ЛИТЕРАТУРА

1. **Wright H. A., Tobey J. P.** Acoustic generator of the spark discharge type.— JASA, 1969, vol. 45, N 1.
2. **Smith N. D., Roever W. L.** Liquid seismic explosive and method of using.— JASA, 1968, vol. 44, N 4.
3. **Method** and device for echo ranging. N 3514748, Patented May 26, 1970. United States Patent Office.
4. **Filler W. P. J.** Directional explosive echo ranging device. Пат. США, № 3 521 725, заявл. 18.05.1962, опубл. 28.07.1970.
5. **Johnson R. M., Axelson C. A.** Deep depth line charge. Пат. США, № 3276366, заявл. 28.12.1964, опубл. 04.10.1966.
6. **Любошиц В. М.** Волновое поле направленного взрыва.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 1.
7. **Kilmer L. G.** Underwater gas explosion seismic wave generator.— JASA, 1969, vol. 45, N 2.
8. **Максаков А. А., Рой Н. А.** О подводном взрыве гремучего газа с высокой начальной объемной плотностью энергии.— Акуст. журн., 1979, т. 25, вып. 2.
9. **Brand R. S.** Shock wave generated by cavity collapse.— J. Fluid Mech., 1965, vol. 2, pt. 1.
10. **Urick R. J.** Implosions as sources of underwater sound.— JASA, 1963, vol. 35, N 12.
11. **Балашканд М. И.** Сопоставление акустической эффективности некоторых источников взрывного звука в воде.— ДАН СССР, 1970, т. 194, № 6.
12. **Christian E. A.** Source levels for deep underwater explosions.— JASA, 1967, vol. 42, N 4.
13. **Kibblewhite A. C., Denham R. W.** Measurements of acoustic energy from underwater explosions.— JASA, 1970, vol. 48, N 1 (pt 2).
14. **Turner R. G., Scrimger J. A.** On the depth variation in the energy spectra of underwater explosive charges.— JASA, 1970, vol. 48, N 3 (pt 2).
15. **Parkis B. E., Worley R. D.** Measurement of spectrum levels for shallow explosive sources.— JASA, 1971, vol. 49, N 1 (pt 1).
16. **Buck B. M.** Relative measurements of pulse component source energies of the USN explosive sound signal MK61 detonated at 60 ft.— JASA, 1974, vol. 55, N 1.
17. **Seiffert M.** Способ получения направленной взрывной волны с помощью подрывных зарядов.— ФРГ, заявка № 2541582, публикация 1977, № 12.
18. **Noddin G.** Sonic pulse generator.— JASA, 1964, vol. 36, N 4.
19. **Лаврентьев Э. В., Кузян О. И.** Взрывы в море.— Л., Судостроение, 1977.
20. **Кедринский В. К.** О пульсации тороидального газового пузыря в жидкости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 16. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
21. **Кедринский В. К.** Об одномерной пульсации тороидальной газовой полости в сжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1977, № 3.
22. **Коул Р.** Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.

УДК 517.9—532.5

КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ

В. Н. Монахов, П. И. Плотников

(*Новосибирск*)

В данной работе перед авторами стояла нелегкая задача — осветить развитие глубоких идей М. А. Лаврентьева в области математических проблем гидродинамики его учениками и последователями за истекшее десятилетие. Период до 1970 г. с большой полнотой отражен в обзоре, подготовленном редколлегией юбилейного сборника [1], посвященного 70-летию со дня рождения Михаила Алексеевича, и в его замечательной книге [2], написанной совместно с Б. В. Шабатом и выдержавшей уже два издания. За последние годы некоторые из поставленных М. А. Лаврентьевым проблем, затронутых в указанных публикациях, нашли свое полное или частичное решение. Изложение этих (частью не опубликованных) результатов, полученных в основном сотрудниками детища Михаила Алексеевича — Института гидродинамики СО АН СССР — и составляет содержание данной работы.

1. L-эллиптические системы. В 1946 г. М. А. Лаврентьев [3, 4] впервые выделил класс нелинейных систем уравнений, которые теперь принято называть сильно эллиптическими по М. А. Лаврентьеву (L-эллиптическими)

$$F(z, w, w_z, w_{\bar z}) = f_1 + if_2 = 0 \quad (z = x + iy,\ w = \varphi + i\psi), \tag{1.1}$$

характеризующихся тем свойством, что каждое ограниченное решение $w = w(z)$ $(z \in D)$ таких систем является локально-гомеоморфным в D. Важность изучения L-эллиптических систем уравнений связана, в частности, с их непосредственной гидродинамической интерпретацией — ими описываются многие сложные гидродинамические процессы, такие как дозвуковые потенциальные стационарные течения идеального газа, фильтрация жидкости в неоднородных анизотропных пористых средах или нелинейном законе движения и другие.

