УДК 539.4:622.023.23

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКОГО МАТЕРИАЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ СЖАТИИ

С. В. Сукнев

Институт горного дела Севера им. Н. В. Черского СО РАН, 677980 Якутск
E-mail: suknyov@igds.ysn.ru

Теоретически и экспериментально исследовано образование трещин отрыва в хрупком геоматериале с эллиптическим отверстием при сжатии в зависимости от угла наклона отверстия к оси нагружения. Проведено сравнение результатов расчета с полученными экспериментальными данными.

Ключевые слова: разрушение, геоматериалы, масштабный эффект, концентрация напряжений, отверстие, нелокальные критерии разрушения.

Введение. Для решения задачи о прочности твердого тела необходимо знать предельные характеристики материала, которые, вообще говоря, не являются константами материала и зависят от нагруженного объема. Масштабный эффект характерен для структурно-неоднородных материалов, в том числе геоматериалов и горных пород, и в наибольшей степени проявляется при концентрации напряжений, когда эффективный нагруженный объем определяется размером зоны концентрации напряжений, который мал по сравнению с характерными размерами деформируемого тела. В этих условиях традиционный подход к расчетам на прочность, который заключается в сопоставлении внутренних напряжений, возникающих в деформируемом теле, с некоторым предельным значением, имеет весьма ограниченную область применимости. Условие прочности имеет вид

$$\sigma_e < \sigma_0, \tag{1}$$

где $\sigma_e = f(\sigma_{ij})$; $\sigma_0 = \text{const}$. Эквивалентное напряжение σ_e характеризует внутреннее напряженное состояние тела и в общем случае является функцией компонент тензора напряжений σ_{ij}. Предельное напряжение σ_0 характеризует стандартные (осредненные) механические свойства тела и полагается константой материала. Наступлению предельного состояния (разрушению) соответствует знак равенства в выражении (1), а критическое номинальное напряжение σ_{cr}, при котором в той точке тела, где напряжения максимальны, достигается предельное состояние, определяется выражением

$$\sigma_{cr} = \sigma_0/K_t, \tag{2}$$

где K_t — коэффициент концентрации напряжений, характеризующий отношение эквивалентного напряжения в точке тела, где напряжения максимальны, к приложенному напряжению.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 25.

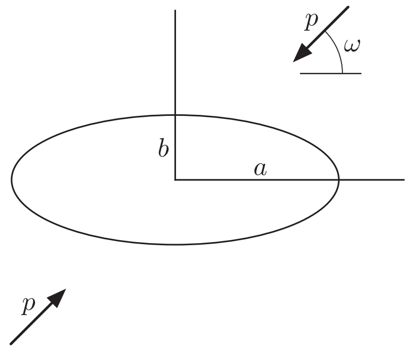

Рис. 1. Эллиптическое отверстие при сжатии

Поскольку традиционные критерии прочности не учитывают масштабный эффект, получили распространение нелокальные и градиентные критерии предельного состояния (см., например, [1–7]). Общим свойством нелокальных и градиентных критериев является введение новых феноменологических параметров, прежде всего размера элементов материала, характеризующих его структуру, что позволяет описать масштабный эффект при концентрации напряжений и тем самым расширить область применимости по сравнению с традиционными критериями.

В настоящей работе на примере задачи об образовании трещин отрыва в хрупком материале с эллиптическим отверстием при сжатии рассматривается проблема корректного определения феноменологических параметров градиентного критерия и приводятся результаты сравнения расчетных оценок критических нагрузок с полученными для модельного геоматериала экспериментальными данными.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропная однородная линейно-упругая пластина, изготовленная из хрупкого материала, к которой приложено равномерно распределенное на бесконечности сжимающее напряжение p. В центре пластины находится узкое эллиптическое отверстие, ориентированное под углом ω к направлению нагружения (рис. 1), a, b — длина большой и малой полуосей эллипса соответственно ($a \gg b$). Требуется определить критическое напряжение p_{cr}, при котором в пластине достигается предельное состояние (образование трещин отрыва на контуре отверстия). Осредненные механические свойства материала пластины характеризуются предельным напряжением σ_0, которое определяется при растяжении пластины без отверстия.

