УДК 539.3

О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО СЛОЯ

А. О. Ватульян, М. А. Двоскин, П. С. Сатуновский

Ростовский государственный университет, 344090 Ростов-на-Дону
E-mails: vatulyan@aaanet.ru, micd@rambler.ru, GardSilver@list.ru

Предложен способ анализа волновых полей в упругом слое с произвольно меняющимися по глубине упругими свойствами, основанный на сведении краевой задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода и ее численном анализе. Исследованы некоторые особенности строения дисперсионных множеств, в частности, построены их асимптоты.

Ключевые слова: упругий неоднородный слой, установившиеся колебания, дисперсия волн.

Введение. Задача о колебаниях неоднородных упругих волноводов имеет приложение в различных областях: геофизике, механике слоистых композитов, нано- и биомеханике. Особенности волновых полей в неоднородных слоистых структурах изучались в работах [1–6]. При этом стандартная схема исследования приводит к системе дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которой зависят не только от законов распределения коэффициентов Ламе по поперечной координате, но и от их производных [3, 4]. При таком подходе остаются неисследованными важные случаи кусочно-непрерывных законов неоднородности. В работе [5] предложен иной подход, основанный на численном построении линейно независимых решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, что позволяет расширить класс изучаемых функций.

В данной работе изучаются волновые поля в упругом слое с произвольно меняющимися по глубине упругими свойствами. Краевая задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Исследованы некоторые особенности строения дисперсионных множеств, в частности, построены их асимптоты.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрена задача об установившихся колебаниях с частотой ω неоднородного по толщине слоя ($|x_1|, |x_2| \leqslant \infty$, $0 \leqslant x_3 \leqslant h$) с жесткозакрепленным основанием ($x_3 = 0$) под действием распределенной нагрузки, определяемой вектором $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$. Изучены два случая: плоский и антиплоский. Предполагается, что параметры Ламе $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$ и плотность слоя $\rho(x_3)$ являются произвольными кусочно-непрерывными функциями. Рассматриваются задачи установившихся колебаний. Далее временной множитель $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ опускается.

Задача о плоской деформации. В случае плоской деформации компоненты вектора перемещений u_1, u_3 зависят только от координат x_1, x_3 ($u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$), а $u_2 = 0$. Уравнения движения имеют вид

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} + \rho(x_3)\omega^2 u_1 = 0, \qquad \sigma_{31,1} + \sigma_{33,3} + \rho(x_3)\omega^2 u_3 = 0. \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00734) и гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (грант № НШ-5014.2006.1).

Закон Гука представим в форме

$$\sigma_{11} = \lambda(x_3)(u_{1,1} + u_{3,3}) + 2\mu(x_3)u_{1,1}, \qquad \sigma_{33} = \lambda(x_3)(u_{1,1} + u_{3,3}) + 2\mu(x_3)u_{3,3},$$
$$\sigma_{13} = \mu(x_3)(u_{1,3} + u_{3,1}). \tag{1.2}$$

Граничные условия соответствуют жесткому защемлению нижней границы слоя:

$$u_1\big|_{x_3=0} = 0, \qquad u_3\big|_{x_3=0} = 0 \tag{1.3}$$

и нагружению на верхней границе:

$$\sigma_{13}\big|_{x_3=h} = p_1(x_1), \qquad \sigma_{33}\big|_{x_3=h} = p_3(x_1). \tag{1.4}$$

Задача об антиплоской деформации. Среди компонент вектора перемещений отлична от нуля только компонента $u_2 = u_2(x_1, x_3)$, а уравнение движения имеет вид

$$\sigma_{12,1} + \sigma_{23,3} + \rho(x_3)\omega^2 u_2 = 0, \tag{1.5}$$

причем

$$\sigma_{12} = \mu(x_3)u_{2,1}, \qquad \sigma_{23} = \mu(x_3)u_{2,3}. \tag{1.6}$$

Граничные условия соответствуют жесткому защемлению нижней границы слоя и нагружению на верхней границе:

$$u_2\big|_{x_3=0} = 0; \tag{1.7}$$
$$\sigma_{23}\big|_{x_3=h} = p_2(x_1).$$

Следует отметить, что сформулированные краевые задачи приводят к уравнениям в частных производных с переменными коэффициентами.

2. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В случае плоской деформации краевую задачу (1.1)–(1.4) сведем к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого применим преобразование Фурье по переменной x_1:

$$\tilde{u}_1(\alpha, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1(x_1, x_3)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_1}\,dx_1, \qquad \tilde{u}_3(\alpha, x_3) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_3(x_1, x_3)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_1}\,dx_1,$$

$$\tilde{p}_1(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_1}\,dx_1, \qquad \tilde{p}_3(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_3(x_1)\,\mathrm{e}^{i\alpha x_1}\,dx_1.$$

В результате получим каноническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно трансформант:

$$\frac{d\tilde{u}_1}{dx_3} = \alpha\tilde{u}_3 + \frac{1}{\mu}\,\tilde{\sigma}_{13}, \qquad \frac{d\tilde{u}_3}{dx_3} = \frac{i\alpha\lambda}{\lambda + 2\mu}\,\tilde{u}_1 + \frac{1}{\lambda + 2\mu}\,\tilde{\sigma}_{33},$$
$$\frac{d\tilde{\sigma}_{13}}{dx_3} = \Big(\frac{4\alpha^2\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} - \rho\omega^2\Big)\tilde{u}_1 + \frac{i\alpha\lambda}{\lambda + 2\mu}\,\tilde{\sigma}_{33}, \qquad \frac{d\tilde{\sigma}_{33}}{dx_3} = -\rho\omega^2\tilde{u}_3 + i\alpha\tilde{\sigma}_{31}. \tag{2.1}$$

Перейдем к безразмерным параметрам, введя следующие обозначения:

$$z = \frac{x_3}{h} \quad (x_3 \in [0, h] \mapsto z \in [0, 1]), \quad \hat{\mu}(z) = \frac{\mu(hz)}{\mu_0}, \quad \hat{\lambda}(z) = \frac{\lambda(hz)}{\mu_0}, \quad \hat{p}_1 = \frac{\tilde{p}_1}{\mu_0}, \quad \hat{p}_3 = \frac{\tilde{p}_3}{\mu_0},$$

$$W_{13}(z) = \frac{\tilde{\sigma}_{13}(hz)}{\mu_0}, \quad W_{33}(z) = \frac{\tilde{\sigma}_{33}(hz)}{\mu_0}, \quad V_1(z) = \frac{\tilde{u}_1(hz)}{h}, \quad V_3(z) = \frac{\tilde{u}_3(hz)}{h},$$

$$\hat{\rho}(z) = \frac{\rho(hz)}{\rho_0}, \qquad \beta = \alpha h, \qquad \varkappa^2 = \frac{\rho_0 \omega^2 h^2}{\mu_0}.$$

Здесь ρ_0, μ_0 — характерные плотность и модуль сдвига. Тогда система (2.1) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} V_1' = i\beta V_3 + \frac{1}{\hat{\mu}} W_{13}, \qquad V_3' = \frac{i\beta\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} V_1 + \frac{1}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} W_{33}, \\ W_{13}' = \Big(\frac{4\beta^2\hat{\mu}(\hat{\lambda}+\hat{\mu})}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} - \varkappa^2\hat{\rho}\Big) V_1 + \frac{i\beta\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} W_{33}, \qquad W_{33}' = -\varkappa^2\hat{\rho} V_3 + i\beta W_{31}, \end{gathered} \tag{2.2}$$

а граничные условия (1.3), (1.4) примут вид

$$\begin{gathered} V_1\big|_{z=0} = 0, \qquad V_3\big|_{z=0} = 0, \\ W_{13}\big|_{z=1} = \hat{p}_1(\alpha), \qquad W_{33}\big|_{z=1} = \hat{p}_3(\alpha). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Проинтегрировав систему дифференциальных уравнений (2.2) на отрезке $[0, z]$ и найдя постоянные интегрирования из граничных условий (2.3), получим

$$V_1 = \int\limits_0^z \Big(i\beta V_3 + \frac{1}{\hat{\mu}} W_{13}\Big)\, d\xi, \qquad V_3 = \int\limits_0^z \Big(\frac{i\beta\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} V_1 + \frac{1}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} W_{33}\Big)\, d\xi,$$

$$W_{13} = -\int\limits_z^1 \Big[\Big(\frac{4\beta^2\hat{\mu}(\hat{\lambda}+\hat{\mu})}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} - \varkappa^2\hat{\rho}\Big) V_1 + \frac{i\beta\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} W_{33}\Big]\, d\xi + \hat{p}_1,$$

$$W_{33} = \int\limits_z^1 \big(\varkappa^2\hat{\rho} V_3 - i\beta W_{31}\big)\, d\xi + \hat{p}_3.$$

