8. **Голдстейн М. Д.** Аэроакустика.— М.: Машиностроение, 1981.
9. **Сухинин С. В.** Эоловы колебания около периодической решетки пластин // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1986.— Вып. 77.
10. **Шестопалов В. П., Кириленко А. А., Масалов С. А., Сиренко Ю. А.** Резонансное рассеяние волн. Т. 1. Дифракционные решетки.— Киев: Наук. думка, 1986.
11. **Гарипов Р. М.** Неустановившиеся волны над подводным хребтом // ДАН СССР.— 1965.— Т. 161, № 3.
12. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
13. **Биченков Е. И., Гарипов Р. М.** Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном // ПМТФ.— 1969.— № 2.
14. **Налимов В. И., Плотников П. И.** Нерегулярные задачи на собственные значения и эффект волновода // Динамика сплошной среды.— Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1973.— Вып. 23.
15. **Селезов И. Т., Яковлев В. В.** Дифракция волн на симметричных неоднородностях.— Киев: Наук. думка, 1978.
16. **Бабич В. М., Билый И. Я.** О волноводных свойствах подводного горного хребта // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 3.
17. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: ОГИЗ, 1947.
18. **Ле Блон П., Майсек Л.** Волны в океане.— М.: Мир, 1981.— Т. 1, 2.
19. **Steinberg S.** Meromorphic families of compact operators // Arch. Rat. Mech. Anal.— 1968.— V. 31, N 5.

Поступила 9/II 1988 г.,
в окончательном варианте — 5/III 1988 г.

УДК 532.516 : 536.24.01

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОМ ЦИЛИНДРЕ, ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ И ПЛОСКОМ СЛОЯХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

В. К. Андреев, А. А. Родионов, Е. А. Рябицкий

(Красноярск)

В условиях невесомости имеют место ситуации, когда не только внешние силы, но и силы самогравитации являются настолько слабыми, что не могут вызвать конвективного движения. Однако конвекция может возникнуть вследствие того, что коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры.

Изучению условий возникновения конвекции в жидкости при нагревании твердой или свободной поверхности посвящены работы [1—4]. В настоящей работе исследуется устойчивость равновесного состояния, которое возникает в жидком цилиндре, цилиндрическом и плоском слоях под действием постоянных внутренних источников тепла. Получены явные формулы для критических чисел Марангони. Показано, что учет деформации свободной поверхности приводит к понижению устойчивости и появлению разрыва нейтральной кривой. Кроме того, равновесное состояние плоского слоя более устойчиво, чем в аналогичной задаче Пирсона [1].

1. Жидкий цилиндр. Пусть внутри покоящегося жидкого цилиндра имеются постоянные внутренние источники тепла интенсивности q. Тогда равновесное состояние описывается формулами

$$u = v = w = 0,\ p = \mathrm{const},\ \Theta(r) = -qr^2/(4\chi) + \mathrm{const}. \tag{1.1}$$

Здесь (u, v, w) — компоненты вектора скорости в цилиндрической системе координат (r, φ, z); p — давление; Θ — температура; $\chi = \mathrm{const}$ — коэффициент температуропроводности жидкости.

Выберем в качестве характерных масштабов длины, скорости, давления и температуры величины b, ν/b, $\rho\nu^2/b^2$ и $\nu\gamma b/\chi$ (b — радиус цилиндра, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность жидкости, $\gamma = -\Theta_r(b) = qb/2\chi$). Уравнения малых возмущений произвольного термокапиллярного движения в цилиндрических координатах получены в [5]. Полагая эти возмущения зависящими от φ, z, t по закону $\exp\,[i(m\varphi + \alpha z - \alpha i Ct)]$, получим амплитудные уравнения для равновесного состояния (1.1):

$$\mu U + P' = \left[\frac{1}{\xi}(\xi U)'\right]' - \frac{2im}{\xi^2}V; \tag{1.2}$$

$$(1.3)\qquad \mu V + \frac{im}{\xi}P = \left[\frac{1}{\xi}(\xi V)'\right]' + \frac{2im}{\xi^2}U;$$

$$(1.4)\qquad \mu W + i\alpha P = \frac{1}{\xi}(\xi W')';$$

$$(1.5)\qquad (\xi U)' + imV + i\alpha\xi W = 0;$$

$$(1.6)\qquad \mu T - \xi U = \frac{1}{\xi}(\xi T')' \quad (0 < \xi < 1);$$

$$(1.7)\qquad V' - \frac{V}{\xi} + \frac{im}{\xi}U = -\frac{im}{\xi}\mathrm{Ma}(T + \Theta_0' R);$$

$$(1.8)\qquad i\alpha U + W' = -i\alpha\,\mathrm{Ma}(T + \Theta_0' R);$$

$$(1.9)\qquad -i\alpha CR = U;$$

$$(1.10)\qquad -P + 2U' = \mathrm{We}(1 - \alpha^2 - m^2)R - \mathrm{Ma}(T + \Theta_0' R);$$

$$(1.11)\qquad T' + \mathrm{Bi}\,T + (\Theta_0'' + \mathrm{Bi}\,\Theta_0')R = 0 \quad (\xi = 1);$$