Как отмечено выше, область применимости традиционного подхода ограничена случаями, когда размер зоны концентрации напряжений настолько велик, что можно считать $\sigma_0 = \mathrm{const}$. Применительно к рассматриваемой задаче это означает, что выражение (2) может быть использовано лишь при углах наклона отверстия, близких к $90°$. С уменьшением ω размер зоны концентрации напряжений уменьшается, а погрешность определения критического напряжения по формуле (2) соответственно возрастает.

С целью расширения области применимости выражения (2) в работах [8–11] предложено использовать условие прочности (1) в точке максимума эквивалентного напряжения, находящейся не на границе отверстия, а на контуре, расположенном на некотором расстоянии от отверстия. В настоящее время такой подход рассматривается в рамках теории критических расстояний [7]. При этом возникает два вопроса: какова форма этого контура и на каком расстоянии от границы отверстия он находится? В работах [8, 10] в качестве контура используется окружность радиусом r с центром в точке максимума тангенциального напряжения на границе отверстия, а в работах [9, 11] — конфокальный эллипс с длиной большой полуоси $a+r$. Величина r подбирается исходя из наилучшего соответствия результатов расчета экспериментальным данным. Расчет критического напряжения проводился для задачи о прочности пластины при растяжении на основе различных критериев прочности: максимального тангенциального главного напряжения [10], максимального главного напряжения [10, 11], максимальной тангенциальной деформации [9, 10], минимума плотности энергии деформации [8, 10]. Сравнение результатов расчета σ_{cr} с экспериментальными данными не выявило преимуществ ни одного из перечисленных критериев [10].

В другом подходе, представленном в работах [4, 12], гипотеза $\sigma_0 = \mathrm{const}$ не используется и в явном виде учитывается масштабный фактор при оценке локальной прочности. Условие прочности записывается в виде

$$\sigma_e < f(\sigma_0, L_0/L_e), \tag{3}$$

а критическое напряжение определяется выражением $p_{cr} = \min\{f(\sigma_0, L_0/L_e)/(\sigma_e/p)\} > 0$, где L_0 — характерный размер элемента структуры материала; L_e — характерный размер деформируемой области. Отношение L_0/L_e характеризует масштабный фактор в рассматриваемой задаче. При концентрации напряжений величина L_e определяется размером зоны неоднородности напряжений. Если этот размер достаточно велик по сравнению с размерами структурных составляющих материала включая допустимые дефекты структуры (т. е. выполняются условия осреднения механических свойств), то величина локальной прочности незначительно отличается от величины предельного напряжения σ_0, определенной в условиях однородного распределения напряжений. Наоборот, если размер L_e сопоставим с размерами структурных элементов, их влияние на локальную прочность становится существенным, причем оно тем больше, чем меньше отношение L_e/L_0.

Для оценки величины L_0 используется критический размер дефекта l_{cr}, а для оценки L_e — 1/2 радиуса кривизны ρ концентратора в опасной точке. С учетом выполненных оценок функция локальной прочности для базовой задачи о симметричном растяжении пластины с эллиптическим отверстием ($\omega = 0$, 90°) имеет вид [4]

$$f(\sigma_0, L_0/L_e) = \sigma_0(1 + (2l_{cr}/\rho)^n), \tag{4}$$

причем для любых материалов $n = 0{,}5$. При растяжении данное значение показателя n обеспечивает связь критерия (3) с уравнениями линейной механики разрушения трещины нормального отрыва [1]. Далее функция (4) распространяется на случай деформирования при произвольных углах $0^\circ \leqslant \omega \leqslant 90^\circ$ и значениях геометрического параметра $0 \leqslant m < 1$, $m = (a - b)/(a + b)$ как при растяжении, так и при сжатии, при этом полагается, что в обоих случаях процесс разрушения определяется нормальными напряжениями по механизму отрыва, т. е. $\sigma_e = \sigma_\theta$, $\sigma_\theta > 0$, где σ_θ — тангенциальное напряжение на контуре отверстия.

