в* вида, которые при $\mathbf{q}^\alpha = 0$ могут возникать в элементах в случае, когда граничные условия на поверхностях прослойки формулируются в виде условий для касательных напряжений. Опыт численных расчетов показывает, что задания величин $\gamma_1 = \gamma_2 = 0{,}05$ обычно бывает достаточно для подавления паразитных поворотов.

В (2.5) Λ^α — тензор, удовлетворяющий условию $\Lambda^\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$, причем равенство возможно лишь при $\mathbf{a} = 0$. В рассматриваемой модели принимается

(2.6) $$\Lambda^\alpha = (B^\alpha)^{-1}, \quad B^\alpha = \frac{3}{4}\tau\int\limits_\omega A^{\alpha\alpha} d\omega.$$

При таком выборе Λ^α уравнения жесткости элемента на основе линейных аппроксимаций (2.3), (2.4) близки к уравнениям жесткости на основе квадратичных аппроксимаций, аналогичных изложенным в [6, 7]. Уравнения (2.3) — (2.6) в случае прямоугольных упругих элементов аналогичны тем, которые использовались в [8, 9] для построения уравнений жесткости упругих элементов.

Обозначим

(2.7) $$\mathbf{p}^\alpha|_{\xi^\alpha = \pm 1} = \mathbf{p}^\alpha_\pm, \quad \mathbf{u}^\alpha|_{\xi^\alpha = \pm 1} = \mathbf{u}^\alpha_\pm .$$

Из (2.3)—(2.7) следует

(2.8) $$\mathbf{p}^1_+ - \mathbf{p}^1_- + \mathbf{p}^2_+ - \mathbf{p}^2_- + 2(\sqrt{g}\mathbf{f})^{(0)} = 0,$$

$$\mathbf{p}^\alpha_+ - \mathbf{p}^\alpha_- - 3(A^{\alpha\alpha})^{(0)}\tau(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_- - 2\overset{(0)}{\mathbf{u}}) = 0,$$

$$\mathbf{p}^\alpha_+ + \mathbf{p}^\alpha_- - (A^{\alpha\beta})^{(0)}\tau(\mathbf{u}^\beta_+ - \mathbf{u}^\beta_-) - 2(\mathbf{p}^\alpha_\times + \mathbf{q}^\alpha)^{(0)} = 0,$$

где символ $(\ )^{(0)}$ означает осреднение по ω. Исключая в (2.8) $\overset{(0)}{\mathbf{u}}$, находим, что уравнения жесткости элемента прослойки можно записать в виде

(2.9) $$\mathbf{p}^\alpha_+ - \mathbf{p}^\alpha_- = D^{\alpha\beta}\tau(\mathbf{u}^\beta_+ + \mathbf{u}^\beta_-) + 2\chi^\alpha,$$

$$\mathbf{p}^\alpha_+ + \mathbf{p}^\alpha_- = C^{\alpha\beta}\tau(\mathbf{u}^\beta_+ - \mathbf{u}^\beta_-) + 2(\mathbf{p}^\alpha_\times)^{(0)},$$

где $D^{\alpha\beta}$, $C^{\alpha\beta}$, χ^α зависят только от коэффициентов уравнений (2.8).

Из (2.3) — (2.5) вытекает

$$\int\limits_{\omega}\left[\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}(\mathbf{p}^\alpha\cdot\mathbf{u}^\alpha)+\mathbf{f}\cdot\overset{(0)}{\mathbf{u}}\right]d\omega=\int\limits_{\omega}\left\{\left(A^{\alpha\beta}\tau\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{u}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}+\left(\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{g}a^{1212}\tau\left[\gamma_1\left(\frac{\partial\mathbf{u}^1}{\partial\xi^1}\cdot\hat{\mathbf{Э}}_2\right)^2+\gamma_2\left(\frac{\partial\mathbf{u}^2}{\partial\xi^2}\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1\right)^2\right]+\mathbf{p}^\alpha_{*}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right\}d\omega. \tag{2.10}$$

Используя (2.10), можно показать, что по заданным $\mathbf{p}^\alpha_{\pm}$ уравнения (2.9) определяют скорости $\mathbf{u}^\alpha_{\pm}$ с точностью до скоростей поступательного перемещения элемента.