$$(1.12)\qquad |U|,\ |V|,\ |W|,\ |P|,\ |T| < \infty \ (\xi = 0),$$

где U, V, W, P, T — возмущения компонент вектора скорости, давления и температуры; R — отклонение границы по нормали от ее невозмущенного состояния; $r = b$; $\xi = r/b$; $\Theta_0 = \chi\Theta/\nu\gamma b$; $\mu = \alpha^2 + m^2/\xi^2 - i\alpha C$; $\mathrm{Ma} = \gamma\varkappa b^2/\rho\nu\chi$ — число Марангони; $\varkappa = -d\sigma/d\Theta = \mathrm{const} > 0$ — температурный коэффициент поверхностного натяжения, так что $\sigma = \sigma_0 - \varkappa(\Theta - \Theta(b))$; $\mathrm{We} = b\sigma_0/\rho\nu\chi$ — число Вебера; α — волновое число вдоль оси z; m — спектральная мода по углу φ; C — комплексный параметр; Bi — число Био; $\Theta_0'(1) = \Theta_0''(1) = -1$; штрих означает дифференцирование по ξ.

Примем принцип монотонности возмущений так, что граница устойчивости определяется значениями $C = 0$ в (1.2) — (1.4), (1.6), (1.9). Условие существования нетривиального решения задачи позволяет найти критическое значение $\mathrm{Ma}(\alpha, m, \mathrm{We}, \mathrm{Bi})$, при котором теряется устойчивость равновесия.

Рассмотрим вначале осесимметрические возмущения ($m = 0$). Задача для функции V отделяется и не содержит Ma. После исключения W и P получаем для функции U задачу

$$(1.13)\qquad L^2U = 0 \quad (0 < \xi < 1),\ L = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} - \left(\alpha^2 + \frac{1}{\xi^2}\right);$$

$$(1.14)\qquad U(1) = 0,\ U''(1) + U'(1) = -\alpha^2\,\mathrm{Ma}\,[T(1) - R];$$

$$(1.15)\qquad U'''(1) + 2U''(1) - (1 - 3\alpha^2)U'(1) + \alpha^2\,\mathrm{We}(1 - \alpha^2)R + \alpha^2\,\mathrm{Ma}\,[T(1) - R] = 0;$$

$$(1.16)\qquad U(0) < \infty,\ (\xi U)'/\xi < \infty.$$

Введем функцию $\psi(\xi)$ такую, что

$$L^2\psi = 0\ (0 < \xi < 1),\ \psi(0) < \infty,\ (\xi\psi)'/\xi < \infty,$$
$$\psi(1) = \psi''(1) + \psi'(1) - 1 = 0.$$

Решение последней задачи имеет вид

$$(1.17)\qquad \psi(\xi) = -\frac{I_2(\alpha)}{2\alpha I_1^2(\alpha)}I_1(\alpha\xi) + \frac{\xi I_2(\alpha\xi)}{2\alpha I_1(\alpha)}$$

($I_{1,2}(x)$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода). Из (1.13), (1.14), (1.16) получаем, что $U = -\alpha^2\,\mathrm{Ma}[T(1) - R]\,\psi(\xi)$. Возмущение температуры T находится из решения краевой задачи (1.6), (1.11), (1.12) и $T(1) = f(\alpha)R$ с известной функцией $f(\alpha)$. Используя эти соотношения, а также свойства функций Бесселя, из граничного условия (1.15) найдем представление

$$(1.18)\qquad \mathrm{Ma} = \frac{(1 - \alpha^2)(\alpha s + \mathrm{Bi})}{(\alpha^2 - 1)F(\alpha, s) + G(\alpha, s)\,\mathrm{We}^{-1}\mathrm{Pr}^{-1}},$$

где $s = \frac{I_1(\alpha)}{I_0(\alpha)}$; $F = \frac{\alpha}{12}\left(\frac{1}{s} - s\right) - \frac{1}{6\alpha} s - \frac{1}{12}$; $G = \frac{2}{s^2}(1 - \alpha s)(\alpha^2 - \alpha^2 s^2 + s^2 - \alpha s)$.

Для азимутальных возмущений $\alpha = 0$ и задача на W отделяется. Легко видеть, что $W \equiv 0$. Возмущение давления удовлетворяет уравнению $P'' + P'/\xi + m^2 P/\xi^2 = 0$, следующему из (1.2), (1.3) и (1.5). С учетом условия $P(0) < \infty$ функция $P = C_1 \xi^m$ ($C_1 = \text{const}$) и уравнения (1.2), (1.3) примут вид $U'' + U'/\xi - (m^2 + 1)U/\xi^2 - 2imV/\xi^2 = C_1 m \xi^{m-1}$, $V'' + V'/\xi - (m^2 + 1)V/\xi^2 + 2imU/\xi^2 = C_1 im \xi^{m-1}$. Решение этой системы запишем как

$$U = \frac{1}{4}(C_1 + 2C_2)\xi^{m+1} + \frac{1}{2} C_3 \xi^{m-1},$$

$$V = -\frac{i}{4}(2C_2 - C_1)\xi^{m+1} + \frac{i}{2} C_3 \xi^{m-1}, \quad C_2, C_3 = \text{const}.$$