Исключив из этой системы V_3, W_{13}, поменяв порядок интегрирования в двойных интегралах и введя обозначения $U = V_1$, $T = iW_{33}$, получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\begin{gathered} U(z) = \int\limits_0^1 M_1(z,\xi) U(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^1 M_2(z,\xi) T(\xi)\, d\xi + \hat{p}_1 \int\limits_0^z \frac{1}{\hat{\mu}(\xi)}\, d\xi, \\ -T(z) = \int\limits_0^1 M_3(z,\xi) T(\xi)\, d\xi + \int\limits_0^1 M_4(z,\xi) U(\xi)\, d\xi - i\hat{p}_3 - \beta\hat{p}_1(1-z). \end{gathered} \tag{2.4}$$

Ядра интегральных операторов можно представить в виде

$$M_1(z,\xi) = -\frac{\beta^2\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} K_1(z,\xi) - \Big(\frac{4\beta^2\hat{\mu}(\hat{\lambda}+\hat{\mu})}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} - \varkappa^2\hat{\rho}\Big) K_2(z,\xi),$$

$$M_2(z,\xi) = \frac{\beta}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} K_1(z,\xi) - \frac{\beta\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} K_2(z,\xi),$$

$$M_3(z,\xi) = -\frac{\varkappa^2\hat{\rho}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} K_3(z,\xi) + \frac{\beta^2\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}+2\hat{\mu}} K_4(z,\xi),$$

$$M_4(z,\xi)=\beta\Big[\frac{\varkappa^2\hat\rho\hat\lambda}{\hat\lambda+2\hat\mu}\,K_3(z,\xi)+\Big(\frac{4\beta^2\hat\mu(\hat\lambda+\hat\mu)}{\hat\lambda+2\hat\mu}-\varkappa^2\hat\rho\Big)K_4(z,\xi)\Big],$$

$$K_1(z,\xi)=(z-\xi)\theta(z-\xi),\qquad K_2(z,\xi)=\int\limits_0^{\min\{z;\xi\}}\frac{1}{\hat\mu(\tau)}\,d\tau,$$

$$K_3(z,\xi)=\min\{1-z;1-\xi\},\qquad K_4(z,\xi)=K_1(\xi,z),$$

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Аналогично краевая задача об антиплоской деформации (1.5)–(1.7) приводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$W'(z)=-F(z)V(z),\qquad V'(z)=W(z)/\hat\mu(z) \tag{2.5}$$

с граничными условиями

$$V\Big|_{z=0}=0,\qquad W\Big|_{z=1}=\hat p_2(\alpha), \tag{2.6}$$

где

$$\hat p_2=\frac{\tilde p_2}{\mu_0},\quad W(z)=\frac{\tilde\sigma_{23}(z)}{\mu_0},\quad V(z)=\frac{\tilde u_2(z)}{h},\quad F(z)=\varkappa^2\hat\rho(z)-\beta^2\hat\mu(z).$$

Аналогично задаче о плоской деформации задача (2.5), (2.6) сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$V(z)=\int\limits_0^1 K(z,\xi)V(\xi)\,d\xi+f(z), \tag{2.7}$$

где

$$K(z,\xi)=F(\xi)\int\limits_0^{\min\{z;\xi\}}\frac{d\tau}{\hat\mu(\tau)},\qquad f(z)=\hat p_2\int\limits_0^z\frac{d\xi}{\hat\mu(\xi)}.$$

Следует отметить, что построенные интегральные уравнения могут быть решены численно, если заданы соответствующие законы неоднородности. При некоторых сочетаниях параметров соответствующие уравнения могут оказаться неразрешимыми, что характеризует точки дисперсионных множеств [1].