Обозначим через $\mathbf{u}_*$, $\mathbf{p}^\alpha_*$ решение уравнений (2.1), (2.2). Из (2.1) — (2.5) следует

$$\int\limits_{\omega}\left\{A^{\alpha\beta}\tau\frac{\partial(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\beta)}{\partial\xi^\beta}\cdot\frac{\partial(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha)}{\partial\xi^\alpha}+\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}+\mathbf{q}^\alpha\cdot\frac{\partial\mathbf{u}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right\}d\omega= \tag{2.11}$$
$$=\int\limits_{\omega}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}[(\mathbf{p}^\alpha_*-\mathbf{p}^\alpha)\cdot(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha)]+[\sqrt{g}\mathbf{f}-(\sqrt{g}\mathbf{f})^{(0)}]\cdot\mathbf{u}_*+\right.$$
$$+\left(\mathbf{u}^\alpha-\overset{(0)}{\mathbf{u}^\alpha}-\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha_*}{\partial\xi^\alpha}+[(A^{\alpha\beta})^{(0)}-A^{\alpha\beta}]\tau\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_*}{\partial\xi^\alpha}+$$
$$\left.+[(\mathbf{p}^\alpha_*)^{(0)}-\mathbf{p}^\alpha_*+\mathbf{p}^\alpha-\overset{(0)}{\mathbf{p}^\alpha}+(\mathbf{q}^\alpha)^{(0)}]\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_*}{\partial\xi^\alpha}\right\}d\omega.$$

Учитывая, что $\mathbf{p}^\alpha_*$ — величина порядка произведения вектора напряжений на линейный размер элемента, находим, что правая часть равенства (2.11) состоит из слагаемых порядка линейного размера элемента и слагаемых порядка γ_1, γ_2. Отсюда вытекает, что, представляя прослойку состоящей из последовательно увеличивающегося числа слоев элементов с уравнениями жесткости (2.9), можно получить последовательность решений, сходящихся к решению уравнений (2.1), (2.2). Рассматриваемая модель деформирования прослойки с представлением ее в виде одного слоя элементов — первое приближение в этой последовательности решений.

3. Условия на поверхностях прослойки. Ограничимся классом задач, в которых перемещения блоков заданы как функции времени. Обозначим через $\mathbf{w}_\pm$ скорости частиц жестких блоков на границах раздела их с прослойкой.

В рассматриваемой модели нормальные составляющие скоростей на границах раздела блоков с прослойками считаются непрерывными:

$$(\mathbf{u}^2_\pm-\mathbf{w}_\pm)\cdot\hat{\mathbf{Э}}^2|_{\xi^2=\pm1}=0. \tag{3.1}$$

Касательные напряжения на поверхностях прослойки не могут превосходить величину $\tau_*=\sqrt{J_2^*}$. Поэтому в рассматриваемой модели принимается

$$(\mathbf{u}^2_+-\mathbf{w}_+)\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1|_{\xi^2=1}=0 \tag{3.2}$$

при

$$|\mathbf{p}^2_+\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1|\,|_{\xi^2=1}\leqslant\tau_*|\hat{\mathbf{Э}}_1|^2|_{\xi^2=1}. \tag{3.3}$$

Если при условии (3.2) неравенство (3.3) нарушается, то (3.2) заменяется равенством

$$(\mathbf{p}^2_+\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1)|_{\xi^2=1}=\pm\tau_*|\hat{\mathbf{Э}}_1|^2|_{\xi^2=1}. \tag{3.4}$$

При этом принимается, что знак правой части (3.4) тот же, что и знак $(\mathbf{p}^2_+\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1)|_{\xi^2=1}$ при условии (3.2). Если при условии (3.4) нарушается неравенство

$$[(\mathbf{p}^2_+\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1)(\mathbf{w}_+-\mathbf{u}^2_+)\cdot\hat{\mathbf{Э}}_1]|_{\xi^2=1}\geqslant0, \tag{3.5}$$

то (3.4) заменяется условием (3.2). Неравенство (3.5) означает неотрицательность мощности диссипации при проскальзывании прослойки.

Аналогично (3.2) — (3.5) формулируются условия для касательных составляющих скоростей и векторов напряжений на поверхностях $\xi^2 = -1$ элементов прослойки.

4. Алгебраические уравнения безмоментной модели прослойки. Из (2.9) и граничных условий (3.1)—(3.5) на гранях $\xi^2 = \pm 1$ элементов прослойки следует

$$\mathbf{p}_+^1 = A\mathbf{u}_+^1 + B\mathbf{u}_-^1 + \varphi,\ \mathbf{p}_-^1 = C\mathbf{u}_+^1 + D\mathbf{u}_-^1 + \psi. \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) и условия непрерывности векторов $\mathbf{u}^1, \mathbf{p}^1$ на общих гранях смежных элементов образуют систему уравнений

$$\begin{gathered}\mathbf{p}_{i+1}^1 = \tau(A_{i+1/2}\mathbf{u}_{i+1}^1 + B_{i+1/2}\mathbf{u}_i^1) + \varphi_{i+1/2},\\ \mathbf{p}_i^1 = \tau(C_{i+1/2}\mathbf{u}_{i+1}^1 + D_{i+1/2}\mathbf{u}_i^1) + \psi_{i+1/2},\\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\end{gathered} \tag{4.2}$$