Для возмущения температуры находим

$$T = C_4 \xi^m - \frac{C_1 + 2C_2}{32m + 64}\xi^{m+4} - \frac{C_3}{8m + 8}\xi^{m+2}, \quad C_4 = \text{const}.$$

Из уравнения неразрывности (1.5) вытекает связь между постоянными C_1, C_2: $C_1 = -2(m + 1)C_2$. Подстановка явных выражений для U, V, P, T в граничные условия (1.7), (1.9)—(1.11) позволяет определить критическое значение Ma:

$$\text{Ma}(m) = \frac{8(m+1)(m+2)(m+\text{Bi})}{m + 16(m+2)\text{We}^{-1}} \quad (m \neq 1). \tag{1.19}$$

Ясно, что

$$\min_m \text{Ma}(m) = \text{Ma}(2) = \frac{48(\text{Bi} + 2)}{1 + 32\,\text{We}^{-1}}. \tag{1.20}$$

При $m = 1$ и $\alpha = 0$ решение задачи (1.2)—(1.12) имеет вид $W = 0$, $U = V = P = 0$, $T = C_4\xi$, $R = C_4$, что отвечает смещению свободной поверхности без деформации в плоскости $z = \text{const}$. Если же сразу предполагать поверхность недеформируемой, то решение этой задачи нетривиально и $\text{Ma} = 48(1 + \text{Bi})$. Оно формально получается из (1.19) при $m = 1$ и $\text{We} = \infty$.

В общем случае с помощью уравнения неразрывности (1.5) исключим функцию W и будем искать решение полученной задачи в форме

$$U = \gamma\varphi(\xi), \quad V = \gamma\psi(\xi), \quad P = \gamma f(\xi) \tag{1.21}$$

($\gamma = \text{Ma}[T(1) + \Theta_0'(1)R]$). Функция $f = C_1 I_m(\alpha\xi)$ ($C_1 = \text{const}$), а $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ удовлетворяют системе

$$\varphi'' + \frac{1}{\xi}\varphi' - \left(\alpha^2 + \frac{m^2+1}{\xi^2}\right)\varphi - \frac{2im}{\xi^2}\psi = C_1 I_m'(\alpha\xi),$$

$$\psi'' + \frac{1}{\xi}\psi' - \left(\alpha^2 + \frac{m^2+1}{\xi^2}\right)\psi + \frac{2im}{\xi^2}\varphi = \frac{im}{\xi} C_1 I_m(\alpha\xi),$$

которая решена в [6]. Найденное там решение можно записать в более простом виде

$$\varphi = \frac{C_2}{2} I_{m+1}(\alpha\xi) + \frac{C_3}{2} I_{m-1}(\alpha\xi) + \frac{C_1}{2}\xi I_m(\alpha\xi), \tag{1.22}$$

$$\psi = -\frac{iC_2}{2} I_{m+1}(\alpha\xi) + \frac{iC_3}{2} I_{m-1}(\alpha\xi)$$

с постоянными C_2, C_3.

Возмущение температуры находится из (1.6)

$$T = C_4 I_m(\alpha\xi) - \int_0^\xi \tau^2 U(\tau) D(\alpha\xi, \alpha\tau)\,d\tau, \tag{1.23}$$

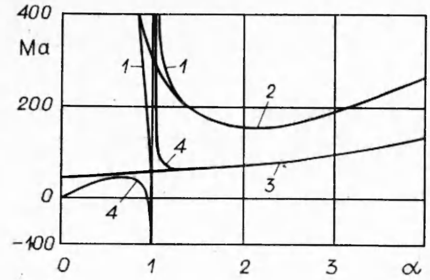

Рис. 1

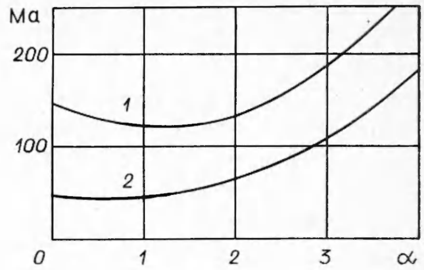

Рис. 2

где $D = I_m(\alpha\xi)K_m(\alpha\tau) - K_m(\alpha\xi)I_m(\alpha\tau)$; K_m — модифицированная функ ция Бесселя 2-го рода; $C_4 = \text{const}$.

После подстановки (1.21), (1.23) в граничные условия (1.10), (1.11

$$\text{(1.24)} \qquad \mathrm{Ma}(\alpha, m) = \frac{(1-\alpha^2-m^2)\left[\alpha I_m'(\alpha) + \mathrm{Bi}\, I_m(\alpha)\right]}{(1-\alpha^2-m^2)F_m + G_m \mathrm{We}^{-1}}$$

$$\left(F_m = \int\limits_0^1 \tau^2\varphi(\tau)\, I_m(\alpha\tau)\, d\tau,\ G_m = \left[I_m(\alpha) - \alpha I_m'(\alpha)\right]\left[2\varphi'(1) - C_1 I_m(\alpha) + 1\right]\right)$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий (1.7)—(1.9) которые с учетом (1.21) перепишутся в виде $\varphi(1) = 0$, $\varphi''(1) + \varphi'(1) = -\alpha^2 - m^2$, $\psi'(1) - \psi(1) = -im$.