Для построения дисперсионных множеств необходимо проанализировать однородные интегральные уравнения Фредгольма второго рода (2.4), (2.7) и найти сочетания параметров $\varkappa$ и β, при которых существуют ненулевые решения соответствующих интегральных уравнений [3].

3. Численный анализ полей и дисперсионных множеств. В работе реализована схема дискретизации интегрального уравнения Фредгольма второго рода, основанная на разбиении отрезка $[0,1]$ на $n-1$ отрезков точками $z_1=0<z_2<\ldots<z_n=1$, $\Delta z_i=z_{i+1}-z_i$. Аппроксимируем неизвестную функцию $V(z)$ на каждом отрезке линейной функцией $\tilde V(z)$:

$$\tilde V(z)=V_{i+1}\,\frac{z-z_i}{\Delta z_i}-V_i\,\frac{z-z_{i+1}}{\Delta z_i}\qquad\text{при}\quad z\in[z_i,z_{i+1}],\quad i=1,\ldots,n-1.$$

Тогда, удовлетворяя интегральному уравнению (2.7) в точках z_i, получим линейную алгебраическую систему относительно узловых неизвестных $V_i=V(z_i)$:

$$V_i+\sum_{j=1}^n C_{ji}V_j=f(z_i),\qquad i=1,\ldots,n,$$

$$C_{1i}=\int\limits_{z_1}^{z_2} K(z_i,\xi)\,\frac{\xi-z_2}{\Delta z_1}\,d\xi,\qquad C_{ni}=-\int\limits_{z_{n-1}}^{z_n} K(z_i,\xi)\,\frac{\xi-z_{n-1}}{\Delta z_{n-1}}\,d\xi,\qquad i=1,\dots,n,$$

$$C_{ji}=\int\limits_{z_j}^{z_{j+1}} K(z_i,\xi)\,\frac{\xi-z_{j+1}}{\Delta z_j}\,d\xi-\int\limits_{z_{j-1}}^{z_j} K(z_i,\xi)\,\frac{\xi-z_{j-1}}{\Delta z_{j-1}}\,d\xi,\qquad j=2,\dots,n-1.$$

В соответствии с принятой схемой дискретизации рассматриваемые задачи приводятся к системам линейных уравнений, которые при некоторых сочетаниях параметров $\varkappa$ и β оказываются неразрешимыми. Множество таких точек $(\varkappa,\beta)$ образует дисперсионное множество в исходных задачах. Для нахождения точек дисперсионного множества необходимо найти такие сочетания параметров $\varkappa$ и β, при которых соответствующая однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение. Некоторые общие закономерности строения этих множеств приведены в [1, 2]. Вещественная компонента дисперсионного множества состоит из конечного числа гладких кривых, исходящих из некоторых точек на оси $\beta=0$, определяемых как собственные значения следующих независимых спектральных задач:

$$(\hat\mu V_1')'+\varkappa^2\hat\rho V_1=0,\qquad V_1(0)=V_1'(0)=0,$$

$$W_{33}'+\frac{\varkappa^2\hat\rho}{\hat\lambda+2\hat\mu}\,W_{33}=0,\qquad W_{33}(1)=W_{33}'(0)=0.$$

Эти задачи определяют собственные значения $\varkappa_k^2$ $(k=1,2,\dots,N)$ положительных самосопряженных операторов, которые в случае однородной среды соответствуют частотам запирания поперечных и продольных волн и порождают соответственно ветви дисперсионного множества. При этом существует критическое значение волнового числа $\varkappa_*$ такое, что в области $\varkappa<\varkappa_*$ точки дисперсионного множества отсутствуют [2].

Численно построены дисперсионные множества для различных законов неоднородности при $n=40$. На рис. 1 представлены первые три ветви дисперсионного множества задачи о плоской деформации для некоторых параметров среды. Законы неоднородности выбраны таким образом, чтобы интегралы от всех рассмотренных функций были равны единице.

Следует отметить, что аномальная дисперсия наблюдается на третьей ветви, причем она наиболее ярко выражена для третьего закона неоднородности.