Однако в работе [5] показано, что при сжатии показатель n не является константой и зависит от свойств материала. В соответствии с [5] при $\omega = 0$ критическое давление определяется по формуле

$$p_{cr} = T_0[1 + \alpha(L_{cr}/L_e)^n], \qquad L_e > L_{cr}. \tag{5}$$

Здесь $L_{cr} = L_0\alpha^{-1/n}$ — критическое значение размера зоны концентрации напряжений, ниже которого трещины отрыва не образуются; $\alpha = C_0/T_0 - 1$; T_0 — прочность на растяжение; C_0 — прочность на сжатие. Размер L_e зависит от размеров отверстия:

$$L_e = (2/b + 3/\rho)^{-1}, \tag{6}$$

поэтому, прежде чем решать поставленную задачу, помимо прочностных свойств в независимых экспериментах необходимо определить константы материала L_{cr} и n.

Исследование включает следующие этапы.

1. По результатам испытаний на одноосное сжатие плоских образцов, содержащих круговые отверстия различного диаметра, с использованием аппроксимации зависимости (5) определяются константы материала L_{cr} и n.

2. Для заданного угла ω осуществляется поиск опасной точки на контуре эллиптического отверстия и рассчитывается критическое напряжение

$$p_{cr} = \min\Big\{T_0\,\frac{1+\alpha(\rho_{cr}/\rho_\theta)^n}{\sigma_\theta/p}\Big\} \tag{7}$$

($\rho_{cr} = 3L_{cr}$; ρ_θ — радиус кривизны эллиптического контура в рассматриваемой точке). В (7) принято (с учетом выражения (6)), что для узкого эллипса $L_e = \rho_\theta/3$.

3. В ходе испытаний на одноосное сжатие плоских образцов, содержащих эллиптические отверстия, ориентированные под различными углами ω, определяются критические напряжения p_{cr}, которые затем сравниваются со значениями, вычисленными на предыдущем этапе.

2. Экспериментальное исследование образования трещин отрыва в образцах с круговыми отверстиями при сжатии. В качестве модельного материала использовался дигидрат сульфата кальция (двухводный гипс) $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, приготовленный из водного раствора строительного гипса. Концентрация полуводного гипса в исходном составе составляла более 90 %. Исследование образования трещин отрыва в зонах концентрации растягивающих напряжений проводилось для образцов, содержащих центральные круговые отверстия различного диаметра и подвергаемых одноосному сжатию. Образцы представляли собой квадратные плиты размером $200 \times 200 \times 30$ мм. Диаметр отверстия изменялся в интервале от 3,5 до 25,0 мм. Было испытано от 10 до 19 образцов с отверстиями различного диаметра. На контуре отверстия располагались графитовые датчики электропроводимости. Регистрация трещин отрыва осуществлялась по диаграммам изменения электропроводимости (ЭП) графитовых датчиков в процессе нагружения образца. Методика проведения эксперимента описана в работе [13].

На рис. 2 приведены типичные диаграммы ЭП, полученные при испытании образцов (I — сигнал с датчика, t — время нагружения). Два датчика располагались симметрично на верхнем и нижнем участках контура отверстия. Диаграмма состоит из четырех характерных областей. Момент образования трещины, которое имело внезапный характер, определялся на границе областей II и III диаграмм. Возникновению макротрещины