Заметим, что $\lim\limits_{\alpha\to 0} \mathrm{Ma}(\alpha, m) = \mathrm{Ma}(m)$, где $\mathrm{Ma}(m)$ определяется из (1.19) Были проведены численные расчеты по формулам (1.18), (1.24). В послед нем случае $m = 1$, интеграл вычисляется явно через функции Бессел $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha)$. Эти формулы довольно громоздкие и здесь не приводятся

Для осесимметрических возмущений ($m = 0$) зависимость Ma от вол нового числа α дана на рис. 1. Кривые *2*, *3* отвечают случаю недеформируе мой свободной границы, когда $\mathrm{We} = \infty$. Минимальное критическое числ Марангони $\mathrm{Ma}_к = 48$ для $\mathrm{Bi} = 0$ (кривая *3*) и $\alpha_к = 0$. Интересно отметить что, согласно (1.20), при тех же значениях параметров минимальное Ma для азимутальных возмущений также равно 48. Если $\mathrm{Bi} = 2$ (крива *2*), то $\mathrm{Ma}_к = 178{,}7$ при $\alpha_к = 2{,}1$. С увеличением теплоотдачи минимально $\mathrm{Ma}_к$ возрастает.

Если $\mathrm{We} \neq \infty$, то знаменатель в формуле (1.18) может обратитьс в нуль при некотором α^*. В частности, для $\mathrm{We} = 10^4$ график $\mathrm{Ma}(\alpha)$ имее вертикальную асимптоту при $\alpha^* = 1{,}006$, $\mathrm{Ma}(\alpha) \leqslant 0$ при $\alpha \in [1, \alpha^*$ и $\mathrm{Ma}(\alpha) \to -\infty$ при $\alpha \to \alpha^* - 0$. Для $\mathrm{Bi} = 0$ (кривая *4*) функция $\mathrm{Ma}(\alpha$ на интервале $0 \leqslant \alpha < \alpha^*$ достигает положительного максимума 48,8 при $\alpha = 0{,}8$, а для $\alpha > \alpha^*$ — положительного минимума $\mathrm{Ma}_к = 57{,}7$ при $\alpha_к = 1{,}2$. Если же $\mathrm{Bi} = 2$ (кривая *1*), $\mathrm{Ma}_к = 178{,}7$ при $\alpha_к = 2{,}1$.

Заметим, что для $\mathrm{We} \to \infty$ кривые $\mathrm{Ma}(\alpha)$ сливаются. Кроме того $\mathrm{Ma}(1) = 0$ при всех $\mathrm{We} \neq \infty$ и при больших α $\mathrm{Ma}(\alpha) \sim 8\alpha(\alpha + \mathrm{Bi})$, когда $\mathrm{We} = \infty$. Точно такая же асимптотика получается и для азимутальных возмущений. Это следует из формул (1.19) при $m \to \infty$ ($\mathrm{We} = \infty$). Аналогичная асимптотика справедлива и для равновесия плоского слоя, ограниченного свободными поверхностями [3].

В случае $m = 1$ все кривые $\mathrm{Ma}(\alpha, 1)$, определяющие границу устойчивости, имеют минимум, разрывы отсутствуют и графики для $\mathrm{We} = \infty$ и 10^4 практически неразличимы. На рис. 2 кривая *2* соответствует теплоизолированной границе $\mathrm{Bi} = 0$ и минимальное значение равно 47,38 при $\alpha = 0{,}66$, $\mathrm{Ma}(0, 1) = 48$. При увеличении теплоотдачи минимум смещается в сторону коротких волн и для $\mathrm{Bi} = 2$ (кривая *1*) он равен 124,1, когда $\alpha = 1{,}27$, $\mathrm{Ma}(0, 1) = 144$. Кривые $\mathrm{Ma}(\alpha, m)$ для фиксированного $m \geqslant 2$ и $\mathrm{We} = \infty$ расположены над кривыми $\mathrm{Ma}(\alpha, 1)$. Поэтому, сравнивая рис. 1 и 2, заключаем, что наиболее опасны такие возмущения, когда $m = 1$.

2. Цилиндрический слой жидкости. Предположим, что жидкость расположена на твердой цилиндрической поверхности $r = a$ и занимает область $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Равновесное состояние, удовлетворяющее условию теплоизоляции на внутреннем цилиндре $0 \leqslant r \leqslant a$, запишем в виде

$$u = v = w = 0, \; p = \text{const}, \; \Theta(r) = \frac{qa^2}{2\chi} \ln \frac{r}{b} - \frac{q}{4\chi} r^2 + \text{const}. \tag{2.1}$$

В задаче о малых возмущениях (1.2)—(1.12) изменится лишь уравнение (1.6):

$$\mu T + \left(\frac{d^2}{\xi} - \xi\right) U = \frac{1}{\xi} (\xi T')' \quad (d < \xi < 1), \tag{2.2}$$

где $d = a/b < 1$, а вместо условий ограниченности (1.12) появятся условия прилипания и теплоизоляции на внутреннем цилиндре

$$U = V = W = T' = 0 \; (\xi = d). \tag{2.3}$$

Кроме того, в граничных условиях (1.7), (1.8), (1.10), (1.11) необходимо положить $\Theta_0'(1) = d^2 - 1$, $\Theta_0''(1) = -(d^2 + 1)$.