Исходя из гидродинамических соображений, М. А. Лаврентьев записывает (1.1) в виде уравнений относительно геометрических характеристик p_s, α_s, h_s и θ_s параллелограмма с вершиной в точке z_0 (p_s — длина стороны, α_s — угол ее с осью OX, h_s — высота, противолежащая углу θ_s при z_0), который касательным отображением

$$w = w(z_0) + w_z(z_0)(z - z_0) + w_{\bar z}(\bar z - \bar z_0), \quad J = |w_z|^2 - |w_{\bar z}|^2$$

преобразуется в единичный квадрат, наклоненный под углом s к оси $\varphi = \operatorname{Re} w$. Производные w_z и $w_{\bar z}$ элементарно выражаются через $H_s = h_s + i\theta_s$ и $P_s = p_s + i\alpha_s$ и после подстановки в (1.1) приводят к уравнению в характеристиках, которое предполагается разрешимым относительно H_s:

$$H_s = H_s(z, w, P_s) \in C^1(\Omega), \ \forall s \in [0, 2\pi].$$

Согласно [3], уравнение (1.1) L-эллиптично, если существует такая постоянная $\delta > 0$, что

$$\delta < \theta_s < 2\pi - \delta, \ \delta < \partial h_s/\partial p_s < \delta^{-1}, \ \forall s \in [0, 2\pi],$$

т. е. характеристический параллелограмм не вырождается.

М. А. Лаврентьевым [4, 5] показано, что решения L-эллиптических уравнений обладают многими свойствами конформных отображений и, в частности, для них справедлив аналог теоремы Римана об отображениях односвязных областей. Впоследствии теория L-эллиптических уравнений получила дальнейшее развитие в работах М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [6, 7], где наряду с другими интересными результатами установлены важные свойства L-эллиптических уравнений: эллиптичность их в обычном смысле и ограниченность величины $|w_{\bar z}/w_z| \leqslant q_0 < 1$.

В 1973 г. В. Н. Монахов [8] (см. также [9, 10]) предложил положить эти свойства в основу определения и называть уравнение (1.1) L-эллиптическим, если оно эллиптично и разрешается относительно ψ_x, ψ_y, в результате чего может быть записано в виде

$$w_{\bar z} - q(z, w, \zeta) w_z = 0, \quad q \in C^1(\Omega) \quad (\zeta = \varphi_x - i\psi_y),$$

при этом требуется, чтобы $|q(z, w, \zeta)| \leqslant q_0 < 1$ в Ω. В. Н. Монаховым установлена эквивалентность этого определения L-эллиптичности геометрическому определению М. А. Лаврентьева и доказана теорема существования отображений многосвязных областей на канонические области решениями L-эллиптических уравнений. В 1974—1976 гг. аналогичные результаты были получены в работах Б. Боярского и Т. Иванеца

[11—13], а в работе Н. А. Кучера [14] изучены краевые задачи для L-эллиптических уравнений.

При доказательстве в [8] эквивалентности определений L-эллиптичности выяснилось, что прямым следствием равномерной эллиптичности уравнения (1.1) являются неравенства

$$|F_\zeta|^2-|F_{\bar\zeta}|^2\geqslant\alpha,\quad |F_\omega|^2-|F_{\bar\omega}|^2\geqslant\alpha>0, \tag{1.2}$$

где $\zeta=\varphi_x-i\varphi_y$; $\omega=\psi_y+i\psi_x$. Неожиданно оказалось, что выполнение неравенств (1.2) гарантирует не только локальную, но и глобальную разрешимость (1.1) относительно ω и ζ, а это в свою очередь обеспечивает и глобальную разрешимость уравнения в характеристиках относительно H_s. А именно справедливо утверждение (В. Н. Монахов):

Теорема 1. Пусть $F(0,0)=0$ и функция $F(\zeta,\omega)$ обладает непрерывными по ζ, ω производными, для которых выполняются неравенства (1.2). Тогда существует непрерывно-дифференцируемый гомеоморфизм $\omega(\zeta)$, ω: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $\omega(t)=t=0,\infty$ такой, что $F[\zeta,\omega(\zeta)]=0$.

Наметим очень кратко доказательство этого результата. Из равномерной ограниченности и неравенств (1.2) имеем

$$|\mu_i(\zeta,\omega)|\leqslant\mu_0<1,\quad \mu_1=F_{\bar\zeta}/F_\zeta,\quad \mu_2=F_{\bar\omega}/F_\omega. \tag{1.3}$$

Дифференцируя формально тождество $F^0(\zeta)=F[\zeta,\ \omega(\zeta)]\equiv0$ и подставляя значения производных в соотношение

$$F^0_{\bar\zeta}-\mu_1^0F^0_\zeta=0,\quad |\mu_1^0|=|\mu_1[\zeta,\omega(\zeta)]|\leqslant\mu_0<1, \tag{1.4}$$

с учетом (1.3) для μ_1 и μ_2 приходим к уравнению

$$\omega_{\bar\zeta}-q_1(\zeta,\omega)\,\omega_\zeta+q_2(\zeta,\omega)\,\overline{\omega_\zeta}=0,\quad |q_1|+|q_2|\leqslant q_0<1, \tag{1.5}$$

где $q_i=\mu_i(1-|\mu_j|^2)(1-|\mu_1\mu_2|^2)^{-1}$, $i,j=1,2$, $i\neq j$. Зафиксируем произвольно $(\zeta_0,\ \omega_0)\neq(0,0):F(\zeta_0,\ \omega_0)=0$ из окрестности точки (0, 0), где уравнение $F(\zeta,\ \omega)=0$ локально разрешимо, и будем считать $\zeta_0=\omega_0=1$ (при надобности растягивая ζ и ω). Условимся называть Q-автоморфизмами гомеоморфные отображения $\omega=\omega(\zeta):\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $\omega(t)=t=0,1,\ \infty$, для которых $|\omega_{\bar\zeta}/\omega_\zeta|\leqslant\mathrm{const}<1$, причем $\{\omega,\ \omega^*\}\in W^1_p(E)$, $E\{|\zeta|<1\}$, $p>2$, $\omega^*(\zeta)=[\omega(1/\zeta)]^{-1}$.