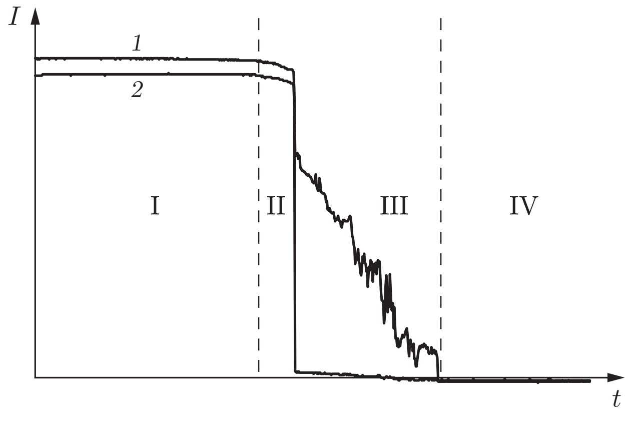

Рис. 2. Диаграммы ЭП при образовании трещин отрыва:
1 — верхний датчик, *2* — нижний датчик; I — область нагружения, II — область предразрушения, III — область распространения трещины, IV — область разрушения

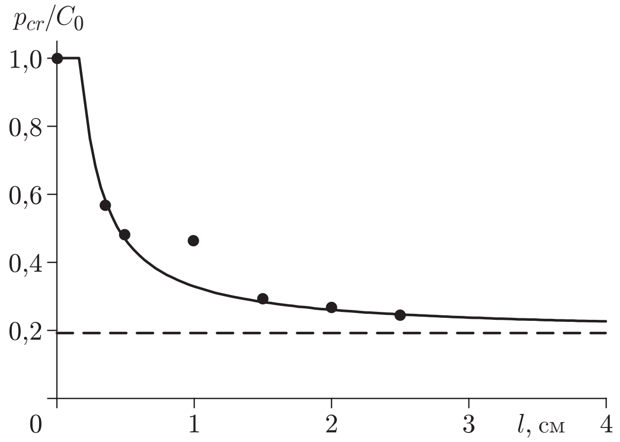

Рис. 3. Зависимость критического давления от диаметра отверстия:
точки — экспериментальные данные, сплошная линия — результаты расчета по формуле (5), штриховая — результаты расчета при $L_{cr} = 0$

предшествует формирование зоны предразрушения (область II), в которой происходит образование и накопление микротрещин.

Протяженность трещин в момент их образования составляла $5 \div 6$ см. С увеличением диаметра отверстия критическое давление, при котором образуются трещины, уменьшалось. Дальнейшее развитие трещин приводило к разрушению образца путем раскалывания на две части.

Предел прочности на сжатие определялся для образцов, имеющих такие же размеры, как и у образцов с отверстиями. В экспериментах значение C_0 составило 10 МПа. Предел прочности на растяжение T_0 определялся непосредственно в экспериментах при испытании на разрыв образцов с минимальным поперечным сечением размером 27×25 мм. Использовались специальные захваты, обеспечивавшие равномерное нагружение образца. Во всех образцах наблюдался хрупкий характер разрушения в результате внезапного распространения трещины отрыва в плоскости, перпендикулярной оси нагружения. В экспериментах значение T_0 составило 1,9 МПа.

На рис. 3 представлена экспериментальная зависимость величины нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия от его диаметра l (точки), а также результаты расчета критического давления (сплошная кривая) по формуле (5), в которой размер $L_e = 0{,}1l$ определен по формуле (6). Штриховая прямая построена согласно традиционному подходу ($L_{cr} = 0$). Экспериментальные данные показывают, что влияние диаметра отверстия на локальную прочность материала (масштабный эффект) является существенным. С уменьшением диаметра отверстия критическое давление увеличивается, достигая предела прочности на сжатие, а с его увеличением асимптотически приближается к пределу прочности на растяжение. Экспериментальные данные достаточно точно описываются градиентным критерием (3). Значения параметров критерия равны $L_{cr} = 0{,}17$ мм, $n = 1$.