Здесь для осесимметрических возмущений вместо (1.17) имеем

$$\psi = C_1 \frac{\xi}{2\alpha} I_0(\alpha\xi) - C_2 \frac{\xi}{2\alpha} K_0(\alpha\xi) + C_3 I_1(\alpha\xi) + C_4 K_1(\alpha\xi) \tag{2.4}$$

($K_j(x)$ — модифицированные функции Бесселя 2-го рода).

Постоянные $C_1, \ldots, C_4$ находятся из условий (1.8), (1.9), (2.3)

$$\psi(d) = 0, \; \psi'(d) = 0, \; \psi(1) = 0, \; \psi''(1) + \psi'(1) - 1 = 0. \tag{2.5}$$

Определяя возмущение температуры T из (1.11), (2.2), (2.3) и подставляя в граничное условие (1.10), найдем

$$\text{Ma} = \frac{(1 - \alpha^2)(\alpha l_1 + \text{Bi}\, l_2)}{\alpha^3 (1 - \alpha^2) G(\alpha, d) + F(\alpha, d)\, \text{We}^{-1}}, \tag{2.6}$$

где $l_1 = I_1(\alpha)K_1(\alpha d) - I_1(\alpha d)K_1(\alpha)$; $l_2 = I_1(\alpha d)K_0(\alpha) + I_0(\alpha)K_1(\alpha d)$;

$$G(\alpha, d) = \int_d^1 (d^2 - \tau^2)\psi(\tau)[K_0(\alpha\tau) I_1(\alpha d) + K_1(\alpha d) I_0(\alpha\tau)]\, d\tau; \quad F(\alpha, d) = [\psi''(1) - 3(1 + \alpha^2)\psi'(1) + 3]\,[(1 + d^2)l_2 + \alpha(d^2 - 1)l_1].$$

Интеграл $G(\alpha, d)$ допускает явное выражение через модифицированные функции Бесселя. Оно громоздкое и здесь не приводится. Можно показать, что при $d \to 0$ формула (2.6) переходит в (1.18). Для азимутальных возмущений ищем функции U, V, P в виде (1.21), где $\varphi = (1/2) \times [-mC_1\xi^{m+1} + C_2\xi^{-m-1} + C_3\xi^{m-1} + mC_4\xi^{-m+1}]$, $\psi = -(i/2)\,[(m+2) \times C_1\xi^{m+1} + C_2\xi^{-m-1} - C_3\xi^{m-1} + (m-2)C_4\xi^{-m+1}]$, $f = C_1\xi^m + C_2\xi^{-m}$ $(m \neq 1)$. Постоянные $C_1, \ldots, C_4$ находятся из граничных условий $\varphi(d) = \psi(d) = \varphi(1) = \psi'(1) - \psi(1) + im = 0$. Для критических Ma получим

$$\text{Ma} = \frac{(1 - m^2)\,[m(d^{m-1} - d^{-m-1}) - \text{Bi}\,(d^{m-1} + d^{-m-1})]}{(1 - m^2)\, G(m, d) + F(m, d)\,\text{We}^{-1}}, \tag{2.7}$$

$$G = \int_d^1 \left(\frac{d^2}{\tau} - \tau\right) \varphi(\tau)\,[d^{-1-m}\tau^{m+1} + d^{m-1}\tau^{1-m}]\, d\tau,$$

$$F = [(2 - m)(m + 1)C_1 + (2 + m)(1 - m)C_4 - (m + 1)C_2 + (m - 1) \times C_3 + 1]\,[m(d^m - d^{-m-1})(d^2 - 1) - (d^m + d^{-m-1})(d^2 + 1)].$$

Если же $m = 1$, то нетривиальные решения существуют только при $\text{We} = \infty$ и

$$\text{Ma} = (1 - d^{-2} - (1 + d^{-2})\text{Bi})/G(1, d). \tag{2.8}$$

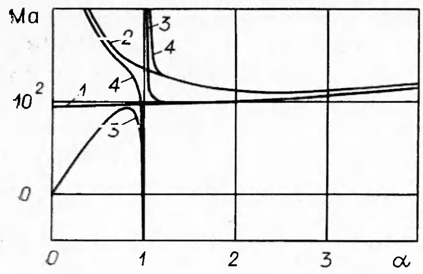

Рис. 3

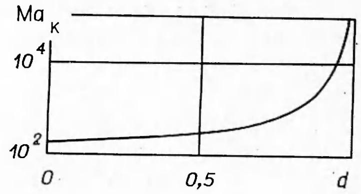

Рис. 4

Здесь также легко показать, что формула (2.7) переходит в (1.19) при $d \to 0$, а предельное значение (2.8) есть $48(1+\mathrm{Bi})$.