Можно убедиться в том, что Q-автоморфизм $\omega=\omega(\zeta)$ уравнения (1.5) является искомой неявной функцией уравнения $F(\zeta,\ \omega)=0$. Тем самым справедливость теоремы 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2. Пусть $q_i(\zeta,\omega)$ $(i=1,\ 2)$ — непрерывные функции $(\zeta,\ \omega)$ в $\mathbf{C}^2$. Тогда существует Q-автоморфизм уравнения (1.5).

Эта теорема представляет и самостоятельный интерес, поскольку ранее при получении подобных результатов [15, 10] всегда предполагалось, что коэффициенты уравнения (1.5) имеют конечный носитель по $\zeta:q_i\equiv0$, $|\zeta|>R$ (можно считать $R=1$). Q-автоморфизмы таких уравнений (будем называть их Q_0-автоморфизмами) можно отыскивать в виде

$$\omega=(1+a)\,\zeta+a\bar\zeta-\frac{\zeta}{\pi}\iint\limits_E\frac{f(t)\,dt}{t(t-\zeta)},\quad \omega(1)=1, \tag{1.6}$$

получая для искомой функции $f(t)$ разрешимое в $L_p(E)$ $(p>2)$ нелинейное сингулярное интегральное уравнение. Можно проверить, что Q-автоморфизм уравнения (1.5) при $q_2 \equiv 0$ и произвольном q_1 представляется в виде $\omega = 1/\omega^*(t)$ $(t = 1/\varphi(\zeta))$ через Q_0-автоморфизмы уравнений

(1.7) $\varphi_{\bar\zeta} - \delta_1(\varphi) m_1(\zeta, \omega^*) \varphi_\zeta = 0, \quad \omega^*_{\bar t} - \delta_2(t) m_2(\zeta, \omega^*) \omega^*_t = 0 \quad (t = 1/\varphi),$

где $m_1 = q_1(\zeta, 1/\omega^*)$; $m_2 = m_1 \bar\zeta_{\bar t}/\zeta_t$; $\delta_1(\varphi) = 1$ при $|\varphi| \leqslant 1$; $\delta_1(\varphi) = 0$ при $|\varphi| > 1$, а $\delta_2(t) = 1 - \delta_1(1/t)$. Если $q_2 \not\equiv 0$, то Q-автоморфизм уравнения (1.5) представляется в неявной форме через Q-автоморфизмы $\sigma = \omega_1(\zeta)$ и $\sigma = \omega_2(\omega)$ уравнений

$$\partial\omega_i/\partial\bar\zeta_i - q_{1i}\partial\omega_i/\partial\zeta_i = 0, \quad |q_{1i}| \leqslant q_0 < 1,$$
$$q_{1i} = 2q_i\left(n_{ij} + \sqrt{n_{ij}^2 - 4q_i^2}\right)^{-1}, \quad n_{ij} = 1 + |q_i|^2 - |q_j|^2,$$
$$i, j = 1, 2, \ i \neq j, \ \zeta_1 = \zeta, \ \zeta_2 = \omega.$$

Аналогично предыдущему положим

$$\omega_i = 1/\omega_i^*(t_i) \quad (t_i = 1/\varphi_i(\zeta_i)),$$

где $\varphi_i(\zeta_i)$ и $\omega_i^*(t_i)$ — Q_0-автоморфизмы уравнений вида (1.7) с коэффициентами, определенными прежними формулами, в которых все величины снабжены индексом i. Таким образом, и в этом случае Q-автоморфизм уравнения (1.5) выражается через Q_0-автоморфизмы, что с использованием представлений (1.6) для φ_i и ω_i^* приводит к системе четырех нелинейных сингулярных уравнений, разрешимой в $L_p(E)(p > 2)$.

2. Двумерные задачи дозвуковой газовой динамики. Основной моделью L-эллиптических систем для М. А. Лаврентьева послужила следующая система уравнений:

(2.1) $x^k\rho(q)\varphi_x = \psi_y, \ x^k\rho(q)\varphi_y = -\psi_x, \ q^2 = |\nabla\varphi|^2, \ d(\rho q)/dq \geqslant \delta > 0,$

описывающая плоские ($k = 0$) и осесимметрические ($k = 1$) потенциальные равномерно дозвуковые течения газа. Здесь φ и ψ — соответственно потенциал и функция тока течения; ρ и q — плотность и величина скорости. Из полученных им результатов [3, 4] по L-эллиптическим уравнениям вытекает, в частности, разрешимость плоской задачи о дозвуковых потенциальных течениях газа в канале с криволинейными стенками. Разрешимость несколько более сложной задачи обтекания криволинейного контура в рамках той же модели установлена в 1954 г. Л. Берсом (см. в [16]). Значительно более трудной оказалась проблема распространения известных результатов М. А. Лаврентьева [17] по теории струй несжимаемой жидкости на случай потенциальных дозвуковых течений газа. Характерной особенностью струйных задач гидродинамики, сильно затрудняющей их исследование, является то обстоятельство, что неизвестны не только решения соответствующих систем уравнений, но и область определения этих решений. Широкий класс задач гидродинамики со свободными границами (струйные и волновые задачи, задачи проектирования крылового профиля по заданной хордовой диаграмме и другие) описывается следующими краевыми условиями, которым должны удовлетворять решения уравнений (2.1):