Результаты аналогичных расчетов для задачи об антиплоской деформации приведены на рис. 2.

Отметим также, что при $\mu=\mu_0=\mathrm{const}$, $\rho=\rho_0=\mathrm{const}$ дисперсионное множество может быть построено аналитически и представляет собой семейство гипербол:

$$\varkappa^2-\beta^2=\pi^2(1/2+n)^2,\qquad n=0,1,2,\dots,\qquad \varkappa_*=\pi/2.$$

4. Исследование строения дисперсионных множеств. Изучим некоторые общие закономерности строения дисперсионных множеств.

Рассмотрим систему (2.5) с однородными граничными условиями в задаче об антиплоской деформации. Исключив из нее $W(z)$, составим уравнение относительно $V(z)$:

$$(\hat\mu(z)V'(z))'=-F(z)V(z),\qquad V'(1)=0.$$

Умножим его на $V(z)$ и проинтегрируем на отрезке $[0,1]$. После преобразований получим основное тождество для дисперсионных кривых

$$\varkappa^2=\beta^2\int\limits_0^1\hat\mu(V^2+V'^2)\,dz\Big/\int\limits_0^1\hat\rho V^2\,dz. \tag{4.1}$$

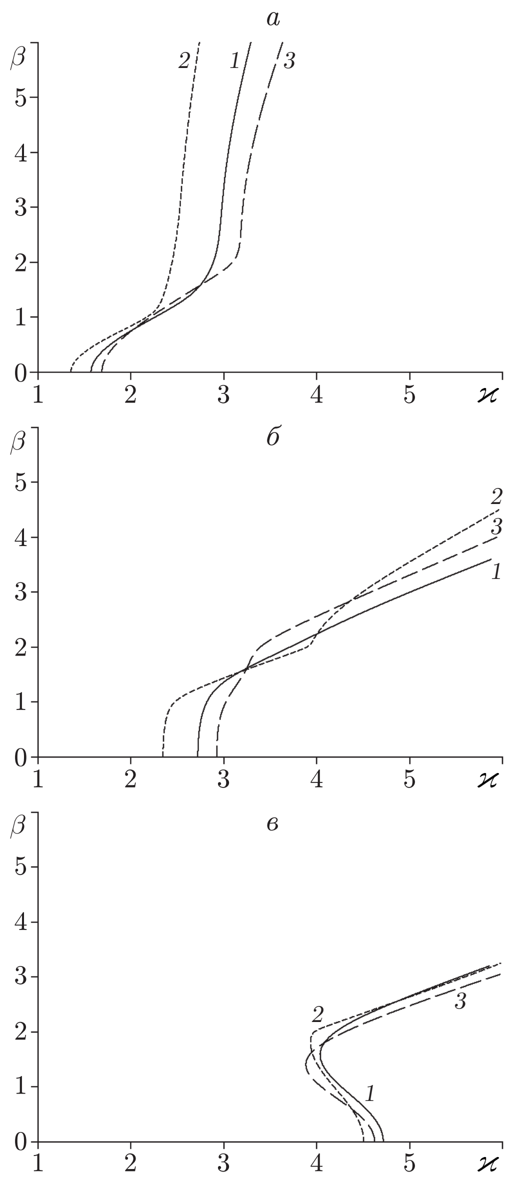

Рис. 1

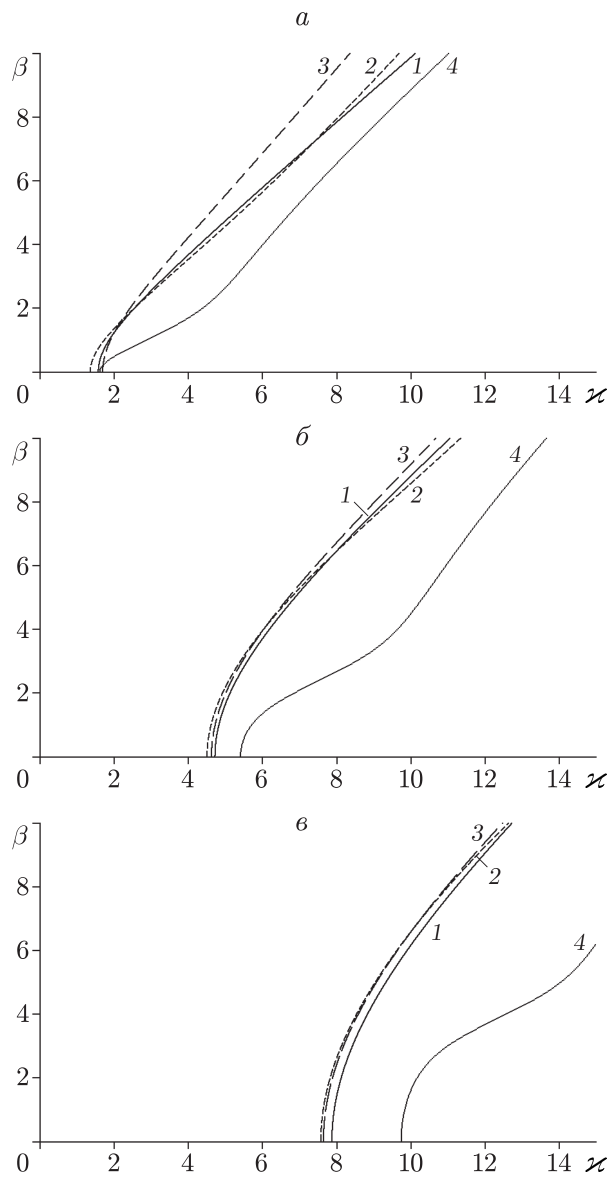

Рис. 2

Рис. 1. Ветви дисперсионного множества задачи о плоской деформации: *а* — первая ветвь; *б* — вторая ветвь; *в* — третья ветвь; *1* — $\hat{\lambda} = 1$, $\hat{\mu} = 1$, $\hat{\rho} = 1$; *2* — $\hat{\lambda} = z + 1/2$, $\hat{\mu} = z + 1/2$, $\hat{\rho} = 1$; *3* — $\hat{\lambda} = 3/2 - z$, $\hat{\mu} = 3/2 - z$, $\hat{\rho} = 1$

Рис. 2. Ветви дисперсионного множества задачи об антиплоской деформации: *4* — $\hat{\mu} = \begin{cases} 1, & z \in [0, 2/3], \\ 10, & z \in (2/3, 1], \end{cases}$ $\hat{\rho} = 1$; остальные обозначения те же, что на рис. 1