3. Расчет критического давления для узкого эллипса. Следуя (7), с учетом известного выражения для тангенциального напряжения σ_θ на контуре эллиптического отверстия (считается, что приложенное сжимающее напряжение $p > 0$) [14]

$$\sigma_\theta = -p\,\frac{1 - m^2 + 2m\cos 2\omega - 2\cos(2\theta - 2\omega)}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta},$$

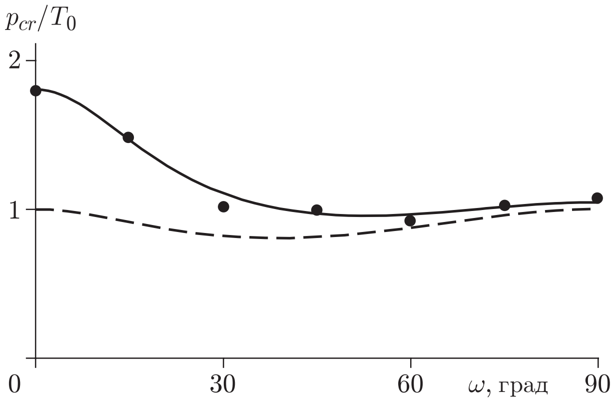

Рис. 4. Зависимость критического давления от угла наклона отверстия:
точки — экспериментальные данные, сплошная линия — результаты расчета по формуле (8), штриховая — результаты расчета при $\rho_{cr} = 0$

а также выражения для радиуса кривизны контура

$$\rho_\theta = a\frac{(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta)^{3/2}}{(1 + m)^2(1 - m)}$$

задача определения p_{cr} для материала с $n = 1$ сводится к нахождению минимума

$$p_{cr} = \min\Big(- T_0\, \frac{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta + (\alpha\rho_{cr}/a)(1 + m)^2(1 - m)(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta)^{-1/2}}{1 - m^2 + 2m\cos 2\omega - 2\cos(2\theta - 2\omega)}\Big),$$
$$p_{cr} > 0. \tag{8}$$

Варьируемым параметром в выражении (8) является угол θ, удовлетворяющий уравнению

$$A - B\sin 2\theta - C\cos 2\theta - F(\theta) = 0, \tag{9}$$

где

$$A = 2m\sin 2\omega, \qquad B = (1 - m^2)(m - \cos 2\omega), \qquad C = (1 + m^2)\sin 2\omega,$$
$$F(\theta) = -(\alpha\rho_{cr}/\rho_\theta)[0{,}5m\sin 2\theta\,(1 - m^2 + 2m\cos 2\omega - 2\cos(2\theta - 2\omega)) + {} + (1 + m^2 - 2m\cos 2\theta)\sin(2\theta - 2\omega)].$$

Уравнение (9) будем решать методом последовательных приближений:

$$A - B\sin 2\theta^{(k)} - C\cos 2\theta^{(k)} = F(\theta^{(k-1)}), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где

$$\sin 2\theta^{(k)} = \frac{A^{(k)}B + C\sqrt{B^2 + C^2 - (A^{(k)})^2}}{B^2 + C^2}, \quad \cos 2\theta^{(k)} = \frac{A^{(k)}C - B\sqrt{B^2 + C^2 - (A^{(k)})^2}}{B^2 + C^2},$$
$$A^{(k)} = A - F(\theta^{(k-1)}), \qquad A^{(0)} = A.$$

При $\alpha\rho_{cr} < \rho_\theta$ итерационный процесс (10) быстро сходится, обеспечивая необходимую точность определения критического напряжения. На рис. 4 приведены результаты расчета критического давления по формуле (8) (сплошная кривая) для эллипса с размерами $a = 12{,}5$ мм, $\rho = b^2/a = 1{,}9$ мм и параметров материала $\alpha = 3$, $\rho_{cr} = 0{,}51$ мм. Штриховая кривая построена при $\rho_{cr} = 0$.