(2.2) $\partial\varphi/\partial n = 0$ на Γ; $\theta = \theta(x)$ на Γ_1; $q = q(x, y)$ на Γ_2,

где $\theta = \operatorname{arctg}(\varphi_y/\varphi_x)$ — угол наклона касательной к заданной части Γ_1 границы Γ области течения, а $\Gamma_2 \subset \Gamma$ — свободная (неизвестная) граница. В 1963—1964 гг. В. Н. Монахов, используя специальный выбор независимых переменных (x и ψ), привел задачи (2.1), (2.2) к краевым задачам для квазилинейной вырождающейся эллиптической системы уравнений в заданной области и при некоторых условиях на $\theta(x)$ и $q(x, y)$ в [9] доказал разрешимость этих задач в плоском случае. Подробное изложение этих результатов содержится в работе [10], где изложены также полученные в 1969 г. обобщения теорем существования решений в некоторых из задач (2.1), (2.2) на случай двусвязных областей (С. Н. Антонцев) и на случай завихренных течений сжимаемой жидкости (П. И. Плотников). Осесимметрические задачи (2.1), (2.2) впервые были изучены в работе [18], а в работе С. Н. Антонцева [19] эти результаты распространены на случай околозвуковых течений газа, когда допускается вырождение ($d(q\rho)/dq = 0$) системы (2.1). При этом в [19] доказана конечность скорости распространения возмущений в ряде струйных задач (следствие вырождения (2.1))— факт, впервые установленный Л. В. Овсянниковым [20] для задачи об истечении газа из сосуда с прямолинейными стенками.

3. Задачи конформного и квазиконформного склеивания. М. А. Лаврентьев [21] впервые сформулировал и решил задачу конформного склеивания, а позднее им была предложена постановка общей задачи квазиконформного склеивания [22], которой мы придадим принятую в настоящее время несколько более общую форму. Пусть D^+ — конечная односвязная или многосвязная область с границей $\Gamma = \partial D^+$ и $D^- = \mathbf{C} \setminus \overline{D}^+$. Требуется найти гомеоморфные решения $\omega = \omega^\pm(z)$, $\omega^\pm : D^\pm \to \Delta^\pm$, $\overline{\Delta}^+ \cup \cup\, \Delta^- = \mathbf{C}$ L-эллиптических в $D^\pm$ уравнений, связанные следующим условием склеивания образов точек t и $\alpha(t)$, лежащих на Γ:

$$\omega^+[\alpha(t)] = \omega^-(t), \quad t \in \Gamma, \tag{3.1}$$

где $\alpha(t)$— гомеоморфизм $\Gamma \to \Gamma$. Задачи конформного склеивания (т. е. $\omega^\pm$ голоморфны в $D^\pm$) нашли широкое применение при решении более сложных краевых задач теории аналитических функций, например, задачи Карлемана, в которой искомые голоморфные в $D^\pm$ функции $\Phi^\pm(z)$, $|\Phi^-(\infty)| < <\infty$ удовлетворяют на Γ условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] = a_0(t)\Phi^-(t) + a_1(t), \quad a_0 \neq 0, \quad t \in \Gamma. \tag{3.2}$$

Обозначим через $z^\pm : \Delta^\pm \to D^\pm$ отображения, обратные к решению задачи (3.1) конформного склеивания, и положим $\Phi_1^\pm(\omega) \equiv \Phi^\pm[z^\pm(\omega)]$, $\omega \in \Delta^\pm$. Тогда задача Карлемаиа (3.2) приводится к хорошо изученной задаче Римана

$$\Phi_1^+(\sigma) = A_0(\sigma)\Phi_1^-(\sigma) + A_1(\sigma), \quad \sigma \in \partial\Delta^+.$$

Разрешимость задачи конформного склеивания для односвязной области, ограниченной кривой Ляпунова, в предположении, что $\alpha \in \mathbf{C}^{2+\beta}(\Gamma)$, была доказана Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [23], где впервые установлена также и конформная эквивалентность задач Карлемана и Римана. Для многосвязных областей аналогичный результат получен в работе [24] при более слабых предположениях о сдвиге: $\alpha \in \mathbf{C}^{1+\beta}(\Gamma)$. Следует отметить, что ранее Л. И. Волковыским [25] изучалась одна частная задача конформного склеивания при $\alpha \in \mathbf{C}^1(\Gamma)$.

С. Н. Антонцевым и В. Н. Монаховым [10, 26] установлена разрешимость сформулированной выше задачи квазиконформного склеивания для квазилинейных эллиптических уравнений (1.5) в случае многосвязных областей и на основе этого результата изучены задача Карлемапа и более общие краевые задачи при наличии сдвига в граничных условиях. При этом существенно снижаются требования на гладкость границы Γ и сдвига $\alpha(t)$: связные компоненты Γ предполагаются квазиконформными кривыми (образами окружности при квазиконформных отображениях), а $\alpha(t)$ — предельными значениями квазиконформного отображения $\alpha: D^+ \to D^+$, $|\alpha_{\bar z}/\alpha_z| \leqslant q_0 < 1$, вообще говоря, не обладающими производными на Г.