В общем случае $\alpha \neq 0$, $m \neq 0$ производится замена (1.21):

$$f = C_1 I_m(\alpha\xi) + C_2 K_m(\alpha\xi),\quad \varphi = \frac{C_1}{2}\xi I_m(\alpha\xi) + \frac{C_2}{2}\xi K_m(\alpha\xi) + \frac{C_3}{2} I_{m+1}(\alpha\xi) +$$
$$+ \frac{C_4}{2} K_{m+1}(\alpha\xi) + \frac{C_5}{2} I_{m-1}(\alpha\xi) + \frac{C_6}{2} K_{m-1}(\alpha\xi),$$
$$\psi = -\frac{iC_3}{2} I_{m+1}(\alpha\xi) - \frac{iC_4}{2} K_{m+1}(\alpha\xi) + \frac{iC_5}{2} I_{m-1}(\alpha\xi) + \frac{iC_6}{2} K_{m-1}(\alpha\xi),$$

где постоянные $C_1, \ldots, C_6$ находятся из системы $\varphi(d) = \psi(d) = \varphi'(d) = \varphi(1) = 0$, $\psi'(1) - \psi(1) + im = 0$, $\varphi''(1) + \varphi'(1) + \alpha^2 + m^2 = 0$.

Используя рассуждения п. **1**, получаем

$$\mathrm{Ma} = \frac{(1-\alpha^2-m^2)(\alpha l_1 + \mathrm{Bi}\, l_2)}{(1-\alpha^2-m^2)G_m + F_m \mathrm{We}^{-1}}, \tag{2.9}$$

где $l_1 = I'_m(\alpha d) K_m(\alpha) - K'_m(\alpha d) I_m(\alpha)$; $l_2 = K'_m(\alpha) I'_m(\alpha d) - I'_m(\alpha) K'_m(\alpha d)$; $G_m = \int\limits_d^1 (d^2-\tau^2)\varphi(\tau)[K_m(\alpha\tau) I'_m(\alpha d) - K'_m(\alpha d) I_m(\alpha\tau)]\,d\tau$; $F_m = [-f(1) + 2\varphi'(1) + 1]\,[\alpha l_1(d^2-1) - l_2(d^2+1)]$.

Предельное при $d \to 0$ значение выражения (2.9) совпадает с Ма (1.24) для полностью жидкого цилиндра. В качестве примера на рис. 3 приведен расчет критических Ма для осесимметрических возмущений по формуле (2.6) при $d = 0{,}2$. Кривая *1* ($\mathrm{Bi} = 0$, $\mathrm{We} = \infty$) имеет минимум $\mathrm{Ma}_{\text{к}} = 93$ при $\alpha_{\text{к}} = 0$, а *2* ($\mathrm{Bi} = 2$, $\mathrm{We} = \infty$) достигает минимума 260 при $\alpha_{\text{к}} = 2{,}66$. Если же $\mathrm{We} \neq \infty$, то знаменатель в (2.9) обращается в нуль при $\alpha = \alpha^*$ и $\alpha^* \to 1$, когда $\mathrm{We} \to \infty$. Для $\mathrm{We} = 10^4$, $\alpha^* = 1{,}0014$ кривая *3* ($\mathrm{Bi} = 0$) на интервале $0 \leqslant \alpha < \alpha^*$ достигает максимума 95 при $\alpha = 0{,}88$, а при $\alpha = 1{,}06$ минимум $\mathrm{Ma}_{\text{к}} = 100{,}5$. Когда $\mathrm{Bi} = 2$, то у кривой *4* минимум $\mathrm{Ma}_{\text{к}} = 260$ при $\alpha_{\text{к}} = 2{,}66$.

С ростом волнового числа (или We) кривые $\mathrm{Ma}(\alpha, \mathrm{We})$ быстро сближаются и $\mathrm{Ma} \sim 8\alpha(\alpha + \mathrm{Bi})$, когда $\mathrm{We} = \infty$.

Из сравнения кривых рис. 1 и 3 видно, что асимптотические возмущения цилиндрического слоя более устойчивы, чем аналогичные возмущения жидкого цилиндра. Это объясняется стабилизирующим действием вязких сил вблизи твердой стенки. Кривая рис. 4, где отложена зависимость минимальных критических $\mathrm{Ma}_{\text{к}}$ от параметра d, иллюстрирует рассмотренную ситуацию $\mathrm{Ma}_{\text{к}}(0) = 178{,}7$. Точно такой же вывод справедлив и для $m \geqslant 1$.

3. Плоский слой. Равновесное состояние плоского слоя жидкости ограниченного твердой нижней границей $z = 0$ и свободной поверхностью $z = l$, описывается формулами

$$u = v = w = 0,\quad p = \text{const},\quad \Theta(z) = -qz^2/2\chi + \text{const}. \tag{3.1}$$