где N — число элементов. Дополняя (4.2) граничными условиями

$$\mathbf{p}_0^1 = L_0\tau\mathbf{u}_0^1 + \varphi_0,\ \mathbf{p}_N^1 = L_N\tau\mathbf{u}_N^1 + \psi_N, \tag{4.3}$$

получим замкнутую относительно $\mathbf{u}_i^1, \mathbf{p}_i^1$ $(i = 0,1,\ldots,N)$ систему алгебраических уравнений рассматриваемой модели прослойки. Коэффициенты системы (4.2), (4.3) зависят от τ, λ и вида условий для касательных составляющих скоростей и векторов напряжений на гранях $\xi^2 = \pm 1$ элементов прослойки.

При заданных τ, λ и заданном виде условий на гранях $\xi^2 = \pm 1$ элементов решение системы (4.2), (4.3) может быть вычислено прогонкой. По найденному решению значения λ корректируются так, как указано в п. 1, а граничные условия на гранях $\xi^2 = \pm 1$ элементов корректируются, как указано в п. 3. Процесс итераций заканчивается, когда выполнены условия (3.2) — (3.5) и аналогичные условия на гранях $\xi^2 = -1$ элементов, а значения λ в очередной итерации мало отличаются от λ в предыдущей итерации.

5. Предельное состояние прямолинейной прослойки. В качестве примеров применения уравнений сформулированной модели деформирования прослоек рассматривались процессы идеального упругопластического деформирования прямолинейной прослойки, в которых один из блоков был неподвижен, а второй перемещался поступательно и поворачивался. Вычислялись необходимые для осуществления процесса деформирования силы P, Q и момент M:

$$P = \int_{-l/2}^{l/2}\sigma_{22}^+ dx_1,\ Q = \int_{-l/2}^{l/2}\sigma_{12}^+ dx_1,\ M^\pm = \int_{-l/2}^{l/2}\sigma_{22}^\pm x_1 dx_1,$$

$$M = M^+ - \frac{1}{2}Qh = M^- + \frac{1}{2}Qh = \frac{1}{2}(M^+ + M^-).$$

Здесь l, h — длина и толщина прослойки; $\sigma_{22}^\pm, \sigma_{12}^\pm$ — нормальные и касательные напряжения на гранях $\xi^2 = \pm 1$ элементов прослойки. Вычисления велись до достижения предельного состояния, т.е. состояния, в котором деформирование прослойки происходит при неизменных P, Q, M. Полученные значения предельных нагрузок при растяжении со сдвигом и изгибе со сдвигом прослойки с $l/h = 10$ показаны крестиками на рис. 2. Здесь и ниже

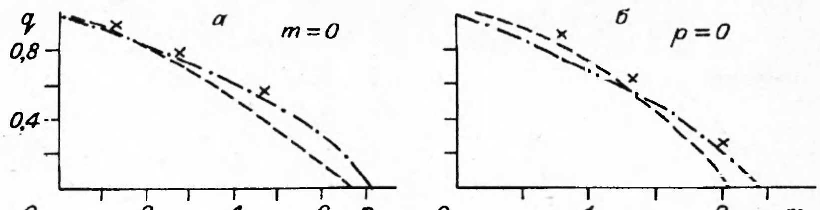

Рис. 2

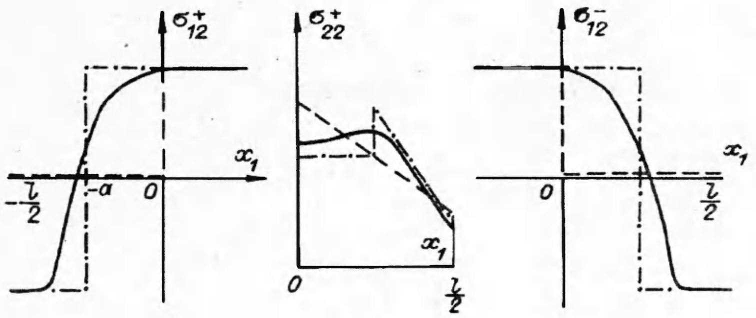

Рис. 3

$$q = \frac{Q}{\tau_* l}, \; p = \frac{P}{\tau_* l}, \; m = \frac{2M}{\tau_* l^2}.$$

Штриховые линии на рис. 2 — предельные нагрузки, соответствующие приближенным решениям Л.М. Качанова [1, 10].