Введя обозначения $\mu_{\max} = \max\limits_{z\in[0,1]} \hat{\mu}(z)$, $\mu_{\min} = \min\limits_{z\in[0,1]} \hat{\mu}(z)$, $\rho_{\max} = \max\limits_{z\in[0,1]} \hat{\rho}(z)$, $\rho_{\min} = \min\limits_{z\in[0,1]} \hat{\rho}(z)$, из основного тождества (4.1) получим следующую оценку для волнового числа:

$$\beta^2\mu_{\min}/\rho_{\max} + C^- \leqslant \varkappa^2 \leqslant \beta^2\mu_{\max}/\rho_{\min} + C^+,$$

причем для величин C^- и C^+ выполняются неравенства

$$C^- \leqslant \int\limits_0^1 \hat{\mu}V'^2\,dz \Big/ \int\limits_0^1 \hat{\rho}V^2\,dz \leqslant C^+.$$

Оценку C^- легко получить, используя неравенство Коши — Буняковского:

$$C^- = 1\Big/\rho_{\max}\int\limits_0^1 \Big(\int\limits_0^t \frac{d\xi}{\hat{\mu}(\xi)}\Big)\,dt.$$

Построим асимптотику $V(1)$ при $|\beta| \to \infty$. В этом случае систему (2.5) можно записать в виде

$$\begin{gathered} W'(z) = \beta^2\hat{\mu}(z)V(z), \qquad W(z) = \hat{\mu}(z)V'(z), \\ V(0) = 0, \qquad W(1) = \hat{p}_2. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Решение системы (4.2) будем искать в виде $V(z) = A\,\mathrm{e}^{\beta S(z)}$, $\beta > 0$. Подставляя это представление в исходное уравнение и сохраняя старшие по β слагаемые, находим $S(z) = \pm z$. Тогда $V(z) = A_1\,\mathrm{e}^{\beta z} + A_2\,\mathrm{e}^{-\beta z}$. Удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$V(1) = \frac{\hat{p}_2 \operatorname{sh}\beta}{\beta\mu(1)\operatorname{ch}\beta} \sim \frac{\hat{p}_2}{\beta\mu(1)}.$$