Возьмем в качестве характерной температуры, скорости и давления величины $\nu l\gamma/\chi$, ν/l, $\rho\nu^2/l^2$, где $\gamma = ql/\chi$. Краевая задача для малых воз ущений равновесного состояния (3.1) может быть сведена к следующей ; $= z/l$):

$$P_{\xi\xi} - k^2P = 0,\ W_{\xi\xi} - k^2W = P_\xi,\ T_{\xi\xi} - k^2T = -zW\ (0<\xi<1); \qquad (3.2)$$

$$W = W_\xi = T_\xi = 0\ (\xi = 0); \qquad (3.3)$$

$$W_{\xi\xi} + k^2\,\mathrm{Ma_п}T + \mathrm{Ma_п}\,(2W_\xi - P)\,\mathrm{We_п}^{-1} = 0; \qquad (3.4)$$

$$T_\xi + \mathrm{Bi_п}T + \frac{\mathrm{Bi_п}+1}{k^2}(2W_\xi - P)\,\mathrm{We_п}^{-1} = 0; \qquad (3.5)$$

$$W = 0\ \ (\xi = 1). \qquad (3.6)$$

десь $\mathrm{We_п} = \sigma_0 l/\rho\nu\chi$; $\mathrm{Ma_п} = \gamma\varkappa l^2/\rho\nu\chi$; $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$; α, β — волновые исла по направлениям x, y соответственно; k — волновое число.

Решение задачи (3.2) имеет вид

$$P = C_1\,\mathrm{sh}\,k\xi + C_2\,\mathrm{ch}\,k\xi,\ W = \frac{C_1}{2}\left(\xi\,\mathrm{sh}\,k\xi - \frac{\mathrm{ch}\,k\xi}{2k}\right) + \frac{C_2}{2}\left(\xi\,\mathrm{ch}\,k\xi - \frac{\mathrm{sh}\,k\xi}{2k}\right) + C_3\,\mathrm{sh}\,k\xi + C_4\,\mathrm{ch}\,k\xi,$$

$$T = \frac{C_1}{2k}\left(\frac{3}{8k}\xi^2\,\mathrm{sh}\,k\xi - \frac{3}{8k^2}\xi\,\mathrm{ch}\,k\xi + \frac{3}{16k^3}\,\mathrm{sh}\,k\xi - \frac{1}{6}\xi^3\,\mathrm{ch}\,k\xi\right) + \frac{C_2}{2k}\left(\frac{3}{8k}\xi^2\,\mathrm{ch}\,k\xi - \frac{3}{8k^2}\xi\,\mathrm{sh}\,k\xi + \frac{3}{16k^3}\,\mathrm{ch}\,k\xi - \frac{1}{6}\xi^3\,\mathrm{sh}\,k\xi\right) +$$
$$+ \frac{C_3}{2k}\left(\frac{1}{2k}\xi\,\mathrm{sh}\,k\xi - \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{ch}\,k\xi - \frac{1}{2}\xi^2\,\mathrm{ch}\,k\xi\right) + \frac{C_4}{2k}\left(\frac{1}{2k}\xi\,\mathrm{ch}\,k\xi - \frac{1}{4k^2}\,\mathrm{sh}\,k\xi - \frac{1}{2}\xi^2\,\mathrm{sh}\,k\xi\right) + C_5\,\mathrm{sh}\,k\xi + C_6\,\mathrm{ch}\,k\xi.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.3)—(3.6), получим

$$\mathrm{Ma_п} = \frac{8k^2\,(k - \mathrm{sh}\,k\cdot\mathrm{ch}\,k)\,(\mathrm{ch}\,k\cdot\mathrm{Bi_п} + k\,\mathrm{sh}\,k)}{\mathrm{sh}^3\,k + k^2\,\mathrm{sh}\,k - k\,\mathrm{ch}\,k\cdot\mathrm{sh}^2\,k + \frac{2}{3}k^4\,\mathrm{sh}\,k - k^3\,\mathrm{ch}\,k + 8k^3\,(\mathrm{ch}\,k - k\,\mathrm{sh}\,k)\,\mathrm{We_п}^{-1}}. \qquad (3.7)$$

На рис. 5 приведена зависимость $\mathrm{Ma_п}(k)$, вычисленная по формуле .7). Кривая *1* ($\mathrm{Bi_п} = 0$, $\mathrm{We_п} = \infty$) не имеет минимума при всех $k > 0$, $\mathrm{a_п}(0) = 80$. Вдоль кривой *2* ($\mathrm{Bi_п} = 2$, $\mathrm{We_п} = \infty$) минимум 194,3 достиется в точке $k = 2{,}18$. Если поверхность деформируема, то все кривые $\mathrm{a_п}(k)$ имеют разрыв, как и в случае цилиндрического слоя или жидкого илиндра. Так, при $\mathrm{We_п} = 10^4$ разрыв происходит в точке $k^* = 0{,}17$. ри $0 \leqslant k < k^*$ критическое число Марангони неположительно и $\mathrm{Ma_п}(k) \to -\infty$, $k \to k^* - 0$. Кривая *3* ($\mathrm{Bi_п} = 0$, $\mathrm{We_п} = 10^4$) имеет минимум .,2 при $k = 0{,}59$. Для кривой *4* ($\mathrm{Bi_п} = 2$, $\mathrm{We_п} = 10^4$) минимальное $\mathrm{a_п} = 194{,}3$, когда $k = 2{,}18$.

В [1] рассматривалась задача о возникновении термокапилрной конвекции под действием перепада температур на границах слоя и $\mathrm{We_п} = \infty$. Кривая *5* взята из этой работы и соответствует $\mathrm{Bi_п} = 2$. оскольку линия *2* для всех $k > 0$ расположена выше *5*, то равновесное стояние, возникающее под действием постоянных внутренних источнив тепла, более устойчиво.