То, насколько «плохими» являются квазиконформные кривые, показывает известный пример С. П. Пономарева [27], построившего в окрестностях $\Omega^\pm \subset D^\pm$ $(\overline{D^+} \cup D^- = \mathbf{C})$ такой кривой Г голоморфные функции $\omega^\pm(z)$, продолжимые на Г до непрерывной в $\Omega = (\Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma)$ функции $\omega(z) = \omega^+(z)$, $z \in \Omega^+$ и $\omega = \omega^-(z)$ $(z \in \Omega^-)$, но не голоморфной в Ω.

Для нелинейных L-эллиптических уравнений задача квазиконформного склеивания остается до сих пор не решенной.

4. Гармонические отображения. В 1962—1967 гг. М. А. Лаврентьевым были заложены основы теории отображений пространственных областей, соответствующих системам дифференциальных уравнений с частными производными. Следует отметить, что между квазиконформными отображениями многомерных эвклидовых пространств и теорией дифференциальных уравнений нет той тесной связи, которая характерна для плоского случая.

Исходя из гидродинамических соображений, М. А. Лаврентьев выделил два класса отображений трехмерных областей в $\mathbf{R}^3$, которые он назвал гармоническими.

К первому классу относятся отображения $x \to u(x)$, удовлетворяющие системе из четырех дифференциальных уравнений

$$\operatorname{rot} u = 0, \ \operatorname{div} u = 0. \tag{4.1}$$

В односвязных областях решения (4.1) допускают представление $u = \nabla\varphi$, в котором φ — произвольная гармоническая функция. Для гармонических отображений справедливы многие теоремы теории функций комплексного переменного. Сформулируем две из них. Первое утверждение дано в работе [28]:

Теорема 3. Пусть $u \not\equiv 0$ — решение уравнений (4.1) и якобиан $J(x)$ отображения $u(x)$ обращается в нуль в точке x_0, лежащей внутри области определения u. Тогда в любой окрестности x_0 функция $J(x)$ меняет знак. Очевидным следствием этой теоремы является следующая:

Теорема 4. Пусть последовательность u_n решений (4.1), однолистных в шаре B_1: $|x| < 1$, сходится в каждой точке B_1 к гармоническому отображению u. Тогда u также однолистно в B_1.

Вопрос о существовании гармонических отображений заданных областей впервые рассмотрен М. А. Лаврентьевым в 1967 г. В работе [29] им доказана разрешимость задачи о гармоническом отображении слоя $\{z_0(x_1, x_2) < x_3 < z_1(x_1, x_2)\}$ пространства $\mathbf{R}^3$ на слой $\{0 < u_3 < H\}$, лежащий в пространстве точек $u = (u_1, u_2, u_3)$, в предположении, что трижды непрерывно-дифференцируемые функции z_i экспоненциально быстро стремятся к различным постоянным значениям при $x_1^2 + x_2^2 \to \infty$. В его работах [29, 30] сформулирован ряд гипотез о существовании гармонических отображений односвязных областей и, в частности, о возможности гармонического отображения шара на трехосный эллипсоид и шара на себя.

Решение последней задачи дано С. Н. Антонцевым [31]. Приведем формулировку результатов. Обозначим через B_λ семейство эллипсоидов вращения

$$B_\lambda = \{x : x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 < 1\}.$$

Теорема 5. Для каждого $\lambda \in [1/2, \infty)$ существует гармоническая функция $\varphi = \varphi\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3\right)$, принадлежащая пространству $C^\infty(B_1)$, градиент которой диффеоморфно отображает шар B_1 на B_λ с сохранением ориентации.

Доказательство основано на том, что при наличии осевой симметрии задача о гармоническом отображении шара на тело вращения сводится к отысканию квазиконформного отображения круга на сечение этого тела меридиальной плоскостью.

Существуют ли гармонические отображения шара даже на области, близкие к эллипсоидам B_λ, в настоящее время неизвестно. Поэтому важное значение имеет исследование следующей задачи об устойчивости гармонических отображений.

Рассмотрим однопараметрическое семейство односвязных областей Ω_ε ($\varepsilon \geqslant 0$) с границами класса C^∞, заданными уравнениями $f_0(u) + \varepsilon f(u) = \text{const}$, и пусть известно отображение $u_0 = \nabla\varphi_0$ ($\Delta\varphi_0 = 0$) шара B_1 на Ω_0.

Возникает вопрос, каким условиям должно удовлетворять семейство Ω_ε, чтобы для каждого ε из некоторого интервала $[0, \varepsilon_0)$ существовало гармоническое отображение u_ε шара B_1 на область Ω_ε.

Решение этой задачи сводится к отысканию гармонической функции $\varphi_\varepsilon(x)$, удовлетворяющей краевому условию

$$f_0(\nabla\varphi_\varepsilon) + \varepsilon f(\nabla\varphi_\varepsilon) = \text{const при } |x| = 1.$$

В первом приближении по ε для разности $\psi = \varphi_\varepsilon - \varphi_0$ можно получить краевую задачу с наклонной производной

$$a\cdot\nabla\psi = g \text{ при } |x| = 1, \tag{4.2}$$

где $$a = f'_{0,u}(\nabla\varphi_0); \quad g = -\varepsilon f(\nabla\varphi_0).$$

Если задача (4.2) не вырождена (произведение $a\cdot x$ не обращается в нуль на единичной сфере), то решение задачи об устойчивости гармонического отображения отыскивается с помощью метода последовательных приближений. К сожалению, этот случай является редким, а именно справедливо следующее утверждение (П. И. Плотников): если область Ω_0 выпукла, то на единичной сфере существует точка x_0 такая, что $a(x_0)\cdot x_0 = 0$.