На рис. 3 приведено распределение нормальных и касательных напряжений на поверхностях прослойки в предельном состоянии при растяжении со сдвигом. Сплошные линии — численное решение при $q = 0{,}51$, $p = 5{,}03$, штриховые — решение Л.М. Качанова при $q = 0{,}51$. Напряжения σ_{12}^{+} симметричны относительно $x_1 = 0$, и поэтому на рис. 3 приведено их распределение только при $x_1 \geqslant 0$.

На рис. 4 представлено распределение нормальных и касательных напряжений на поверхностях прослойки в предельном состоянии при изгибе со сдвигом. Сплошные линии — численное решение при $q = 0{,}62$, $m = 1{,}42$, штриховые — решение Л.М. Качанова [10] при $q = 0{,}62$. Графики касательных напряжений σ_{12}^{+}, σ_{12}^{-} симметричны относительно $x_1 = 0$ и поэтому на рис. 4 показаны лишь при $x_1 \leqslant 0$.

Штрихпунктирные линии на рис. 2,*a* и 3 соответствуют приближенному решению задачи о предельном состоянии прослойки при растяжении со сдвигом, полученному на основе уравнений

$$\text{(5.1)} \qquad \sigma_{12}^{\pm} = \mp \tau_*, \; h\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 2\tau_*, \; \sigma_{11}\Big|_{x_1 = -l/2} = 0, \; \sigma_{22} - \sigma_{11} = 2\tau_*$$

$$\text{при } -l/2 \leqslant x_1 \leqslant -a;$$

$$\text{(5.2)} \qquad \sigma_{12}^{+} = \sigma_{12}^{-} = \tau_*, \; \sigma_{22} = \sigma_{11}, \; \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = 0 \text{ при } -a \leqslant x_1 \leqslant 0.$$

Аналогично формулируются уравнения рассматриваемого приближенного решения при $0 \leqslant x_1 \leqslant l/2$. Напряжение σ_{11} считается непрерывным всюду в прослойке.

По этому решению

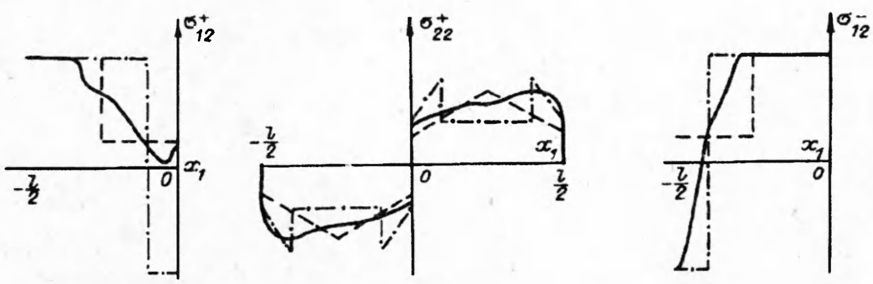

Рис. 4

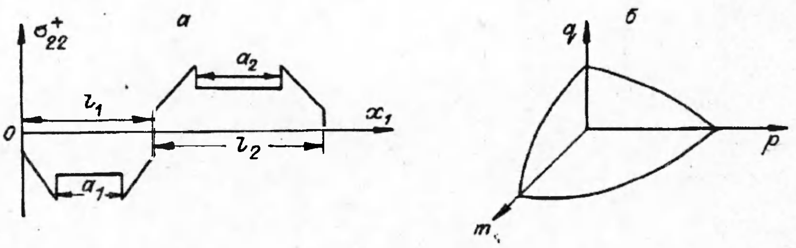

Рис. 5

(5.3) $$p = (1 - q)\left[2 + \frac{l}{2h}(1 + q)\right], \; m = 0.$$

Полагая, что в одной части прослойки реализуется предельное состояние сжатия со сдвигом, а в другой — предельное состояние растяжения со сдвигом (причем оба состояния описываются уравнениями вида (5.1), (5.2), и напряжение σ_{11} всюду в прослойке непрерывно), получим семейство приближенных решений задачи о предельном состоянии прослойки. Соответствующее этим решениям распределение нормальных напряжений на поверхности $\xi^2 = 1$ прослойки показано на рис. 5,*а*. При заданной длине l прослойки ($l = l_1 + l_2$) оно зависит от трех параметров: a_1, a_2, l_1. Зависимости m, p, q от этих параметров можно записать в виде