4. Экспериментальное исследование образования трещин отрыва в образцах с эллиптическими отверстиями при сжатии. Проведено исследование образования трещин отрыва в зонах концентрации растягивающих напряжений для образцов, содержащих отверстия в виде узкой щели длиной 25 мм и шириной 3,8 мм с закругленными краями (параметры “эквивалентного” эллипса — $a = 12{,}5$ мм, $\rho = 1{,}9$ мм). Угол наклона щели к оси нагружения ω (см. рис. 1) варьировался в диапазоне от 0 до 90° с шагом, равным 15°. Образцы изготавливались из того же материала, что и образцы с круговыми отверстиями, испытанные ранее. Было испытано от 9 до 18 образцов каждого типа. Прочностные характеристики испытанной партии образцов: $T_0 = 2$ МПа, $C_0 = 8$ МПа. Регистрация трещин отрыва осуществлялась по методике, описанной выше. На рис. 4 представлены экспериментальные данные (точки) о величине нагрузки в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия в зависимости от угла ω. Из рис. 4 следует, что результаты расчета критического давления по формуле (8) хорошо согласуются с полученными экспериментальными данными.

Заключение. Для решения задачи об образовании трещин отрыва в пластине с эллиптическим отверстием при сжатии разработана расчетно-экспериментальная методика, включающая экспериментальное определение феноменологических параметров градиентного критерия разрушения, поиск опасной точки на контуре отверстия и расчет величины критического давления. Расчет p_{cr} проведен методом последовательных приближений на основе градиентного подхода с учетом предварительно выполненных оценок параметров критерия L_0, L_e и экспериментально определенных констант материала L_{cr}, n. Экспериментальное исследование процессов инициации и развития разрушения в образцах геоматериалов с отверстием при сжатии выполнено по оригинальной методике с использованием графитовых датчиков электропроводимости. Получены новые экспериментальные данные об образовании трещин отрыва в модельном геоматериале с концентратором напряжений при сжатии. Построены зависимости критического давления от диаметра кругового отверстия и угла наклона эллиптического отверстия. На основе разработанной методики с использованием полученных экспериментальных данных проведены анализ и сравнение результатов расчета критической нагрузки, которые показали, что расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Леган М. А.** О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 4. С. 146–154.
2. **Seweryn A., Mroz Z.** A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading // Engng Fract. Mech. 1995. V. 51, N 6. P. 955–973.
3. **Mikhailov S. E.** A functional approach to non-local strength condition and fracture criteria // Engng Fract. Mech. 1995. V. 52, N 4. P. 731–754.
4. **Сукнев С. В.** О применении градиентного подхода к оценке локальной прочности // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 222–228.
5. **Сукнев С. В., Новопашин М. Д.** Критерий образования трещин отрыва в горных породах при сжатии // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2003. № 2. С. 30–37.
6. **Смирнов В. И.** Структурный подход в задачах предельного равновесия хрупких тел с концентраторами напряжений // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 162–172.
7. **Taylor D.** The theory of critical distances. Oxford: Elsevier, 2007.
8. **Kipp M. E., Sih G. C.** The strain energy density failure criterion applied to notched elastic solids // Intern. J. Solids Structures. 1975. V. 11, N 2. P. 153–173.

9. **Wu H.-C., Chang K.-J.** Angled elliptic notch problem in compression and tension // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1978. V. 45, N 2. P. 258–262.
10. **Maiti S. K., Smith R. A.** Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress-strain field. 1. Slit and elliptical cracks under uniaxial tensile loading // Intern. J. Fract. 1983. V. 23, N 4. P. 281–295.
11. **Yeh H.-Y., Kim C. H.** Fracture mechanics of the angled elliptic crack under uniaxial tension // Engng Fract. Mech. 1995. V. 50, N 1. P. 103–110.
12. **Сукнев С. В.** Оценка прочности пластины с эллиптическим отверстием при растяжении и сжатии // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 3. С. 163–168.
13. **Сукнев С. В., Елшин В. К., Новопашин М. Д.** Экспериментальное моделирование процессов трещинообразования в образцах горных пород с отверстием // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2003. № 5. С. 47–54.
14. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1984. Т. 2.

Поступила в редакцию 21/IX 2012 г.