Получим асимптотику для дисперсионных кривых при $|\beta| \to \infty$. Полагая $\varkappa = t\beta$, систему (2.5) с однородными граничными условиями запишем в виде

$$\begin{gathered} W'(z) = \beta^2(\hat{\mu}(z) - \hat{\rho}(z)t^2)V(z), \qquad W(z) = \hat{\mu}(z)V'(z), \\ V(0) = 0, \qquad W(1) = 0. \end{gathered}$$

Будем искать ее решение в виде $V(z) = A\,\mathrm{e}^{\beta S(z)}$. Тогда

$$S(z) = \pm\int\limits_0^z \sqrt{1 - \frac{\hat{\rho}(\xi)t^2}{\hat{\mu}(\xi)}}\,d\xi.$$

Удовлетворяя граничным условиям, получим $\beta\operatorname{ch}(\beta S(1))S'(1) = 0$, откуда следует $t = \sqrt{\hat{\mu}(1)/\hat{\rho}(1)}$. Таким образом, асимптоту кривых дисперсионного множества определяет скорость поперечных волн упругой среды с характеристиками на верхней границе.

Численные расчеты по построению точек дисперсионного множества показали, что при $\beta > 10$ результаты расчетов и результаты асимптотического анализа различаются не более чем на 2 % для всех видов неоднородности.

Построим асимптотику точек дисперсионных множеств при $|\beta| \to \infty$ в задаче о плоской деформации. Полагая $\varkappa = t\beta$, найдем решение системы (2.2) в виде $V_1 = A_1\,\mathrm{e}^{\beta S(z)}$, $V_3 = A_3\,\mathrm{e}^{\beta S(z)}$. Из первых двух уравнений (2.2) получаем выражения для W_{13} и W_{33}:

$$W_{13} = \hat{\mu}[A_1S'(z) - iA_3]\beta\,\mathrm{e}^{\beta S(z)}, \qquad W_{33} = (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})\Big(A_3S'(z) - i\,\frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}\,A_1\Big)\beta\,\mathrm{e}^{\beta S(z)}.$$

Сохраняя в оследних двух уравнениях (2.2) только главные члены асимптотических разложений, составим систему для нахождения постоянных A_1, A_3. Приравнивая к нулю определитель этой системы, находим

$$S_1 = \pm \int\limits_0^z \sqrt{1 - \frac{\hat{\rho}(\xi)t^2}{\hat{\lambda}(\xi) + 2\hat{\mu}(\xi)}}\, d\xi, \qquad S_2 = \pm \int\limits_0^z \sqrt{1 - \frac{\hat{\rho}(\xi)t^2}{\hat{\mu}(\xi)}}\, d\xi.$$

Удовлетворяя однородным граничным условиям на границах слоя, получим соответствующее уравнение вида

$$[1 - S_2'(0)S_1'(0)]\, \mathrm{e}^{\beta(S_1(1)+S_2(1))}\{4S_1'(1)S_2'(1) - [1 + S_2'^2(1)]\} = 0.$$

Следует отметить, что равенство нулю первого сомножителя дает значение для t, лишенное физического смысла, а обращение в нуль третьего сомножителя приводит к известному уравнению Рэлея [5] с упругими постоянными на верхней границе слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ворович И. И., Бабешко В. А.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
2. **Ворович И. И.** Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245, № 4. С. 817–820.
3. **Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.** Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989.
4. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И.** Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Наука, 2002.
5. **Калинчук В. В., Белянкова Т. И.** О динамике среды с непрерывно меняющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. региона. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 44–47.
6. **Гетман И. П., Устинов Ю. А.** Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов н/Д: Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1993.
7. **Гринченко В. Т., Мелешко В. В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981.

Поступила в редакцию 4/VIII 2005 г.