Доказательство основано на том, что при сделанных предположениях имеет место представление

$$a\cdot x = b_{ij}\varphi_{0,x_i}x_j, \quad b_{ij}x_ix_j \leqslant 0,$$

которое вместе с теоремой Зарембы — Хопфа и обеспечивает выполнение равенства $a\cdot x = 0$, по крайней мере, в одной точке x_0, $|x_0| = 1$.

Это обстоятельство делает задачу весьма трудной. Тем не менее ее решение, по всей видимости, можно получить, опираясь на существующие исследования задачи с наклонной производной [32].

5. Обобщения системы Коши — Римана. Второй класс квазиконформных отображений трехмерных областей, рассмотренных М. А. Лаврентьевым, связан с системами дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\nabla u_1 = \lambda(|\nabla u_1|)\nabla u_2 \times \nabla u_3. \tag{5.1}$$

Исходя из геометрических соображений, он показал в [29], что система (5.1) является естественным обобщением уравнений Коши — Римана. Уравнения (5.1) допускают ясную гидродинамическую интерпретацию.

Функция u_1 является потенциалом течения баротропной жидкости и удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\,[\lambda^{-1}(|\nabla u_1|)\nabla u_1] = 0.$$

Компоненты $u - u_2$, u_3 постоянны на траекториях динамической системы $\dot{x} = \nabla u_1$ и, следовательно, служат линиями тока течения, порожденного потенциалом u_1.

Первое исследование этих отображений проведено в работе [33], где построен ряд точных решений системы (5.1), аналогами которых являются дробно-линейные, экспоненциальная и логарифмическая функции комплексного переменного.

Задача об отображениях областей типа трехмерных слоев решениями уравнений (5.1) рассматривалась П. И. Плотниковым [34, 35]. Приведём один из полученных им результатов.

Пусть D — слой в $\mathbf{R}^3$, ограниченный гладкими поверхностями $S_0 : x_3 = z_0(x_1, x_2)$ и $S_1 : x_3 = z_0 + h(x_1, x_2)$. Предполагается, что при $x_1 \to \pm\infty$ поверхность S_0 экспоненциально быстро стремится к плоскостям $x_3 = \operatorname{tg}\theta\cdot x_1$, $x_3 = 0$, а «глубина» h — соответственно к некоторым предельным значениям $h^{\pm}(x_2)$. Зафиксируем гладкое, сохраняющее элемент площади отображение $v = (v_2, v_3)$ полосы $0 < x_3 < h^-(x_2)$, лежащей в плоскости x_2, x_3, на некоторую прямолинейную полосу $0 < v_3 < H$. Рассмотрим в D следующую краевую задачу для гармонической функции u_1:

$$\nabla u_1\cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } S_0 \cup S_1, \tag{5.2}$$

$$\left|x_1^3(\nabla u_1 - p^{\pm})\right| \to 0 \quad \text{при} \quad x_1 \to \pm\infty,$$

где единичные векторы $p^- = (1, 0, 0)$, $p^+ = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$.

Теорема 6. Если задача (5.2) имеет решение, удовлетворяющее неравенству $|\ln|\nabla u_1|| \leqslant c_0 < \infty$, то существует единственное с точностью до аддитивной постоянной решение уравнений (5.1) с $\lambda = 1$, гомеоморфно отображающее D на слой $\{0 < u_3 < H\}$ и удовлетворяющее условиям нормировки:

$$u_j \to v_j \text{ при } x_1 \to -\infty,\ j = 2, 3.$$

Условия теоремы выполнены, например, в том случае, когда производные z_{0,x_2}, h_{x_2} достаточно малы.

6. Теория волн. В 1957 г., анализируя явление цунами, М. А. Лаврентьев высказал гипотезу о том, что неровность дна водоема типа подводного хребта может служить волноводом поверхностных волн. Эта задача инициировала ряд исследований [36—39], выполненных в 1959—1975 гг. в Институте гидродинамики СО АН СССР. В 1965 году Р. М. Гарипов подтвердил справедливость гипотезы М. А. Лаврентьева в рамках линейной теории волн. Рассмотрим подробнее эти результаты. Предположим, что идеальная несжимаемая жидкость заполняет область $D \subset \mathbf{R}^3$, ограниченную «свободной поверхностью» — плоскостью $\Gamma : x_3 = 0$ и дном $\Gamma_\varepsilon : x_3 = -1 + \varepsilon h(x_2)$. Финитная бесконечно дифференцируемая функция $h \geqslant 0$ определяет форму подводного хребта. Задача Коши — Пуассона о нестационарных волнах на поверхности идеальной жидкости сводится к нахождению потенциала течения — гармонической функции $\varphi(t, x)$, удовлетворяющей граничным

$$\varphi_{tt} + g\varphi_{x_3} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma,\ \nabla\varphi\cdot n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \tag{6.1}$$

и начальным условиям

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0,\ \varphi_t|_{t=0} = \varphi_1 \text{ на } \Gamma. \tag{6.2}$$

Волновой процесс сопровождается эффектом волновода, если задача (6.1) имеет решение

$$(6.3)\qquad \varphi = e^{i(\omega t - \nu x_1)}\Phi(x_2, x_3), \quad \Phi \to 0 \quad \text{при} \quad x_2 \to \infty.$$

В общем случае необходимо показать, что решение задачи Коши — Пуассона (6.1), (6.2) допускает асимптотику

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\,\varphi_k(t, x) + \varphi^*(t, x),$$

в которой φ_k имеют вид (6.3), а остаточный член φ^* мал по сравнению с a_k.