(5.4) $$q = \frac{a_1 + a_2}{l}, \; p = \frac{l_1 - l_2}{l}\left(2 + \frac{l}{2h}\right) - \frac{a_1 - a_2}{l}\left(2 + \frac{l}{2h}q\right),$$

$$m = 2\alpha(1 - \alpha)\left\{2 - \beta - \gamma + \frac{l}{4h}\left[1 - \alpha\beta^2 - (1 - \alpha)\gamma^2\right]\right\},$$

$$\frac{l_1}{l} = \alpha, \; \frac{l_2}{l} = 1 - \alpha, \; \frac{a_1}{l_1} = \beta, \; \frac{a_2}{l_2} = \gamma.$$

Согласно (5.4), в предельном состоянии при изгибе со сдвигом

(5.5) $$m = (1 - q)\left[1 + \frac{l}{8h}(1 + q)\right], \; p = 0.$$

Соотношение (5.5) между m, q и соответствующее ему распределение нормальных и касательных напряжений при $q = 0{,}62$, $m = 1{,}42$ представлены на рис. 2,*б* и 4 штрихпунктирными линиями.

Согласно (5.4), в предельном состоянии при растяжении с изгибом

(5.6) $$m = \left(1 + \frac{l}{8h}\right)\left[1 - \frac{p^2}{\left(2 + \frac{l}{2h}\right)^2}\right], \; q = 0.$$

Из численных экспериментов следует, что соотношение (5.6) между m и p при $l/h \geqslant 10$ хорошо соответствует предельным нагрузкам по уравнениям сформулированной модели деформирования прослоек.

В пространстве m, p, q уравнениям (5.4) отвечает семейство поверхностей (рис. 5,*б*), каждая из которых проходит через кривые (5.3), (5.5), (5.6). Полагая в (5.4) $a_1/a_2 = l_1/l_2$, получим

(5.7) $$m = \left[1 + \frac{l}{8h}(1 + q)\right]\left\{1 - q - \frac{p^2}{(1 - q)\left[2 + \frac{l}{2h}(1 + q)\right]^2}\right\}.$$

Уравнение (5.7) — одна из возможных простых аппроксимаций соотношения между m, p, q в предельном состоянии прямолинейной прослойки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. — М.: Гостехиздат, 1956.
3. Волчков Ю.М., Иванов Г.В., Кургузов В.Д. Об аппроксимации уравнений упругопластического деформирования // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1989. — Вып. 92.
4. Койтер В.Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М.: ИЛ, 1961.
5. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. — М.: Мир, 1979.
6. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А., Иванов Г.В. Итерационное решение задач для уравнения Пуассона методом самоуравновешенных невязок // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. — 1991. — Вып. 102.
7. Hennart J.P. A general family of nodal schemes // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, N 1.
8. Иванов Г.В. Расщепление задач упругости на основе минимизации функционала Лагранжа // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы IX Всесоюз. конф. — Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986.
9. Phillips T.N., Rose M.E. A finite difference scheme for the equilibrium equations of elastic bodies // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1986. — V. 7, N 1.
10. Качанов Л.М. Сдвиг и сжатие тонкого пластичного слоя // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. — 1963. — № 2.

г. Новосибирск *Поступила 10/1 1994 г.*

УДК 539.3

Ю.М. Волчков, Л.А. Дергилева, Г.В. Иванов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В ПЛОСКИХ ЗАДАЧАХ УПРУГОСТИ МЕТОДОМ СЛОЕВ

Рассматривается итерационное решение задач упругости на основе представления области, где ищется решение, в виде пакета слоев. Используются уравнения слоя [1—3], имеющие один и тот же порядок при любого вида условиях для смещений и напряжений на поверхностях слоя. В процессе итераций число слоев последовательно удваивается. В первом приближении область представляется в виде одного слоя.

В качестве примеров рассматриваются моделирование напряженного состояния вблизи разреза и краевые эффекты в напряженном состоянии упругих прослоек между жесткими плитами.

1. Уравнения слоя. Ниже используются уравнения слоя в первом приближении [1], при выводе которых уравнения плоской задачи теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad \sigma_{12} = a\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b\frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{22} = a\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

$$x_1 \in [0,L], \quad x_2 \in \left[x_2^0 - \frac{h_2}{2}, x_2^0 + \frac{h_2}{2}\right],$$

$$a_i^-\sigma_{i1} + b_i^-u_i = r_i^-, \ x_1 = 0, \ a_i^+\sigma_{i1} + b_i^+u_i = r_i^+, \ x_1 = L,$$

$$c_i^\pm\sigma_{i2} + d_i^\pm u_i = g_i^\pm, \ x_2 = x_2^0 \pm \frac{h_2}{2}, \ i,j = 1, 2$$

аппроксимируются уравнениями [1, 2]