Заметим, что при $\mathrm{We_п} = \infty$ все кривые, включая и *5*, имеют одинакою асимптотику при $k \to \infty$: $\mathrm{Ma_п}(k) \sim 8k(k + \mathrm{Bi_п})$. Как отмечено выше, итические числа Марангони для цилиндра и цилиндрического слоя еют ту же асимптотику для коротких волн. Поэтому критические числа я коротковолновых возмущений перестают зависеть от вида граничных ловий [3], состояния равновесия и от размерности и геометрии области, нятой жидкостью.

Нетрудно проверить, что при $a \to \infty$ ($d \to 1$) и фиксированном знании $b - a = l$ равновесное состояние цилиндрического слоя (2.1)

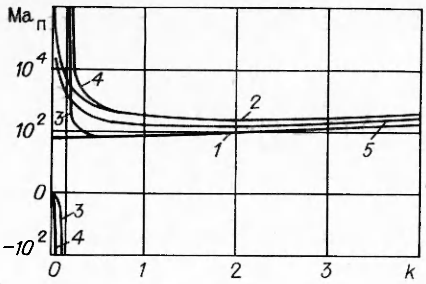

Рис. 5

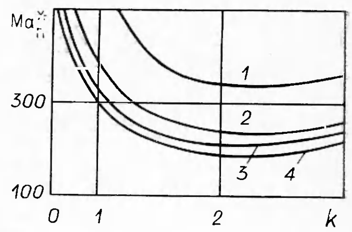

Рис. 6

сводится к равновесию плоского слоя (3.1). Поэтому представляет целесообразным сравнить отвечающие им критические числа Марангон Для этого необходимо положить

$$\text{(3.8)} \qquad \mathrm{Ma}^*_{\text{п}} = 2\,(1 - d^3)\,\mathrm{Ma}$$

и учесть, что $\alpha = kd/(1 - d)$ $(m = kd/(1 - d)$, $\mathrm{Bi} = \mathrm{Bi}_{\text{п}}/(1 - d)$, $\mathrm{We} = \mathrm{We}_{\text{п}}/(1 - d)$.

Подставляя в (3.8) Ma по формуле (2.6) или (2.7) и устремляя к единице, получим в пределе число Марангони (3.7), т. е. $\lim\limits_{d\to 1} \mathrm{Ma}^*_{\text{п}} = \mathrm{M}$

На рис. 6 приведены кривые $\mathrm{Ma}^*_{\text{п}}$, рассчитанные по формуле (3. при $\mathrm{Bi}_{\text{п}} = 2$, $\mathrm{We}_{\text{п}} = \infty$. Для кривой *1* $d = 0{,}1$ и минимум $\mathrm{Ma}_{\text{п}} = 333$, $k = 2{,}23$, для *2* $d = 0{,}5$, $\mathrm{Ma}_{\text{п}} = 237{,}2$, $k = 2{,}18$, а для *3* $d = 0{,}9$ $\mathrm{Ma}_{\text{п}} = 209{,}2$, $k = 1{,}98$. Кривая *4* отвечает плоскому слою, когда $d =$ Как видно из рис. 6, минимумы кривых для цилиндрического слоя вы минимума кривой ддя плоского слоя. Таким образом, равновесное состоян цилиндрического слоя является более устойчивым по отношению к осеси метрическим возмущениям, чем равновесное состояние плоского слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Pearson J. K. A.** On convection cells induced by surface tension // J. Fluid Mech. 1958.— V. 4, N 5.
2. **Антимиров М. Я., Лиепиня В. Р.** Возникновение термокапиллярной конвекци цилиндрическом слое жидкости в условиях невесомости // Изв. АН ЛатвССР. С физ. и техн. наук.— 1978.— № 3.
3. **Бадратинова Л. Г.** Термокапиллярная неустойчивость равновесия жидкого сл ограниченного свободными поверхностями // Динамика сплошной среды.— Но сибирск: ИГ СО АН СССР, 1980.— Вып. 46.
4. **Бабский В. Г., Скловская И. А.** Гидродинамика в слабых силовых полях. Возн новение стационарной термокапиллярной конвекции в шаровом слое жидкости условиях невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1969.— № 3.
5. **Андреев В. К., Рябицкий Е. А.** Малые возмущения термокапиллярного движен в случае цилиндра.— М., 1984.— Деп. в ВИНИТИ 27.11.84, № 7788—84.
6. **Хаппель Д., Бреннер Г.** Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.— М.: М 1976.

Поступила 19/XI 1987 г.,
в окончательном варианте — 18/II 1988 г.

УДК 532.5

К НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. Владимиров

(Новосибирск)

Изучается проблема обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике. Суть эт проблемы — доказательство неустойчивости положения равновесия (покоя) механ ческой системы при отсутствии в нем минимума потенциальной энергии [1—4]. Р смотрены линейные задачи устойчивости равновесия идеальных несжимаемой и сж маемой жидкостей. Учтены такие факторы, как капиллярность, плотностная и энтропийная стратификация и вращение. Результат состоит в получении априорн