Доказательство существования решений (6.1) в виде волн, бегущих вдоль подводного хребта, может быть сведено [36, 39] к доказательству существования нетривиальных затухающих на бесконечности решений интегродифференциального уравнения

$$(6.4)\qquad \frac{d^2u}{dx_2^2} + \lambda u = \varepsilon A(\varepsilon, \lambda)\,u$$

для $u(x_2)$ — сужения Φ на плоскость Г. Здесь A — некоторый самосопряженный компактный оператор в шкале пространств Соболева $H_s(\mathbf{R})$, $s \geqslant 0$. В работе [39] установлено, что существование отрицательных собственных чисел (6.4) и соответствующих им быстроубывающих собственных функций является следствием общего утверждения, справедливого для широкого класса компактных, не обязательно самосопряженных операторов. В работе [37] показано, что собственным функциям (6.4) в асимптотике решения задачи Коши — Пуассона (1.7), (2.1) соответствуют слагаемые $a_k\varphi_k$ с $a_k \sim t^{\alpha_k}$, $\alpha_k > -1$. Вопрос об оценке остаточного члена φ^*, обусловленного непрерывным спектром (6.4), остается открытым. Следует ожидать по аналогии со случаем ровного дна ($\varepsilon = 0$), рассмотренным в [40], что вдоль хребта $\varphi^* \sim t^{-1}$, но строгого доказательства этого факта нет.

7. Пространственные течения со свободной границей. Теория трехмерных течений со свободными границами является мало развитым разделом гидродинамики. Основные ее контуры были намечены М. А. Лаврентьевым в 1962—1968 гг. В работе [41] рассмотрен трехмерный вариант задачи Кирхгофа о потенциальном движении слоя несжимаемой жидкости со свободной границей и предложено несколько методов ее решения. В книге [2] поставлен ряд задач о пространственных волнах и струйных течениях.

Впервые исследование корректности задачи о трехмерных потенциальных течениях идеальной жидкости было предпринято в работе [42]. Оказалось, что эта задача является вырожденной и ее постановка должна определяться геометрией течения. В [43] решена поставленная М. А. Лаврентьевым [2] задача о пространственных гравитационных волнах на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости. Она сводится к отысканию свободной поверхности S с графиком

$$x_3 = \varepsilon \cos k_1x_1 \cos k_2x_2 + \eta(\varepsilon, x_1, x_2) \equiv Z$$

и потенциала течения — гармонической в слое $\{-h < x_3 < Z\}$ функции φ, удовлетворяющей уравнениям

$$(7.1)\qquad \varphi_{x_3} = 0 \text{ при } x_3 = -h; \quad |\nabla\varphi|^2 + \lambda_1 x_3 = \lambda_2 \text{ на } S,$$
$$\nabla\varphi\cdot n = 0 \text{ на } S,$$

где λ_i — некоторые параметры. Решение задачи (7.1) ищется в классе гладких 2π-периодических функций η, $x_1 - \varphi$ по x_1, x_2. Основное отличие этой задачи от аналогичных двумерных задач теории волн состоит в том, что собственные числа трехмерной линейной задачи теории волн — линеаризации (7.1) на тривиальном решении $Z = \mathrm{const}$, $\varphi = x_1$ — всюду плотны на положительной полуоси. С помощью метода ускоренной сходимости в [43] доказано следующее утверждение.

Теорема 7. В пространстве параметров λ_i, h существует непустое множество Λ, в каждой точке которого от тривиального решения $Z = \mathrm{const}$ ответвляется однопараметрическое семейство решений задачи (7.1) $\varphi(\varepsilon)$, $\eta(\varepsilon)$, $\lambda_i(\varepsilon)$. Справедлива оценка

$$\|\eta(\varepsilon)\|_{C^r(R^2)} \leqslant \mathrm{const}\, \varepsilon^2, \quad r \geqslant 3.$$

Поступила 8 V 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Некоторые проблемы математики и механики. Л., Наука, 1970.
2. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., Наука, 1973.
3. **Лаврентьев М. А.** Квазиконформные отображения и их производные системы.— ДАН СССР, 1946, т. 52, № 4.
4. **Лаврентьев М. А.** Основная теорема теории квазиконформных отображений плоских областей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1948, т. 12, № 6.
5. **Лаврентьев М. А.** Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа. М., Изд-во АН СССР, 1962.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Геометрические свойства решений нелинейных систем уравнений с частными производными.— ДАН СССР, 1957, т. 112, № 5.
7. **Шабат Б. В.** Об отображениях, осуществляемых решениями сильно эллиптических систем.— В кн.: Исследования по совр. пробл. теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1960.
8. **Монахов В. Н.** О некоторых свойствах решений нелинейных систем уравнений, эллиптических по М. А. Лаврентьеву.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 15. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1973.
9. **Монахов В. Н.** Отображения многосвязных областей решениями нелинейных L-эллиптических систем уравнений.— ДАН СССР, 1975, т. 220, № 3.
10. **Монахов В. Н.** Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск, Наука, 1977.
11. **Bojarski B. and Iwaniec T.** Quasiconformal mappings and non-linear elliptic equations in two variables. I, II.— Bull. acad. polon. sci. ser. sci. math., astr. et. phys., 1974, vol. 22, N 5.
12. **Bojarski B.** Quasiconformal mappings and general structural properties of systems of non linear equations elliptic in the sens of Lavrent'ev.— In: Symposia Mart. Vol. 18. L.—N. Y., 1976.
13. **Iwaniec T.** Quasiconformal mapping problem for general non-linear systems of partial differential equations.— In: Symposia Math. Vol. 18. L.— N. Y., 1976.
14. **Кучер Н. А.** Краевая задача Римана—Гильберта для одного класса нелинейных эллиптических систем на плоскости.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 18. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1974.
15. **Боярский Б.** Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами. Мат. сб., 1957, т. 43 (85), № 4.
16. **Берс Л.** Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.
17. **Лаврентьев М. А.** К теории струй.— ДАН СССР, 1938, т. 18, № 415.
18. **Плотников П. И.** Разрешимость осесимметрических задач гидродинамики со свободными границами.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1972.
19. **Антонцев С. Н.** Краевые задачи для некоторых вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Ч. I. Новосибирск, изд. Новосибир. ун-та, 1976.
20. **Овсянников Л. В.** Об одном газовом течении с прямой линией перехода.— ПММ, 1949, т. 13, вып. 5.
21. **Лаврентьев М. А** Sur une classe representation continues.— Мат. сб., 1935, вып. 42.

22. **Лаврентьев М. А.** Об одной задаче на склеивание.— Сиб. матем. журнал, 1964, т. 5, № 3.
23. **Манджавидзе Г. Ф., Хведелидзе Б. В.** О задаче Римана—Привалова с непрерывными коэффициентами.— ДАН СССР, 1958, т. 123, № 5.
24. **Чернецкий В. А.** О конформной эквивалентности краевой задачи Карлемана краевой задаче Римана на разомкнутом контуре.— ДАН СССР, 1970, т. 190, № 1.
25. **Волковыский Л. И.** К проблеме типа односвязных римановых поверхностей.— Мат. сб., 1946, вып. 18.
26. **Антонцев С. Н., Монахов В. Н.** О разрешимости одного класса задач сопряжения со сдвигом.— ДАН СССР, 1972, т. 205, № 2.
27. **Пономарев С. П.** К вопросу об *Ac*-устранимых квазиконформных кривых.— ДАН СССР, 1976, т. 227, № 3.
28. **Lewy H.** On the non vanishing of the Jacobian of a homeomorphism by harmonic gradients.— Ann. of Math., 1968, t. 88, N 3.
29. **Lavrentieff M. A.** On the theory of quasi-conformal mappings of three-dimensional domain.— J. d'Analyse math., 1967, t. 19, p. 217—225.
30. **Лаврентьев М. А.** Краевые задачи и квазиконформные отображения.— В кн.: Современные проблемы теории аналитических функций. М., Наука, 1966.
31. **Антонцев С. П.** Об одной задаче М. А. Лаврентьева.— ДАН СССР, 1976, т. 228, № 4.
32. **Псевдодифференциальные операторы.** М., Мир, 1968.
33. **Янушаускас А.** Об элементарных гармонических отображениях трехмерных областей.— В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений. V. Киев, Наукова думка, 1974.
34. **Плотников П. И.** О гармонических отображениях трехмерных слоев.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
35. **Плотников П. И.** Линейная модель задачи о пространственных течениях идеальной жидкости со свободной границей.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 26. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1976.
36. **Гарипов Р. М.** Неустановившиеся волны над подводным хребтом.— ДАН СССР, 1965, т. 161, № 3.
37. **Гарипов Р. М.** Об асимптотике волн в жидкости конечной глубины, вызванных произвольным начальным возвышением свободной поверхности.— ДАН СССР, 1962, т. 147, № 6.
38. **Биченков Е. П., Гарипов Р. М.** Распространение волн на поверхности тяжелой жидкости в бассейне с неровным дном.— ПМТФ, 1969, № 2.
39. **Налимов В. П., Плотников П. И.** Эффект волновода и нерегулярные задачи на собственные значения.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
40. **Исакова Е. И.** О поведении при $t \to \infty$ решения линеаризованной задачи Коши— Пуассона.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 23. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1975.
41. **Лаврентьев М. А.** О некоторых краевых задачах для систем эллиптического типа.— Сиб. матем. журнал, 1962, т. 3, № 5.
42. **Plotnicov P. I.** On spatial free boundary flows.— Archives of Mechanics, 1978, t. 30, N 4—5.
43. **Плотников П. И.** Разрешимость задачи о пространственных гравитационных волнах на поверхности идеальной жидкости.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 3.

УДК 532.527+532.517.4

ПОДАВЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЯДРАХ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВИХРЕЙ

В. А. Владимиров, Б. А. Луговцов, В. Ф. Тарасов

(*Новосибирск*)

1. Задача о движении вихревых колец уже более века привлекает внимание исследователей [1]. По инициативе М. А. Лаврентьева в Институте гидродинамики СО АН СССР в течение нескольких лет ведутся экспериментальные и теоретические исследования этого явления и других вихревых течений жидкости и газа